193

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT 6

UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

45. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1939

QA1
M88
v.45

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

45. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1939

66 F3134

QA1
M88
V. 45

Inhalt des 45. Bandes

Seite

anerjee, D. P., On the expansion of a function in a series of Legendre functions of the second kind 142

ullig, G., Zur Zahlengeometrie in den total reellen kubischen Körpern . . . 511

annon, B., On the representation of integral functions by general basic series 185

artan, E., Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques 335

inghas, A., Über Ausnahmegebiete meromorpher Funktionen 20

inghas, A., Zur Invarianz der Shimizu-Ahlforsschen Charakteristik 25

inghas, A., Zur Werteverteilung einer Klasse transzendenter Funktionen . . 507

arten, V., Ungleichungen zwischen den Hauptlimites der von Herrn Karamata untersuchten iterierten Mittelbildungen bei drei aufeinanderfolgenden Ordnungen 735

runsky, H., Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen 29

einhold, J., Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes. II. 176

euser, P., Zur Approximation analytischer Funktionen durch Polynome . . 146

amke, E., Zum Entwicklungssatz bei polaren Eigenwertaufgaben 706

amke, E., Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 759

amke, E., Weinsteins Einschließungssatz 788

apferer, H., Beweis eines Fundamentalsatzes der Kurven 3. Ordnung 312

aramata, J., Über die Indexverschiebung beim Borelschen Limitierungsverfahren 635

ienast, A., Über die asymptotische Darstellung der summatorischen Funktion von Dirichletreihen mit positiven Koeffizienten 554

lein-Barmen, F., Theorie der Gewebe 107

lein-Barmen, F., Zur Theorie der Gefüge und Vereine 595

neser, H., Eine merkwürdige Mittelbildung bei algebraischen Gleichungen mit lauter positiven Wurzeln 590

nopp, K., Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen 573

ommerell, K., Beweis eines Fundamentalsatzes der Kurven 3. Ordnung . . . 756

rull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. VI. Der allgemeine Diskriminantensatz. Unverzweigte Ringerweiterungen 1

rull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. VII. Inseparable Grundkörpererweiterung. Bemerkungen zur Körpertheorie . . . 319

orenzen, P., Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie 533

yra, G., Über einen Satz zur Theorie der C-summierbaren Reihen 559

Seite

Mall, J., Ein Satz über die Konvergenz von Kettenbrüchen 368

Maruhn, K., Über ein Existenzproblem der Hydrodynamik 155

Mehmke, R., Zur Geometrie der Polygone, Polyeder und Polytope in linearen Räumen beliebiger Stufe bei euklidischer und nichteuklidischer Maßbestimmung 405

Meyer-König, W., Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. I. . . . 447

Meyer-König, W., Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. II. . . 479

Meyer-König, W., Über einige Sätze aus der Reihenlehre 751

Obreschkoff, N., Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen 747

Paetz, G., Differentialgeometrie der Kugelkomplexe 669

Palamà, G., Sulla trasformazione di Laplace e su alcuni sviluppi in serie di polinomi di Laguerre 97

Perron, O., Über Bruwiersche Reihen 127

Rádl, F., Über die Teilbarkeitsbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialpolynomen 429

Rádl, F., Über die Teilbarkeit des gewöhnlichen Differentialpolynoms dritter Ordnung durch ein ähnliches Polynom zweiter Ordnung 719

Reisch, P., Periodische Lösungen des ebenen Dreikörperproblems in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckslösung 289

Sauer, R., Metrische Fragen der Gewebegeometrie 265

Schmidt, F. K., Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern 62

Schmidt, F. K., Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. II. Allgemeine Theorie der Weierstraßpunkte 75

Söhngen, H., Die Lösungen der Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x-\xi}\, d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie 245

Sprague, R., Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate 607

Steck, M., Ein Minimalmodell einer endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie und die Unabhängigkeit der beiden schwachen Stetigkeitsaxiome von den Inzidenzaxiomen 609

Sundaram, S. M., On Generalised Tauberian Theorems 495

Wecken, F., Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen 377

Wielandt, H., Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen 209

Wittich, H., Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen 642

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

VI. Der allgemeine Diskriminantensatz. Unverzweigte Ringerweiterungen[1]).

Von

W. Krull in Erlangen.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ sei ein endlicher algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{K}$ vom Grade n, $\mathfrak{S}$ sei ein ganz abhängiger Oberring[2]) von $\mathfrak{R}$ mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{L}$. Unter $\mathfrak{p}$ verstehen wir ein festes $\mathfrak{R}$-Primideal, unter $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ die über $\mathfrak{R}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale, also diejenigen $\mathfrak{S}$-Primideale, die mit $\mathfrak{R}$ den Durchschnitt $\mathfrak{p}$ haben. Der Quotientenkörper Λ_i des Restklassenringes $\mathfrak{S}/\mathfrak{q}_i$ kann als Oberkörper des Quotientenkörpers K des Restklassenringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ aufgefaßt werden. Mit n_i^* bezeichnen wir den „reduzierten Grad" von Λ_i über K (oder, wie wir auch sagen wollen, den reduzierten Grad von $\mathfrak{q}_i$ über $\mathfrak{p}$), d. h. den Grad, den der größte über K separable Unterkörper Λ_i^* von Λ über K besitzt. — Andererseits nennen wir den Ring $\mathfrak{S}$ „hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt", wenn in $\mathfrak{S}$ die Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ so bestimmt werden können, daß die (über $\mathfrak{K}$ gebildete) Diskriminante $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört. — Der *„allgemeine Diskriminantensatz"*, dessen Beweis das Hauptziel der ersten drei Paragraphen unseres Beitrags ist, lautet nun:

$\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, wenn die Summe der reduzierten Grade der über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale $\mathfrak{q}_i$ gleich dem Relativgrad von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ ist, $n = n_1^* + \ldots + n_s^*$. — Ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ nicht unverzweigt, so ist stets $n_1^* + \ldots + n_s^* < n$[3]).

---

[1]) Die Grundvoraussetzungen sind in Beitrag VI ähnliche wie in Beitrag III [Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 745—766]. Die drei ersten Primidealsätze von Beitrag III werden stillschweigend benutzt. Im übrigen ist Beitrag VI von den vorangegangenen Beiträgen im wesentlichen unabhängig. Mit der Bewertungstheorie hat Beitrag VI nichts zu tun.

[2]) Es soll also jedes Element von $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen. Dagegen braucht $\mathfrak{S}$ (anders als $\mathfrak{R}$) keineswegs ganz abgeschlossen zu sein.

[3]) Zur Begründung dieser Fassung des allgemeinen Diskriminantensatzes, die von der üblichen Formulierung des Diskriminantensatzes der Hauptordnungen der endlichen algebraischen Zahlkörper stark abweicht, vgl. die in § 3 im Anschluß an Satz 5 gemachten Bemerkungen!

Für den Fall, daß $\mathfrak{R}$ einen Z. P. I.-Ring darstellt, in dem jedes Ideal das eindeutige Produkt endlich vieler Primideale ist, wurde der Diskriminantensatz (in etwas anderer Fassung) zuerst von E. Noether bewiesen[4]). Bei unserem allgemeinen Beweis stützen wir uns ebenso wie E. Noether auf die Theorie der kommutativen hyperkomplexen Systeme über einem Körper K, wobei K bei den Anwendungen mit dem Quotientenkörper des Restklassenringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ identifiziert wird. Während aber E. Noether nur den (in § 1 unseres Beitrags neu und kurz hergeleiteten) Diskriminantensatz der kommutativen hyperkomplexen Systeme benutzt, brauchen wir, um über den Noetherschen Spezialfall hinauszukommen, außerdem einige einfache Hilfssätze über „primitive Elemente" in kommutativen hyperkomplexen Systemen. Für die Gültigkeit dieser Hilfssätze, die in § 2 bewiesen werden, ist allerdings die Voraussetzung wesentlich, daß der Körper K unendlich viele Elemente enthält. Aber diese „Unendlichkeitsbedingung" ist unbedenklich. Sollte sie nämlich nicht von vornherein erfüllt sein, so kann man ihre Gültigkeit dadurch erzwingen, daß man von den Ringen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ zu den Polynomringen $\mathfrak{R}[u]$, $\mathfrak{S}[u]$ in einer Unbestimmten u übergeht. (Kronecker-Hilbertsche Unbestimmtenmethode; ganz elementare Überlegungen). — Aus der Theorie der ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche brauchen wir bei dem endgültigen Beweis des allgemeinen Diskriminantensatzes in § 3 nur den berühmten „Satz von Kronecker".

§ 4 bringt Verschärfungen des allgemeinen Diskriminantensatzes unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}$ „hinsichtlich $\mathfrak{R}$", d. h. hinsichtlich jedes $\mathfrak{R}$-Primideals $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist. — $\mathfrak{S}$ ist in diesem Falle stets ganz abgeschlossen; es gilt für jedes beliebige $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$, und es ist jedes $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ gleich dem Durchschnitt der darüberliegenden $\mathfrak{S}$-Primideale. Auch für die zu einem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale gilt ein entsprechender Satz, und besonders einfache Verhältnisse liegen vor, wenn der Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{S}$ über dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ normal ist.

§ 5 beschäftigt sich mit einer Frage, die für diejenigen Ringe charakteristisch ist, in denen — anders als in dem von E. Noether betrachteten Spezialfall — zwei verschiedene Primideale nicht immer teilerfremd sind. Es sei in $\mathfrak{R}$ das Primideal $\mathfrak{p}'$ Oberideal des Primideals $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ bzw. $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{s'}$ seien die über $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}'$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Primidealen $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}'_k$? Das Hauptergebnis, das in dieser Hinsicht gewonnen wird, lautet:

---

[4]) Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers. J. f. Math. **157** (1926), S. 82—104.

Es sei $\mathfrak{S}$ hinsichtlich des größeren Primideals $\mathfrak{p}'$ unverzweigt, und es ei außerdem das kleinere Primideal $\mathfrak{p}$ „hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ nichtsingulär“ [5]), h. es sei derjenige Ring ganz abgeschlossen, den man erhält, wenn man ı dem durch $\mathfrak{p}'$ bestimmten Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ [6]) den Restlassenbereich nach dem Erweiterungsideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ des Primideals $\mathfrak{p}$ bildet. ann enthält jedes der über $\mathfrak{p}'$ liegenden Primideale $\mathfrak{q}_k'$ immer nur ein nziges über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal $\mathfrak{q}_i$.

Besonders bemerkenswert an diesem Satz ist die Tatsache, daß für eine Allgemeingültigkeit nicht nur die Unverzweigtheit von $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{p}'$, ndern auch die Nichtsingularität von $\mathfrak{p}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ eine notwendige oraussetzung ist.

In § 6 wird der Begriff der Unverzweigtheit auf den Fall ausgedehnt, aß der Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{S}$ über dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ gebraisch von unendlich hohem Grade ist. Es wird gezeigt, daß die Theorie er „separablen Grundkörpererweiterung“, wie sie z. B. für den Spezialfall er Polynomringe von van der Waerden [7]) entwickelt wurde, ohne weiteres ı die allgemeine Theorie der unverzweigten Oberringe eingeordnet werden ann.

§ 1.

Grundlagen. Der Noethersche Diskriminantensatz [4]).

Es sei K ein beliebiger Körper, Λ sei ein kommutativer Oberring von K, nd zwar soll Λ über K den endlichen Rang n besitzen, es soll also in Λ genau n, ber nicht mehr über K linear unabhängige Elemente geben. Es bilden dann gendwelche n über K linear unabhängige Λ-Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ stets ne (minimale Modul-) Basis von Λ über K, es läßt sich also jedes beliebige -Element α eindeutig in der Form $\alpha = c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n$ darstellen [8]). ilden wir zu dem Λ-Element α mit Hilfe einer beliebigen Basis $\omega_1, \ldots, \omega_n$ as Gleichungssystem $\alpha \cdot \omega_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\omega_k$, so folgt aus elementaren Deter-

---

[5]) Die Definition der „Nichtsingularität von $\mathfrak{p}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}'$“ kann durch geoetrische Überlegungen plausibel gemacht werden: Es sei z. B. $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}[x, y]$ der olynomring in zwei Variablen x, y über dem Körper $\mathfrak{K}$ aller komplexen Zahlen, und mögen x, y als affine Koordinaten in der Ebene gedeutet werden. Dann sieht man ühelos: Der durch das Primideal $\mathfrak{p}'$ bestimmte Ebenenpunkt ist dann und nur dann r die durch das Primideal $\mathfrak{p}$ bestimmte ebene Kurve nichtsingulär, wenn $\mathfrak{p}$ im Sinne nserer Definition hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ nichtsingulär ist.

[6]) Also der Ring aller Quotienten $\frac{a}{b}$ (a, b in $\mathfrak{R}$, b nicht in $\mathfrak{p}'$).

[7]) Vgl. z. B.: Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems. Math. Annalen) (1928), S. 497—541; § 5.

[8]) Mit griechischen Buchstaben bezeichnen wir beliebige Elemente aus Λ, mit teinischen solche aus K.

minantensätzen, daß die Diagonalgliedersumme $c_{11} + \ldots + c_{nn} = S(\alpha)$ nur von α, nicht aber von der speziellen Wahl der ω_i abhängt. $S(\alpha)$ heißt die „*Spur*" des Elementes α. Aus der Definition der Spur folgt sofort: $S(\alpha + \beta) = S(\alpha) + S(\beta)$; $S(c \cdot \alpha) = c \cdot S(\alpha)$.

Unter der „*Diskriminante*" $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von n beliebigen Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ versteht man die Spurendeterminante $|S(\alpha_i \cdot \alpha_k)|$ $(i, k = 1, \ldots, n)$. Sind die Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_n$ mit den Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch das Gleichungssystem $\beta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k (i = 1, \ldots, n)$ verknüpft, so wird offenbar $\Delta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = |a_{ik}|^2 \cdot \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Aus dieser Bemerkung ergibt sich weiter: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ über K linear abhängig, so wird stets $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Ist $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n) \neq 0$ (bzw. $= 0$) für eine beliebige Basis $\omega_1, \ldots, \omega_n$, so ist auch $\Delta(\omega_1', \ldots, \omega_n') \neq 0$ (bzw. $= 0$) für jede andere Basis $\omega_1', \ldots, \omega_n'$. — Unter diesen Umständen wollen wir kurz sagen, „es besitze Λ über K eine von 0 verschiedene Diskriminante oder nicht", je nachdem ob $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n) \neq 0$ wird für eine beliebige Basis $\omega_1, \ldots, \omega_n$ oder nicht.

Ist Λ nullteilerfrei, so ist Λ ein algebraischer Oberkörper von K vom Grade n. Verstehen wir in diesem Falle unter $\alpha^{(1)} = \alpha, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ die Relativkonjugierten des Elementes α über K, so gelten bekanntlich die Formeln:

$$S(\alpha) = \alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(n)}, \quad \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = |\alpha_i^{(k)}|^2 \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Aus der Definition der Diskriminante mit Hilfe des Quadrates der Konjugiertendeterminante folgt sofort:

Die Diskriminante des Körpers Λ über K ist dann und nur dann von 0 verschieden, wenn Λ über K separabel ist.

Im allgemeinen Fall besitzt Λ eine direkte Summenzerlegung $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_s$, bei der die Λ_i „primäre (Nullteiler-) Ringe" sind, die außer den Einheiten nur nilpotente Elemente enthalten. Nennen wir wie üblich Λ „*halbeinfach*", wenn Λ kein echtes nilpotentes Element enthält, so ergibt sich sofort:

Λ ist dann und nur dann halbeinfach, wenn die Komponentenringe Λ_i nullteilerfrei und damit Körper sind. Verstehen wir unter ε_i das Einheitselement von Λ_i, so gelten die Gleichungen

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \varepsilon_i & i = k \end{cases}, \quad 1 = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_s, \quad \alpha = \alpha \cdot \varepsilon_1 + \ldots + \alpha \cdot \varepsilon_s.$$

Die Menge aller Elemente der Form $a \cdot \varepsilon_i$ bildet einen zu K isomorphen Unterkörper K_i von Λ_i, und es besitzt Λ_i über K_i einen endlichen Rang m_i. *Offenbar wird* $n = m_1 + \ldots + m_s$. Bilden die Elemente $\omega_{i1}, \ldots, \omega_{im_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ jeweils eine Basis von Λ_i über K_i, so bildet das Gesamtsystem $\omega_{11}, \ldots, \omega_{sm_s}$ eine Basis von Λ über K. Legen wir diese Basis der

Spurenberechnung zugrunde, so ergibt sich leicht aus den Gleichungen $\alpha \cdot \omega_{ik} = (\alpha \cdot \varepsilon_i) \cdot \omega_{ik}$ [9]):

Es wird stets $S(\alpha) = S(\alpha \cdot \varepsilon_1) + \ldots + S(\alpha \cdot \varepsilon_s)$. — $S(\alpha \cdot \varepsilon_i) \cdot \varepsilon_i$ *ist die Spur des* Λ_i*-Elements* $\alpha \cdot \varepsilon_i$ *über dem Körper* K_i.

Beachtet man ferner die Gleichungen $\omega_{ik} \cdot \omega_{lk} = 0$ $(i \neq l)$, so erhält man für die Diskriminante des Systems $\omega_{11}, \ldots, \omega_{sm_s}$ die Darstellung: $\Delta(\omega_{11}, \ldots, \omega_{sm_s}) = \prod_{i=1}^{s} |S(\omega_{ik} \cdot \omega_{il})|$ $(k, l = 1, \ldots, m_i)$. — Andererseits ist $|S(\omega_{ik} \cdot \omega_{il})| \cdot \varepsilon_i = |S(\omega_{ik} \cdot \omega_{il}) \cdot \varepsilon_i|$ $(k, l = 1, \ldots, m_i)$ offenbar die Diskriminante der Λ_i-Basis $\omega_{i1}, \ldots, \omega_{im_i}$ über K_i. Aus diesen Bemerkungen folgt sofort:

Die Diskriminante von Λ *über* K *ist dann und nur dann von* 0 *verschieden, wenn für jedes* i *die Diskriminante von* Λ_i *über* K_i *von* 0 *verschieden ist.*

Es sei ferner $\mathfrak{m}$ das Ideal aller nilpotenten Elemente von Λ, und es sei der Exponent ϱ so bestimmt, daß $\mathfrak{m}^{\varrho-1} \neq (0)$, $\mathfrak{m}^{\varrho} = (0)$ ist[10]). Dann gibt es stets eine Basis $\psi_{11}, \ldots, \psi_{\varrho k_\varrho}$ von Λ über K, bei der die Elemente $\psi_{i_1}, \ldots, \psi_{ik_i}$ $(i = 1, \ldots, \varrho)$ für sich genommen jeweils eine Basis von $\mathfrak{m}^{i-1}$ modulo $\mathfrak{m}^i$ bilden ($\mathfrak{m}^0 = \Lambda$!). Ist nun ν irgendein nilpotentes Element aus Λ, so wird offenbar $\nu \cdot \psi_{il} = \sum_{\sigma=i+1}^{\varrho} \sum_{\tau=1}^{k_\sigma} l_{il;\,\sigma\tau}\, \psi_{\sigma\tau}$ $(i < \varrho)$, $\nu \cdot \psi_{\varrho l} = 0$ für jedes in Betracht kommende l, und daraus ergibt sich unmittelbar:

Die Spur eines nilpotenten Elementes ν *ist stets gleich* 0 [11]).

Enthält nun Λ ein echtes nilpotentes Element ν, so gibt es auch eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_n$ von Λ mit $\omega_n = \nu$, und für diese Basis muß $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ werden, weil sowohl die letzte Zeile als auch die letzte Spalte von $|S(\omega_i \cdot \omega_k)|$ nur aus Nullen besteht. Das heißt aber:

Ist die Diskriminante von Λ über K von 0 verschieden, so ist Λ notwendig halbeinfach.

Der halbeinfache Ring $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_s$ möge „*separabel*" heißen, wenn für jedes i der Körper Λ_i über dem Unterkörper $\mathsf{K}_i = \mathsf{K} \cdot \varepsilon_i$ separabel ist. Dann lautet der „*Noethersche Diskriminantensatz*":

---

[9]) Zu den folgenden Formeln für Spur und Diskriminante vgl. Noether[4]), § 5. (Der von E. Noether benutzte Begriff der „Darstellungsklasse" ist — trotz seiner Wichtigkeit für die Darstellungstheorie — bei der Ableitung des Diskriminantensatzes überflüssig).

[10]) Die Existenz des Exponenten ϱ folgt natürlich aus der Tatsache, daß Λ über dem Körper K eine endliche Basis besitzt!

[11]) Die Ableitung dieses Satzes im Text ist grundsätzlich dieselbe wie bei Noether[4]), S. 97. Die Noethersche Darstellung ist nur dadurch kompliziert, daß die Behandlung eines beliebigen Systems Λ zunächst auf die eines Systems Λ^* mit algebraisch abgeschlossenem Ausgangskörper K^* zurückgeführt wird, obwohl diese Reduktion nirgends eine nennenswerte Beweiserleichterung bedeutet.

Satz 1. *Der Ring Λ besitzt dann und nur dann über dem Ausgangskörper K eine nichtverschwindende Diskriminante, wenn er halbeinfach und separabel ist.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den bereits abgeleiteten Hilfssätzen. — Um Satz 1 eine zweite, für spätere Anwendungen zweckmäßigere Fassung zu geben, führen wir einige neue Bezeichnungen ein. Es sei (bei beliebigem Λ) $\mathfrak{m}_i$ das Primideal aller nilpotenten Elemente in dem primären Ringe Λ_i; dann ist der Restklassenring $\bar{\Lambda}_i = \Lambda_i/\mathfrak{m}_i$ ein algebraischer Oberkörper von K_i [12]), dessen Relativgrad n_i auch kurz als der „Grad von Λ_i" bezeichnet werden möge. Der Grad n_i ist nie größer als der Rang m_i von Λ_i, und es ist nur dann $n_i = m_i$, wenn $\mathfrak{m}_i = (0)$, also Λ_i ein Körper ist. — Der Körper Λ_i enthält einen eindeutig bestimmten größten über K_i separablen Unterkörper $\bar{\Lambda}_i^*$; der Relativgrad n_i^* von $\bar{\Lambda}_i^*$ über K_i soll kurz „*reduzierter Grad von Λ_i*" heißen. Es ergibt sich dann sofort:

Die Summe $n_1^* + \ldots + n_s^*$ der reduzierten Grade der Komponentenringe Λ_i ist nie größer als der Rang n des Gesamtringes Λ. — Es ist dann und nur dann $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$, wenn Λ halbeinfach und separabel ist.

Satz 1′. *Die Diskriminante von Λ über K ist dann und nur dann von 0 verschieden, wenn die Summe der reduzierten Grade der primären Komponentenringe Λ_i gleich dem Range von Λ ist.*

§ 2.

Vier Hilfssätze.

Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie in § 1. Das Λ-Element α soll (über K) „*primitiv*" heißen, wenn α über K keiner Gleichung von niedrigerem als n-tem Grade genügt, wenn also die Elemente $\alpha^0 = 1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ eine Basis von Λ bilden.

Hilfssatz 1. *Ist K kein endlicher Körper, und ist Λ halbeinfach und separabel, so gibt es in Λ stets primitive Elemente* [13]).

Es sei wie früher $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_s$; unter $g(x \cdot \varepsilon_i)$ möge ein Polynom über K_i, unter $g(x)$ das zugeordnete Polynom über K verstanden werden. Dann kann man unter unseren Voraussetzungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ so bestimmen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: a) α_i ist ein primitives Element

[12]) Eigentlich Oberkörper von $\mathsf{K}_i/(\mathfrak{m}_i \cap \mathsf{K}_i)$. Aber K_i und $\mathsf{K}_i/(\mathfrak{m}_i \cap \mathsf{K}_i)$ können wegen $\mathfrak{m}_i \cap \mathsf{K}_i = (0)$ unmittelbar identifiziert werden.

[13]) Wir fassen uns bei den Beweisen der Hilfssätze 1 und 2 so kurz wie möglich, weil die Grundgedanken dieser Beweise im Kerne schon bei Dedekind zu finden sind. (Über die Diskriminanten endlicher Körper. Göttinger Nachrichten 1882, S. 1—56.) Vgl. im übrigen: A. Helms, Ein Beitrag zur algebraischen Geometrie. Math. Annalen **111** (1935), S. 438—458, § 2. Dort wird ein den Hilfssätzen 1 und 2 ähnlicher, in gewisser Hinsicht sogar schwierigerer Satz ausführlich hergeleitet.

von Λ_i über K_i. b) Bedeutet $g(x \cdot \varepsilon_i)$ das über K_i irreduzible Polynom n_i^*-ten Grades mit der Nullstelle α_i $(i = 1, \ldots, s)$, so sind die Polynome $g_1(x), \ldots, g_s(x)$ paarweise teilerfremd. — Setzt man nun $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$, so muß jedes Polynom $f(x)$ mit der Nullstelle α wegen $f(\alpha_i) = f(\alpha \cdot \varepsilon_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ durch $g_1(x) \cdot \ldots \cdot g_s(x)$ teilbar sein; wegen $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$ ist daher α notwendig primitiv.

Hilfssatz 2. *Ist K kein endlicher Körper, und ist Λ nicht gleichzeitig halbeinfach separabel, ist also $n_1^* + \ldots + n_s^* < n$, so gibt es in Λ stets ein Element α, das über K keiner Gleichung von niedrigerem als $(n_1^* + \ldots + n_s^* + 1)$-tem Grade genügt.*

Der Beweis erfolgt nach denselben Richtlinien wie der von Hilfssatz 1. Man braucht nur die folgenden Bemerkungen: a) Es sei wie früher $\mathfrak{m}_i$ das Primideal aller nilpotenten Elemente aus Λ_i, $\bar{\Lambda}_i = \Lambda_i/\mathfrak{m}_i$. Ist dann α_i ein Element aus Λ_i, dessen zugehörige Restklasse $\bar{\alpha}_i$ aus $\bar{\Lambda}_i$ eine Nullstelle des über K_i irreduziblen Polynoms $g(x \cdot \varepsilon_i)$ darstellt, so ist jedenfalls $g(\alpha_i)^\lambda = 0$ für hinreichend großes λ, und daraus ergibt sich sofort: Ein beliebiges Polynom $f(x)$ mit der Nullstelle α_i ist stets durch $g(x)$ teilbar; ist $g(\alpha_i) \neq 0$, so muß $f(x)$ sogar durch $g(x)^2$ teilbar sein. — b) Ist $\bar{\Lambda}_i$ inseparabel über K_i und etwa von der Charakteristik p, so gibt es nach Steinitz in $\bar{\Lambda}_i$ stets ein Element $\bar{\alpha}$, das über K_i keiner Gleichung von niedrigerem als $p \cdot n_i^*$-tem Grade genügt. — c) Ist $g(x \cdot \varepsilon_i)$ ein über K_i separables Polynom mit der Nullstelle $\alpha_i = \alpha_i \cdot \varepsilon_i$, und bedeutet ν_i irgendein echtes nilpotentes Element aus Λ_i, so wird stets $g(\alpha_i + \nu_i) = \nu_i \cdot (g'(\alpha_i) + \nu_i \cdot r(\alpha_i)) \neq 0$.

Es sei nun K ein ganz beliebiger, nicht notwendig unendlicher Körper, $\mathsf{K}^{(u)} = \mathsf{K}(u)$ bedeute den stets unendlichen Körper aller Polynomquotienten $\frac{z(u)}{n(u)}$ in einer Unbestimmten u über K, und es werde $\Lambda^{(u)} = \mathsf{K}^{(u)} \cdot \Lambda$ gesetzt. Dann ist jedenfalls $\Lambda^{(u)}$ ein Oberring von $\mathsf{K}^{(u)}$ vom Range n, und es wird $\Lambda^{(u)} = \Lambda_1^{(u)} + \ldots + \Lambda_s^{(u)}$, wobei $\Lambda_i^{(u)} = \varepsilon_i \cdot \Lambda^{(u)}$ einen Ring vom Range m_i über dem zu $\mathsf{K}^{(u)}$ isomorphen Körper $\mathsf{K}_i^{(u)} = \varepsilon_i \cdot \mathsf{K}^{(u)}$ darstellt. — Was ferner das Aussehen von $\Lambda_i^{(u)}$ angeht, so zeigt man mühelos: Ein nicht zu $\mathfrak{m}_i^{(u)} = \mathfrak{m}_i \cdot \mathsf{K}^{(u)}$ gehöriges Element ist in $\Lambda_i^{(u)}$ stets Einheit; die Elemente von $\mathfrak{m}_i^{(u)}$ sind alle nilpotent[14]). $\bar{\Lambda}_i^{(u)} = \Lambda_i^{(u)}/\mathfrak{m}_i^{(u)}$ ist isomorph zum Körper $\bar{\Lambda}_i(u)$ aller Polynomquotienten in u über $\bar{\Lambda}_i = \Lambda_i/\mathfrak{m}_i$. — Es besitzt also insbesondere $\Lambda_i^{(u)}$ (über $\mathsf{K}_i^{(u)}$) denselben Grad n_i und denselben reduzierten Grad n_i^* wie Λ_i (über K_i). Außerdem ist $\Lambda_i^{(u)}$ dann und nur dann ein Körper, wenn Λ_i einer ist. — Aus diesen Bemerkungen und den Hilfssätzen 1 und 2 folgt sofort:

---

[14]) Vgl. hierzu etwa: W. Krull, Algebraische Theorie der Ringe I. Math. Annalen 88 (1922), S. 80—122, § 6.

Hilfssatz 3. *Ist Λ halbeinfach und separabel, so gibt es in $\Lambda^{(u)}$ stets primitive Elemente über $\mathsf{K}^{(u)}$. — Im anderen Falle gibt es in $\Lambda^{(u)}$ stets ein Element α, das über $\mathsf{K}^{(u)}$ keiner Gleichung von niedrigerem als $(n_1^* + \ldots + n_s^* + 1)$-tem Grade genügt.*

Hilfssatz 2 und der zweite Teil von Hilfssatz 3 gelten, wie unmittelbar aus der Art der Beweise zu sehen, auch dann, wenn Λ über K keinen endlichen Rang besitzt, sofern Λ als direkte Summe von endlich vielen primären Nullteilerringen $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ darstellbar ist, wobei jeder Λ_i über K_i einen endlichen reduzierten Grad n_i^* hat. Ist andererseits (für $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_s$) bei einem der Ringe Λ_i der reduzierte Grad über K_i unendlich groß, so gibt es offenbar zu jeder ganzen Zahl N in Λ ein α, das über K keiner Gleichung von niedrigerem als N-tem Grade genügt. — Für die Anwendung des Hilfssatzes 1 und der ersten Hälfte von Hilfssatz 3 ist die folgende Bemerkung von Wichtigkeit:

Hilfssatz 4. *Es sei α ein primitives Element aus Λ, und es sei $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ die eindeutig bestimmte Gleichung n-ten Grades, der α über K genügt. Dann ist die Diskriminante $\Delta(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}) = \Delta(\alpha)$ ein durch den Rang n von Λ allein eindeutig bestimmtes ganzzahliges Polynom*[15]) *in $a_1, \ldots, a_n$.*

Die Richtigkeit von Hilfssatz 4 ergibt sich sofort aus der fast selbstverständlichen Tatsache, daß in jeder der Gleichungen $\alpha^i \cdot \alpha^k = \sum_{l=0}^{n-1} c_{ikl}\,\alpha^l$ $(0 \leqq i \leqq n-1;\ 0 \leqq k \leqq n-1)$ die Koeffizienten c_{ikl} ganzzahlige Polynome in $a_1, \ldots, a_n$ darstellen, die durch n und die Indizes i, k, l eindeutig bestimmt sind. — Natürlich ist $\Delta(\alpha)$ gleich der Diskriminante des Polynoms $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ im elementaren Sinne des Wortes; aber das ist für unsere weiteren Betrachtungen nebensächlich.

§ 3.

Der Diskriminantensatz für ganz abgeschlossene Integritätsbereiche.

Es sei jetzt $\mathfrak{R}$ ein beliebiger ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ sei ein algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{K}$ vom endlichen Grade n, $\mathfrak{S}$ bedeute einen ganz abhängigen Oberring von $\mathfrak{R}$ mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ [2]). Mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen wir ein festes Primideal aus $\mathfrak{R}$, mit $\mathfrak{q}$ das Erweiterungsideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$. Die endlich vielen in $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$. Bei den folgenden Betrachtungen können und wollen wir ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ maximal

[15]) Also ein Polynom, dessen Koeffizienten ganzzahlige Vielfache des Einheitselementes sind.

annehmen [16]). Das Ideal $\mathfrak{q}$ besitzt dann eine Produktzerlegung $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_s$, bei der die paarweise teilerfremden Primärideale $\mathfrak{a}_i$ zu den Primidealen $\mathfrak{q}_i$ gehören; der Restklassenring $\mathsf{K} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ wird ein Körper, und der Oberring $\Lambda = \mathfrak{S}/\mathfrak{q}$ von K besitzt eine direkte Summenzerlegung $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_s$, bei der der primäre Nullteilerring Λ_i zum Restklassenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_i$, der Körper $\Lambda_i/\mathfrak{m}_i$ zum Restklassenkörper $\mathfrak{S}/\mathfrak{q}_i$ isomorph ist. Der Grad n_i von Λ_i im Sinne von § 1 ist gleich dem *Grad des Primideals* $\mathfrak{q}_i$ im üblichen Sinne, und in entsprechender Weise kann der reduzierte Grad n_i^* von Λ_i auch als *reduzierter Grad von* $\mathfrak{q}_i$ bezeichnet werden.

Unter $\mathfrak{R}^{(u)} = \mathfrak{R}(u)$ verstehen wir den Körper aller Polynomquotienten in einer Unbestimmten u über $\mathfrak{R}$, unter $\mathfrak{L}^{(u)}$ den algebraischen Oberkörper n-ten Grades $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{R}^{(u)}$ von $\mathfrak{R}^{(u)}$. In $\mathfrak{R}^{(u)}$ zeichnen wir den ganz abgeschlossenen Ring $\mathfrak{R}^{(u)}$ aller der Polynomquotienten $\frac{z(u)}{n(u)}$ aus, bei denen die Koeffizienten von $z(u)$ und $n(u)$ alle zu $\mathfrak{R}$, die von $n(u)$ aber nicht alle zu $\mathfrak{p}$ gehören. Schließlich setzen wir $\mathfrak{S}^{(u)} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}^{(u)}$, $\mathfrak{p}^{(u)} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}^{(u)}$, $\mathfrak{q}^{(u)} = \mathfrak{p}^{(u)} \cdot \mathfrak{S}^{(u)} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}^{(u)}$. — Man sieht dann sofort:

$\mathfrak{p}^{(u)}$ ist das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}^{(u)}$. Der Restklassenkörper $\mathsf{K}^{(u)} = \mathfrak{R}^{(u)}/\mathfrak{p}^{(u)}$ ist isomorph zum Körper aller Polynomquotienten in u über K, der Restklassenring $\Lambda^{(u)} = \mathfrak{S}^{(u)}/\mathfrak{q}^{(u)}$ ist isomorph zum Ringe $\Lambda \cdot \mathsf{K}^{(u)}$. Unter diesen Umständen folgt aber nach § 2:

Die über $\mathfrak{p}^{(u)}$ liegenden $\mathfrak{S}^{(u)}$-Primideale $\mathfrak{q}_i^{(u)}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primidealen $\mathfrak{q}_i$.

Der Grad (reduzierte Grad) von $\mathfrak{q}_i^{(u)}$ ist stets gleich dem Grad (reduzierten Grad) des zugeordneten $\mathfrak{q}_i$. Es ist dann und nur dann $\mathfrak{q}^{(u)} = \mathfrak{q}_1^{(u)} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_s^{(u)}$, wenn die Gleichung $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_s$ gilt. — Natürlich sind diese Bemerkungen nur für den Fall wichtig, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{R}/\mathfrak{p} = \mathsf{K}$ endlich ist. Von allgemeiner Bedeutung dagegen ist

Hilfssatz 5. *Ein beliebiges Element $\overline{\alpha}$ aus Λ genügt über dem Körper K stets einer Gleichung höchstens n-ten Grades.*

In der Tat, es sei α ein beliebiges Element aus der Restklasse $\overline{\alpha}$, und es sei $\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \ldots + a_m = 0$ die normierte [17]) Gleichung niedrigsten Grades, der α über $\mathfrak{R}$ genügt. Dann ist $m \leqq n$, und aus der Tatsache, daß α

---

[16]) Ist $\mathfrak{p}$ nicht von vornherein in $\mathfrak{R}$ maximal, so hat man den Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ zu bilden, und von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ überzugehen. Die für das maximale $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$-Primideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ und für die darüber liegenden $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$-Primideale $\mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ geltenden Sätze können dann unmittelbar auf das $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ und die darüberliegenden $\mathfrak{S}$-Primideale $\mathfrak{q}_i$ übertragen werden. (Eine Ausnahme macht nur der auf die Zerlegung von $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ bezügliche Teil von Satz 3, sowie Satz 4, bei dem $\mathfrak{p}$ ausdrücklich maximal angenommen wird.)

[17]) Das Polynom $p(\alpha) = c_0 \alpha^m + c_1 \alpha^{m-1} + \ldots + c_m$ [die Gleichung $p(\alpha) = 0$] heißt „normiert", wenn $c_0 = 1$ ist.

von dem ganz abgeschlossenen Ringe $\mathfrak{R}$ ganz abhängt, folgt nach dem „Kroneckerschen Satz", daß die Elemente $a_1, \ldots, a_m$ alle in $\mathfrak{R}$ liegen. Durch Restklassenbildung nach $\mathfrak{q}$ erhält man nun sofort für $\bar{\alpha}$ über K die Gleichung $\bar{\alpha}^m + \bar{a}_1 \bar{\alpha}^{m-1} + \ldots + \bar{a}_m = \bar{0}$. — Mit Hilfe des (natürlich auch für $\Delta^{(u)}$ über $\mathsf{K}^{(u)}$ geltenden) Hilfssatzes 5 beweist man leicht:

Satz 2. *Die Summe $n_1^* + \ldots + n_s^*$ der reduzierten Grade der über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale $\mathfrak{q}_i$ ist nie größer als der Grad n von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{R}$.*

Satz 3. *Ist $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$, so ist Δ über K halbeinfach und separabel, es fallen also die Primärfaktoren $\mathfrak{a}_i$ von $\mathfrak{q}$ mit den Primidealen $\mathfrak{q}_i$ zusammen, und es sind die Körper $\mathfrak{S}/\mathfrak{q}_i$ separable Erweiterungen des Körpers $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$.*

In der Tat, ist K unendlich, so folgt die Richtigkeit der Sätze 2 und 3 unmittelbar aus Hilfssatz 2. Ist aber K endlich, so braucht man nur von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{R}^{(u)}$, $\mathfrak{S}^{(u)}$ überzugehen und die zweite Hälfte von Hilfssatz 3 anzuwenden. (Man beachte insbesondere die in § 2 im Anschluß an Hilfssatz 3 gemachten Bemerkungen!) — Der Ring $\mathfrak{S}$ möge „*hinsichtlich* $\mathfrak{p}$ *unverzweigt*" heißen, wenn in $\mathfrak{S}$ die Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ so bestimmt werden können, daß die (über $\mathfrak{R}$ gebildete) Diskriminante $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört. — Dann gilt zunächst:

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}$, und es sei $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt. Dann ist $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{L}$ ganz abgeschlossen, und es besitzt $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ eine Modulbasis von genau n linear unabhängigen Elementen.*

In der Tat, sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ irgendwelche von $\mathfrak{R}$ ganz abhängige Elemente aus $\mathfrak{L}$, so sind die Spuren $S(\alpha_i)$, wie unmittelbar aus ihrer Definition durch Konjugiertensummen zu ersehen, Elemente des ganz abgeschlossenen Ringes $\mathfrak{R}$, und es gehört daher auch $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ zu $\mathfrak{R}$. Sind also insbesondere $\omega_1, \ldots, \omega_n$ in $\mathfrak{S}$ so gewählt, daß $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ nicht in $\mathfrak{p}$ liegt, so wird unter unseren Voraussetzungen $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ eine Einheit aus $\mathfrak{R}$. — Es sei nun ω ein beliebiges Element aus $\mathfrak{S}$, und zwar sei $\omega = c_1 \omega_1 + \ldots + c_n \omega_n$, wobei die c_i Elemente aus $\mathfrak{R}$ bedeuten. Gehört dann etwa c_1 nicht zu $\mathfrak{R}$, so gehört auch $\Delta(\omega, \omega_2, \ldots, \omega_n) = c_1^2 \cdot \Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ nicht zu $\mathfrak{R}$, es kann also in diesem Falle ω nicht ganz von $\mathfrak{R}$ abhängen. Fertig! — Mit Rücksicht auf eine Anwendung in § 5 sei bereits jetzt hervorgehoben:

Zusatz zu Satz 4. *Satz 4 gilt immer, wenn in $\mathfrak{S}$ ein Elementsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$ existiert, für das $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n) = e$ eine Einheit aus $\mathfrak{R}$ wird, und zwar gilt der Satz sogar dann, wenn $\mathfrak{L}$ kein Körper, sondern die direkte Summe von endlich vielen Körpern $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_s$ ist.*

Es sei ε_i das Einheitselement von $\mathfrak{L}_i$, und es werde $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} \cdot \varepsilon_i$, $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} \cdot \varepsilon_i$ gesetzt. Ist dann α ein beliebiges von $\mathfrak{R}$ ganz abhängiges Element aus $\mathfrak{L}$, so hat man $S(\alpha) = S(\alpha \cdot \varepsilon_1) + \ldots + S(\alpha \cdot \varepsilon_s)$, und es hängt $\alpha \cdot \varepsilon_i$ von $\mathfrak{R}_i$ ganz ab. Da nun $\mathfrak{L}_i$ ein Körper und $\mathfrak{R}_i$ ganz abgeschlossen ist, muß die für das $\mathfrak{L}_i$-Element $\alpha \cdot \varepsilon_i$ über $\mathfrak{R}_i$ gebildete Spur, d. h. $S(\alpha \cdot \varepsilon_i) \cdot \varepsilon_i$, zu $\mathfrak{R}_i$

gehören. Aus $S(\alpha \cdot \varepsilon_i) \cdot \varepsilon_i \subset \mathfrak{R}_i\,(i = 1, \ldots, s)$ folgt aber $S(\alpha_i) \subset \mathfrak{R}\,(i = 1, \ldots, s)$, $S(\alpha) \subset \mathfrak{R}$. — Hängt also α von $\mathfrak{R}$ ganz ab, so gehört $S(\alpha)$ zu $\mathfrak{R}$. Nachdem dieses Ergebnis einmal gewonnen ist, kann man genau so weiterschließen wie beim Beweise des ursprünglichen Satzes 4.

Satz 5. *(Allgemeiner Diskriminantensatz.) Der Ring $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann hinsichtlich des Primideals $\mathfrak{p}$ unverzweigt, wenn die Summe $n_1^* + \ldots + n_s^*$ der reduzierten Grade der über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale $\mathfrak{q}_i$ gleich dem Grade n von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{R}$ ist.*

Der Beweis, bei dem wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen dürfen, daß $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}$ darstellt, zerfällt in drei Schritte:

a) Es sei $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, und es seien die Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ in $\mathfrak{S}$ so gewählt, daß $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört. Dann ist $\mathfrak{S}$ nach Satz 4 ganz abgeschlossen und es wird $\mathfrak{S} = \omega_1 \cdot \mathfrak{R} + \ldots + \omega_n \cdot \mathfrak{R}$, $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{q} = \omega_1 \cdot \mathfrak{p} + \ldots + \omega_n \cdot \mathfrak{p}$. Daraus folgt aber, wenn wir die Restklassenbildung nach $\mathfrak{q}$ durch einen Querstrich andeuten: Δ hat über K den Rang n, und es bilden die Elemente $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n$ eine Basis von Δ über K. Es wird $\Delta(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n) = \overline{\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)}$[18]) $\neq \bar{0}$. Nach dem Noetherschen Diskriminantensatz von § 1 gilt also die Gleichung $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$.

b) Es sei K kein endlicher Körper, und es sei $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$. Nach Satz 3 ist dann Δ halbeinfach und separabel und vom Range n über K. Nach Hilfssatz 1 von § 1 gibt es ferner in Δ ein primitives Element $\bar{\alpha}$, das über K keiner Gleichung von niedrigerem als n-tem Grade genügt, und es wird nach dem Noetherschen Diskriminantensatz $\Delta(\bar{\alpha}) \neq \bar{0}$. — Es sei nun $\bar{\alpha}^n + \bar{c}_1 \cdot \bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + \bar{c}_n = \bar{0}$ die eindeutig bestimmte Gleichung n-ten Grades für $\bar{\alpha}$ über K, und es sei α ein beliebiges Element aus der Restklasse $\bar{\alpha}$. Dann genügt α über $\mathfrak{R}$ einer eindeutig bestimmten Gleichung $\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, und wegen der doppelten Eindeutigkeit muß $\bar{c}_i = \bar{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sein. Aus Hilfssatz 4 folgt nun sofort $\overline{\Delta(\alpha)} = \Delta(\bar{\alpha}) \neq \bar{0}$, es kann also $\Delta(\alpha)$ nicht zu $\mathfrak{p}$ gehören. D. h.: Ist K unendlich, so ergibt sich aus der Gleichung $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$ stets die Unverzweigtheit von $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$.

c) Bei beliebigem K folgt aus der Gleichung $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$ nach b) jedenfalls die Existenz eines Elementes $\alpha^{(u)}$ aus $\mathfrak{S}^{(u)}$, für das die (hinsichtlich $\mathfrak{R}^{(u)}$ gebildete) Diskriminante $\Delta(\alpha^{(u)})$ nicht zu $\mathfrak{p}^{(u)}$ gehört. Dabei darf man offenbar $\alpha^{(u)}$ als Polynom in u annehmen. Es sei etwa $(\alpha^{(u)})^i = \sum_{l=0}^{N} \alpha_{il} u^l$, mit $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ mögen die Relativkonjugierten des $\mathfrak{L}$-Elements $\gamma = \gamma^{(1)}$ über $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden. Dann ist $\Delta(\alpha^{(u)}) = |\sum_{l=0}^{N} \alpha_{il}^{(k)} u^l|^2\,(i, k = 1, \ldots, n)$;

[18]) Bei $\Delta(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n)$ ist natürlich die Diskriminante über K, bei $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ über $\mathfrak{R}$ zu bilden!

es wird also $\Delta(\alpha^{(u)}) = (\sum_{l=0}^{M} \delta_l u^l)^2$, wobei jedes δ_l die Quadratwurzel aus der Diskriminante eines geeigneten $\mathfrak{S}$-Elementsystems darstellt: $\delta_l^2 = \Delta(\omega_{1l}, \ldots, \omega_{nl})$ $(l = 0, \ldots, M)$. — Es sei nun $\mathfrak{R}$ der kleinste $\mathfrak{L}$ umfassende Normalkörper über $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{T}$ der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{R}$, mit $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_t$ mögen die über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{T}$-Primideale bezeichnet werden. Wäre nun jedes δ_l in mindestens einem $\mathfrak{r}_i$ enthalten, so würde in $\Delta(\alpha^{(u)})$ jeder Koeffizient in mindestens einem $\mathfrak{r}_i$ und damit auch in $\mathfrak{r}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ liegen, d. h. wir hätten $\Delta(\alpha^{(u)}) \subset \mathfrak{p}^{(u)}$ gegen Voraussetzung. Es gibt also mindestens ein δ_{l^*}, das zu keinem einzigen $\mathfrak{r}_i$ gehört, und für das infolgedessen $\delta_{l^*}^2 = \Delta(\omega_{1\,l^*}, \ldots, \omega_{n\,l^*})$ eine nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörige Diskriminante darstellt. Fertig!

Es liegt nahe zu fragen, ob man nicht Satz 5 dadurch eine anschaulichere Fassung geben kann, daß man nicht von der Gleichung $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$, sondern von der Zerlegung des Ideals $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{S}$ ausgeht. Das ist indessen nicht der Fall. Denn auch wenn $\mathfrak{q}$ gleich dem Produkt der über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale $\mathfrak{q}_i$ ist, und wenn gleichzeitig die Körper $\mathfrak{S}/\mathfrak{q}_i$ alle über $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ separabel sind, kann, wie F. K. Schmidt gezeigt hat[19]), unter Umständen $n_1^* + \ldots + n_s^* < n$ sein. — Eine bemerkenswerte Anwendung von Satz 5 ist z. B.:

Satz 6. *Ist* $\mathfrak{p}$ *das einzige maximale Primideal von* $\mathfrak{R}$, *so kann nur dann* $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$ *werden, wenn* $\mathfrak{S}$ *ganz abgeschlossen ist.*

In der Tat, ist $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$, so ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt und infolgedessen nach Satz 4 ganz abgeschlossen.

§ 4.

Unverzweigte Oberringe.

Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie in § 3; doch gilt diesmal das Hauptinteresse gerade den in $\mathfrak{R}$ nicht maximalen Primidealen. Ist der Ring $\mathfrak{S}$ hinsichtlich jedes $\mathfrak{R}$-Primideals unverzweigt, so sagen wir kurz, es sei $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ unverzweigt. Bei den folgenden Betrachtungen setzen wir zunächst voraus, daß nicht nur $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ unverzweigt ist, sondern daß sogar in $\mathfrak{S}$ ein Elementsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$ existiert, für das $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n) = e$ eine Einheit aus $\mathfrak{R}$ darstellt. Am Schluß des Paragraphen wird dann kurz gezeigt, daß die gewonnenen Sätze für jeden unverzweigten Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ gelten.

Aus der Voraussetzung, daß $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ in $\mathfrak{R}$ Einheit ist, folgt nach dem Zusatz zu Satz 4, *daß* $\mathfrak{S}$ *ganz abgeschlossen sein muß*, und daß die Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine Modulbasis von $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ bilden.

---

[19]) Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 443—450. [Für unsere Zwecke kommt es nicht auf die Nichterhaltung der Kettensätze an, sondern auf die „Nichtgültigkeit der Gradgleichung (1)", vgl. insbesondere S. 449, Mitte.]

Aus $\mathfrak{S} = \omega_1 \cdot \mathfrak{R} + \ldots + \omega_n \cdot \mathfrak{R}$ ergibt sich weiter:

Satz 7. *Für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ gilt die Gleichung* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$.

Es sei nämlich $a = \sum_{i=1}^{N} a_i \alpha_i$ ($a_i \subset \mathfrak{a}$, $\alpha_i \subset \mathfrak{S}$) ein Element aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}$, nd es sei $1 = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k$; $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \omega_k$ $(i = 1, \ldots, N)$. Dann ist $\mathfrak{R} = (c_1, \ldots, c_n) \cdot \mathfrak{R}$, und wegen der linearen Unabhängigkeit der ω_k über $\mathfrak{R}$ nuß $a \cdot c_k = \sum_{i=1}^{N} a_i b_{ik} \subset \mathfrak{a}$ $(k = 1, \ldots, n)$ sein, woraus unmittelbar $a \subset \mathfrak{a}$ olgt.

Satz 8. *Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_s$ eine unverkürzbare Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{S} \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_s \cdot \mathfrak{S}$ eine solche von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$.*

In der Tat, es ist sicher $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{S} \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_s \cdot \mathfrak{S}$, und daß bei Weglassung einer Komponente $\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{S}$ ein echtes Oberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ entstehen nuß, zeigt Satz 7. Ist ferner $\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k$ ein Element von $\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{S} \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_s \cdot \mathfrak{S}$, o ist $c_k \subset \mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_s$ $(k = 1, \ldots, n)$ und damit $\alpha \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$. — Satz 8 st vor allem für die Ringe wichtig, in denen jedes Ideal als Durchschnitt von ndlich vielen Primäridealen dargestellt werden kann.

Satz 9. *Bezeichnen wir wie in § 3 mit $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ die über dem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale, so wird stets* $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$.

Wie beim Beweise von Satz 5 sei $\mathfrak{N}$ der kleinste $\mathfrak{L}$ enthaltende Normalörper über $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$ der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{R}$, nd wie damals seien $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_t$ die über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{T}$-Primideale. Dann at jedes $\mathfrak{r}_k$ mit $\mathfrak{S}$ eines der Primideale $\mathfrak{q}_i$ zum Durchschnitt; ist daher $\subset (\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s)$, so sind neben $\alpha = \alpha^{(1)}$ auch die Relativkonjugierten $^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ von α über $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{r}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{r}_t$ enthalten. Setzt man nun $\alpha = a_1\omega_1 + \ldots + a_n \omega_n$, so ergibt sich aus dem Gleichungssystem $\alpha^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k^{(i)}$ $i = 1, \ldots, n)$ sofort $a_k \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$; $\alpha \subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$. Fertig!

Zur Würdigung von Satz 9 sei bemerkt: Satz 9 ist keineswegs eine Folge es Satzes 3 von § 3. Aus Satz 3 ergibt sich nur, daß die isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ mit den über $\mathfrak{p}$ liegenden Primidealen $\mathfrak{q}_i$ identisch ind. Um aber zu beweisen, daß $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ gleich dem Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten wird, müssen wir wissen, daß $\mathfrak{S}$ nicht nur hinsichtlich $\mathfrak{p}$, sondern auch hinsichtlich jedes Primoberideals von $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist[20]).

[20]) Ich kenne allerdings kein Beispiel, bei dem $\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s \neq \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ wird, obwohl $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist. Aber mit der einfachen Methode des Textes ann die Gleichung $\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ jedenfalls nicht bewiesen werden, falls ein rimideal $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ existiert, hinsichtlich dessen $\mathfrak{S}$ verzweigt ist, und falls gleichzeitig er Ring $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ über dem Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ keine Basis von genau linear unabhängigen Elementen besitzt.

Es sei jetzt $\mathfrak{x}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal. Dann besitzt $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ ebenso wie $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ die minimalen Primoberideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$, es gehört also zu jedem der Primideale $\mathfrak{q}_i$ eine isolierte Primärkomponente $\mathfrak{y}_i$ von $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$.

Satz 10. a) *Es ist* $\mathfrak{y}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, s)$. b) *Es wird* $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{y}_s$.

Beweis. a) Ist $a \subset (\mathfrak{y}_i \cap \mathfrak{R})$, so gibt es in $\mathfrak{S}$ ein nicht zu $\mathfrak{q}_i$ gehöriges α, derart, daß $a \cdot \alpha \subset \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ wird. Setzt man $\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k$, so ist $a \cdot c_k \subset \mathfrak{x}$ $(k = 1, \ldots, n)$, und daraus folgt $a \subset \mathfrak{x}$, weil die c_k nicht alle zu $\mathfrak{p}$ gehören können. — b) Ist $\alpha \subset (\mathfrak{y}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{y}_s)$, so gibt es für jedes i ein nicht zu $\mathfrak{q}_i$ gehöriges β_i, für das $\alpha \cdot \beta_i \subset \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$. Wegen der endlichen Anzahl der $\mathfrak{q}_i$ folgt daraus die Existenz eines zu keinem einzigen $\mathfrak{q}_i$ gehörigen β, für das $\alpha \cdot \beta \subset \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ wird. Führt man wie bei Satz 9 den Ring $\mathfrak{T}$ und die Primideale $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_t$ ein, so ist klar, daß von den über $\mathfrak{R}$ konjugierten Elementen $\beta = \beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(n)}$ kein einziges in einem der Ideale $\mathfrak{r}_i$ enthalten sein kann, es muß daher $N(\beta)$, die Norm von β über $\mathfrak{R}$, ein nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges $\mathfrak{R}$-Element darstellen. Andererseits folgt aus $\alpha \cdot \beta \subset \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ sofort $\alpha \cdot N(\beta) \subset \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$. Ist nun $\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k$, so ergibt sich: $c_k \cdot N(\beta) \subset \mathfrak{x}$ $(k = 1, \ldots, n)$; $c_k \subset \mathfrak{x}$ $(k = 1, \ldots, n)$; $\alpha \subset \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ [21]).

Satz 11. *Es sei* $\mathfrak{L}$ *ein Normalkörper über* $\mathfrak{R}$, *und es sei* $\mathfrak{a}_s$ *ein „invariantes" $\mathfrak{S}$-Ideal, das bei allen Automorphismen von* $\mathfrak{L}$ *über* $\mathfrak{R}$ *in sich selbst übergeht. Dann ist* $\mathfrak{a}_s$ *stets Erweiterungsideal eines $\mathfrak{R}$-Ideals*: $\mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}_r \cdot \mathfrak{R}$.

Es sei nämlich $\alpha = \alpha^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k \subset \mathfrak{a}_s$. Dann ist wegen der Invarianzvoraussetzung $\alpha^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k^{(i)} \subset \mathfrak{a}_s$ $(i = 1, \ldots, n)$, und die Auflösung des Gleichungssystems $\alpha^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ nach den a_k ergibt: $(a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathfrak{S} \subset \mathfrak{a}_s$, $\alpha \subset (\mathfrak{a}_s \cap \mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{S}$ [22]).

Wir verzichten jetzt auf die Voraussetzung, daß der über $\mathfrak{R}$ unverzweigte Ring $\mathfrak{S}$ ein Elementsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$ mit $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n) = e$ enthalten soll. Es sei $\mathfrak{m}$ ein beliebiges maximales $\mathfrak{R}$-Primideal, $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ bedeute den durch $\mathfrak{m}$ bestimmten Primidealquotientenring, $\mathfrak{S}_\mathfrak{m}$ den Ring $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}_\mathfrak{m}$. Wegen der Unverzweigtheit gibt es in $\mathfrak{S}$ ein Elementsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$, für das die Diskriminante $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ ein nicht zu $\mathfrak{m}$ gehöriges $\mathfrak{R}$-Element, also eine Einheit aus $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$

---

[21]) Für die Gültigkeit von Satz 10 braucht man, wie der Beweis zeigt, keine Unverzweigtheitsvoraussetzung, sondern nur die Tatsache, daß $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ eine Modulbasis von n linear unabhängigen Elementen besitzt!

[22]) Für den Fall, daß $\mathfrak{R}$ den Polynomring in $x_1, \ldots, x_n$ über einem Körper K, $\mathfrak{S}$ den Polynomring in $x_1, \ldots, x_n$ über einem separablen Oberkörper Λ von K darstellt, findet sich dieser Beweis schon bei van der Waerden [7]).

larstellt. Für $\mathfrak{S}_\mathfrak{m}$ über $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ gelten also sicher die Sätze unseres Paragraphen. Von $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{S}_\mathfrak{m}$ aus kann man aber folgendermaßen auf $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ schließen: Bei den Beweisen unserer Sätze kommt es durchweg darauf an, zu zeigen, daß ein bestimmtes $\mathfrak{S}$-Element α ($\mathfrak{R}$-Element a) in einem bestimmten $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{a}_s$ ($\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}_r$) enthalten ist. Nun wird jedenfalls $\alpha \subset \mathfrak{a}_s \cdot \mathfrak{S}_m$ ($a \subset \mathfrak{a}_r \cdot \mathfrak{R}_m$) für jedes maximale $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{m}$. Der Idealquotient $\mathfrak{a}_s : (\alpha)$ ($\mathfrak{a}_r : (a)$) enthält also für jedes $\mathfrak{m}$ ein nicht zu $\mathfrak{m}$ gehöriges $\mathfrak{R}$-Element, und daraus ergibt sich sofort $\mathfrak{a}_s : (\alpha) = \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{a}_r : (a) = \mathfrak{R}$); $\alpha \subset \mathfrak{a}_s$ ($a \subset \mathfrak{a}_r$).

Die Sätze von § 4 gelten also tatsächlich für jeden über $\mathfrak{R}$ *unverzweigten Ring* $\mathfrak{S}$ [23]).

Im übrigen können unsere Ergebnisse mit Hilfe der Methode der Quotientenringbildung leicht noch etwas weiter verallgemeinert werden: Die Sätze 9 und 10 gelten offenbar bei beliebigem $\mathfrak{S}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$, zu dem in $\mathfrak{S}$ ein Elementsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$ so bestimmt werden kann, daß $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist, daß also $\mathfrak{p} + (\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)) = \mathfrak{R}$ wird. Wir gehen auf diese fast selbstverständlichen Dinge hier nicht näher ein.

§ 5.

Geschachtelte Primideale.

Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie in § 3 und § 4. $\mathfrak{p}'$ bedeutet ein Primoberideal von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$. Mit $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_s'$ bezeichnen wir die über $\mathfrak{p}'$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale, mit $n_1'^*, \ldots, n_s'^*$ die zugehörigen reduzierten Grade.

Satz 12. *Ist* $n_1'^* + \ldots + n_s'^* = n$, *so ist stets auch* $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$.

In der Tat, ist $n_1'^* + \ldots + n_s'^* = n$, so ist $\mathfrak{S}$ nach Satz 5 hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ und damit erst recht hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt. — Das Primideal $\mathfrak{p}$ möge „*nichtsingulär*" heißen, wenn der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen ist. Ist das Primideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ im Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ nichtsingulär, so nennen wir $\mathfrak{p}$ „*hinsichtlich* $\mathfrak{p}'$ *nichtsingulär*." Dann gilt:

Satz 13. *Ist* $\mathfrak{p}$ *nichtsingulär, und ist* $\mathfrak{S}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{R}$ *unverzweigt, so sind die über* $\mathfrak{p}$ *liegenden Primideale* $\mathfrak{q}_i$ *paarweise teilerfremd.*

Beim Beweise dürfen wir uns wie in § 4 auf die Betrachtung des Falles beschränken, daß in $\mathfrak{S}$ ein Elementsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$ existiert, für das $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ eine Einheit aus $\mathfrak{R}$ darstellt. Setzen wir $\mathsf{P} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$, $\Sigma = \mathfrak{S}/\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$, $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{q}_i/\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ ($i = 1, \ldots, s$), so haben wir zu zeigen, daß in Σ die Primideale $\mathfrak{n}_i$ paarweise teilerfremd sind. — Nach § 4 ist $\mathfrak{S} = \omega_1 \cdot \mathfrak{R} + \ldots + \omega_n \cdot \mathfrak{R}$ und infolgedessen $\Sigma = \bar{\omega}_1 \cdot \mathsf{P} + \ldots + \bar{\omega}_n \cdot \mathsf{P}$, wobei die $\bar{\omega}_i$ über P ebenso wie die ω_i über $\mathfrak{R}$ linear unabhängig sind. Nach Satz 10 ist ferner in Σ das Nullideal gleich dem Durchschnitt der Primideale $\mathfrak{n}_i$. Es wird daher kein von $\bar{0}$

[23]) Natürlich auch der Satz, daß $\mathfrak{S}$ ganz abgeschlossen ist!

verschiedenes Element aus dem Integritätsbereich P in Σ zum Nullteiler, und wir können nicht nur den Quotientenkörper K von P, sondern auch den Ring $\Lambda = \mathsf{K} \cdot \Sigma = \bar{\omega}_1 \cdot \mathsf{K} + \ldots + \bar{\omega}_n \cdot \mathsf{K}$ bilden[24]). Für die Diskriminante des Elementsystems $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n$ über K ergibt sich unmittelbar: $\Delta(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n) = \overline{\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)} \neq \bar{0}$. Es muß daher, da P nach Voraussetzung ganz abgeschlossen ist, nach dem Zusatz zu Satz 4 auch Σ ganz abgeschlossen sein.

Wir überlegen uns nun weiter: Die Ideale $\mathfrak{n}_i \cdot \Lambda$ $(i = 1, \ldots, s)$ sind offenbar gerade die sämtlichen Primideale von Λ. Für jedes i wird $\mathfrak{n}_i \cdot \Lambda \cap \Sigma = \mathfrak{n}_i$. Den Primidealen $\mathfrak{n}_1 \cdot \Lambda, \ldots, \mathfrak{n}_s \cdot \Lambda$ entspricht eine direkte Summenzerlegung des Ringes Λ in s Körper $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$. Das Einheitselement $\bar{\varepsilon}_i$ des Körpers Λ_i ist für $k \neq i$ stets im Primideal $\mathfrak{n}_k \cdot \Lambda$ enthalten. Da $\bar{\varepsilon}_i$ der Gleichung $\bar{\varepsilon}_i^2 - \bar{\varepsilon}_i = \bar{0}$ genügt, und somit von P ganz abhängt, liegt $\bar{\varepsilon}_i$ sogar für $k \neq i$ stets in $(\mathfrak{n}_k \cdot \Lambda) \cap \Sigma = \mathfrak{n}_k$. Damit ist aber wegen $\bar{\varepsilon}_1 + \ldots + \bar{\varepsilon}_s = \bar{1}$ die paarweise Teilerfremdheit der Primideale $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s$ bewiesen. — Aus Satz 13 ergibt sich fast unmittelbar:

Satz 14. *Ist* $\mathfrak{p}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{p}'$ *nichtsingulär, und ist* $\mathfrak{S}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{p}'$ *unverzweigt, so kann niemals eines der über* $\mathfrak{p}'$ *liegenden Primideale* $\mathfrak{q}_i'$ *zwei verschiedene über* $\mathfrak{p}$ *liegende Primideale* $\mathfrak{q}_k$, $\mathfrak{q}_l$ *enthalten.*

Zum Beweis hat man nur zu bedenken, daß die Betrachtung von dem Ringpaar $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ nach dem Ringpaar $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ verlegt werden darf, wobei $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ den durch $\mathfrak{p}'$ bestimmten Primidealquotientenring bedeutet. Für $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}'}$ über $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ sind dann die Voraussetzungen erfüllt, unter denen wir Satz 13 bewiesen haben. — Es sei jetzt $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}$ ein Normalkörper über $\mathfrak{K}$. Mit $\Gamma_z(\mathfrak{q})$ möge die zu dem $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{q}$ gehörige Zerlegungsgruppe bezeichnet werden, also die Gruppe aller der Automorphismen von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$, die das Primideal $\mathfrak{q}$ in sich selbst überführen. Dann gilt:

Satz 15. *Es sei, unter den gleichen Voraussetzungen wie bei Satz* 14, *das Primideal* $\mathfrak{q}_i'$ *Oberideal des Primideals* $\mathfrak{q}_k$. *Dann ist* $\Gamma_z(\mathfrak{q}_i')$ *eine Untergruppe von* $\Gamma_z(\mathfrak{q}_k)$. — *Die Anzahl* s *der über* $\mathfrak{p}$ *liegenden Primideale* $\mathfrak{q}_k$ *ist ein Teiler der Anzahl* s' *der über* $\mathfrak{p}'$ *liegenden Primideale* $\mathfrak{q}_i'$. *Der Quotient* $t = \frac{s'}{s}$ *ist gleich dem Index der Untergruppe* $\Gamma_z(\mathfrak{q}_i')$ in $\Gamma_z(\mathfrak{q}_k)$. *Jedes Primideal* $\mathfrak{q}_k$ *besitzt genau* t *verschiedene Primoberideale* $\mathfrak{q}_i'$.

In der Tat, jeder Automorphismus aus $\Gamma_z(\mathfrak{q}_i')$ führt $\mathfrak{q}_k$ in ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primunterideal $\mathfrak{q}_l$ von $\mathfrak{q}_i'$ über, und nach Satz 14 muß $\mathfrak{q}_l = \mathfrak{q}_k$ werden. $\Gamma_z(\mathfrak{q}_i')$ ist also tatsächlich eine Untergruppe von $\Gamma_z(\mathfrak{q}_k)$. — Nachdem

---

[21]) Λ kann auch einfach erklärt werden als der Ring aller Quotienten $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{a}}$ ($\bar{\alpha}$ in Σ, $\bar{a} \neq \bar{0}$ in P).

dieses erste Ergebnis gewonnen ist, sind die übrigen Behauptungen von Satz 15 fast selbstverständlich.

Die Beziehungen zwischen den Primidealen $\mathfrak{q}_i'$ und den Primidealen $\mathfrak{q}_k$ sind also von äußerst einfacher Art, solange wir an den Forderungen festhalten, daß $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ unverzweigt und $\mathfrak{p}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ nichtsingulär ist. Wir zeigen jetzt:

Satz 16. *Die Unverzweigtheitsvoraussetzung und die Beschränkung auf nichtsinguläre Primideale ist für die Allgemeingültigkeit der Sätze* 13 *bis* 15 *notwendig.*

Zum Beweis genügt die Angabe geeigneter Beispiele: Es sei $\mathfrak{K}_0$ der Körper der rationalen Zahlen, und es werde $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x, y)$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(\sqrt{x}) = \mathfrak{K}_0(\sqrt{x}, y)$ gesetzt, wobei x, y Unbestimmte bedeuten. $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}_0[x, y]$ bzw. $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_0[\sqrt{x}, y] = 1 \cdot \mathfrak{R} + \sqrt{x} \cdot \mathfrak{R}$ sei der Polynomring in x, y bzw. $\sqrt{x}$, y. Wir setzen nun: a) $\mathfrak{p} = (y^2 - x)$, $\mathfrak{p}' = (x, y)$. Dann ist zunächst $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ξ über $\mathfrak{K}_0$ und damit ganz abgeschlossen. Weiterhin ist $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ verzweigt, und es liegen über $\mathfrak{p}$ die beiden Primideale $\mathfrak{q}_1 = (y - \sqrt{x})$, $\mathfrak{q}_2 = (y + \sqrt{x})$, während über $\mathfrak{p}'$ nur das einzige Primideal $\mathfrak{q}' = (\sqrt{x}, y)$ liegt, das ein gemeinsames Oberideal von $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ darstellt. — Die Unverzweigtheit von $\mathfrak{S}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ ist also eine unentbehrliche Voraussetzung. — Es sei ferner: b) $\mathfrak{p} = (y^2 - x \cdot (x-2)^2)$, $\mathfrak{p}' = (x - 2, y)$. Dann ist $\mathfrak{S}$ nicht nur hinsichtlich $\mathfrak{p}$, sondern auch hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ unverzweigt. Es ist aber $\mathfrak{p}$ hinsichtlich $\mathfrak{p}'$ singulär, weil der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p} = \mathsf{P}$ zu dem mit Hilfe einer Unbestimmten ξ gebildeten Ringe $\mathfrak{K}_0[\xi, (\xi - 2) \cdot \sqrt{\xi}]$ isomorph ist und man mit Hilfe dieser Isomorphie leicht zeigt, daß weder $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ noch $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ ganz abgeschlossen sein kann[25]). Über $\mathfrak{p}$ liegen die beiden $\mathfrak{S}$-Primideale $\mathfrak{q}_1 = (y - \sqrt{x} \cdot (x-2))$ und $\mathfrak{q}_2 = (y + \sqrt{x} \cdot (x-2))$. Über $\mathfrak{q}'$ dagegen liegt nur das einzige Primideal $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{S} = (x - 2, y) \cdot \mathfrak{S}$. Denn der Restklassenkörper $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}'$ läßt sich isomorph auf den rationalen Zahlkörper $\mathfrak{K}_0$ abbilden, wobei die Restklasse $\bar{x}$ der Zahl 2 zugeordnet ist. Der Ring $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{S}$ aber erweist sich unter diesen Umständen als isomorph zum *Körper* $\mathfrak{K}_0(\sqrt{2})$. — Auch die Nichtsingularität von $\mathfrak{p}$ ist also bei den Sätzen 13 bis 15 eine notwendige Voraussetzung.

---

[25]) Man beachte: Ein zu $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}'}$ isomorpher Ring entsteht dadurch, daß man zu dem Ringe $\mathfrak{K}_0[\xi, (\xi - 2) \cdot \sqrt{\xi}]$ den durch das Primideal $(\xi, (\xi - 2) \cdot \sqrt{\xi})$ bestimmten Quotientenring bildet.

§ 6.

Weitere Sätze über unverzweigte Oberringe.

Es sei wie bisher $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Ring mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{L}$ bedeute einen Oberkörper von $\mathfrak{K}$ vom Grade n, $\mathfrak{M}$ einen Oberkörper von $\mathfrak{L}$ vom Grade m. $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{T}$ sei der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{M}$. Dann gilt:

Satz 17. *Es ist dann und nur dann* $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{R}$ *unverzweigt, wenn gleichzeitig* $\mathfrak{S}$ *über* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{T}$ *über* $\mathfrak{S}$ *unverzweigt ist.*

Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges $\mathfrak{R}$-Primideal; $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ seien die über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale, während die über $\mathfrak{q}_i$ liegenden $\mathfrak{T}$-Primideale mit $\mathfrak{r}_{i1}, \ldots, \mathfrak{r}_{it_i}$ bezeichnet werden sollen. n_i^* bzw. m_{ik}^* bedeute den reduzierten Grad von $\mathfrak{q}_i$ über $\mathfrak{R}$ bzw. von $\mathfrak{r}_{ik}$ über $\mathfrak{S}$. Dann ist, wie unmittelbar aus der einschlägigen Definition zu ersehen, $m_{ik}^* \cdot n_i^*$ der reduzierte Grad von $\mathfrak{r}_{ik}$ über $\mathfrak{R}$; da $\mathfrak{r}_{11}, \ldots, \mathfrak{r}_{st_s}$ die sämtlichen über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{T}$-Primideale darstellen, ist $\mathfrak{T}$ nach Satz 5 dann und nur dann hinsichtlich $\mathfrak{p}$ unverzweigt, wenn für den Relativgrad $m \cdot n$ von $\mathfrak{M}$ über $\mathfrak{K}$ die Gleichung

$$(1) \qquad m \cdot n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{t_i} n_i^* \cdot m_{ik}^* = \sum_{i=1}^{s} n_i^* \cdot \sum_{k=1}^{t_i} m_{ik}^*$$

gilt. Andererseits hat man nach Satz 2: $\sum_{i=1}^{s} n_i^* \leqq n$; $\sum_{k=1}^{t_i} m_{ik}^* \leqq m$ $(i = 1, \ldots, s)$. Die Gleichung (1) kann also nur dann bestehen, wenn $\sum_{i=1}^{s} n_i^* = n$; $\sum_{k=1}^{t_i} m_{ik}^* = m$ $(i = 1, \ldots, s)$ ist, d. h. nach Satz 5, wenn $\mathfrak{S}$ hinsichtlich des Primideals $\mathfrak{p}$, und $\mathfrak{T}$ hinsichtlich der Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ unverzweigt ist. Um von diesem Ergebnis auf den vollen Satz 17 zu schließen, hat man nur noch zu beachten, daß die $\mathfrak{q}_i$ die sämtlichen $\mathfrak{S}$-Primideale durchlaufen, wenn $\mathfrak{p}$ alle $\mathfrak{R}$-Primideale durchläuft.

Es soll jetzt der Begriff der Unverzweigtheit auch für den Fall erklärt werden, daß der Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ des Ringes $\mathfrak{S}$ einen unendlichen algebraischen Oberkörper von $\mathfrak{K}$ darstellt. Wir definieren: $\mathfrak{S}$ soll über $\mathfrak{R}$ unverzweigt heißen, wenn für jeden über $\mathfrak{K}$ endlichen Unterkörper $\mathfrak{L}_e$ von $\mathfrak{L}$ der Ring $\mathfrak{S}_e = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{K}_e$ im Sinne von § 4 über $\mathfrak{R}$ unverzweigt ist.

Für den konstruktiven Aufbau beliebiger über $\mathfrak{R}$ unverzweigter Oberringe $\mathfrak{S}$ ist die folgende, angesichts von Satz 17 fast selbstverständliche Bemerkung wichtig: $\mathfrak{S}$ ist sicher über $\mathfrak{R}$ unverzweigt, wenn irgendwelche endlich vielen Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ aus $\mathfrak{S}$ stets in einem im Sinne von § 4 über $\mathfrak{R}$ unverzweigten Ringe $\mathfrak{S}_e$ enthalten sind. —

Satz 18. *Die Sätze von* § 4 *gelten für alle unverzweigten Oberringe von* $\mathfrak{R}$, *auch für die mit über* $\mathfrak{K}$ *unendlichem Quotientenkörper* $\mathfrak{L}$. *Nur besteht bei unend-*

chem $\mathfrak{L}$ die Möglichkeit, daß über einem gegebenen $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ unendlich iele $\mathfrak{S}$-Primideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ liegen.

Die Übertragung der Sätze von § 4 auf den allgemeinsten Fall ist fast mmer so einfach, daß wir uns mit einigen Andeutungen begnügen können. . B. Satz 7! Es sei $a = \sum_{i=1}^{N} a_i \alpha_i \subset (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R})$; $\alpha_i \subset \mathfrak{S}_e$ $(i = 1, \ldots, N)$. ann ist $a \subset (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}_e \cap \mathfrak{R})$, und folglich $a \subset \mathfrak{a}$ nach dem alten Satz 7. — der Satz 9! Es sei $a \subset \mathfrak{q}$ für jedes über $\mathfrak{p}$ liegende $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{q}$, ferner $\subset \mathfrak{S}_e$. Dann ist $a \subset \mathfrak{q}_e$ für jedes über $\mathfrak{p}$ liegende $\mathfrak{S}_e$-Primideal $\mathfrak{q}_e$, weil zu edem $\mathfrak{q}_e$ in $\mathfrak{S}$ mindestens ein darüber liegendes $\mathfrak{q}$ existiert. Es ist also $\subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}_e$ nach dem alten Satz 9 und damit erst recht $a \subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$.

Etwas schwieriger ist allein die Übertragung von Satz 10b). Man hat u zeigen: Ist $\alpha \subset \mathfrak{y}$ für jede isolierte Primärkomponente $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$, so olgt aus $\alpha \subset \mathfrak{S}_e$ stets $\alpha \subset \mathfrak{y}_e$ für jede isolierte Primärkomponente $\mathfrak{y}_e$ von $\cdot \mathfrak{S}_e$. — Es sei nun $\mathfrak{q}$ ein über dem zu $\mathfrak{y}_e$ gehörigen $\mathfrak{S}_e$-Primideal $\mathfrak{q}_e$ (und amit auch über $\mathfrak{p}$) liegendes $\mathfrak{S}$-Primideal, $\mathfrak{y}'$ bzw. $\mathfrak{y}$ sei die zu $\mathfrak{q}$ gehörige olierte Primärkomponente von $\mathfrak{y}_e \cdot \mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$. Da $\mathfrak{S}$ nach Satz 17 nicht ur über $\mathfrak{R}$, sondern auch über $\mathfrak{S}_e$ unverzweigt ist, wird nach dem unmittelbar uf den allgemeinen Fall übertragbaren Satz 10a) sicher $\mathfrak{y}' \cap \mathfrak{S}_e = \mathfrak{y}_e$. ndererseits ist $\mathfrak{y}' \supseteq \mathfrak{y}$ wegen $\mathfrak{y}_e \cdot \mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$, aus $\alpha \subset (\mathfrak{y} \cap \mathfrak{S}_e)$ folgt daher $\subset (\mathfrak{y}' \cap \mathfrak{S}_e) = \mathfrak{y}_e$. Fertig!

Als einfache Anwendung der allgemeinen Theorie der unverzweigten berringe betrachten wir den Fall der „*separablen Grundkörpererweiterung*". s sei K (der „Grundkörper") ein Unterring des ganz abgeschlossenen Ringes $\mathfrak{R}$, nd zwar soll K „in $\mathfrak{R}$ maximal algebraisch" sein, d. h. es soll $\mathfrak{R}$ (und damit egen der Ganzabgeschlossenheit auch der Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$) ein über dem Körper K echt algebraisches Element enthalten. Dann gilt:

Satz 19. *Ist Λ ein separabel algebraischer Oberkörper von K, so ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{R} \cdot \Lambda$ ets über $\mathfrak{S}$ unverzweigt, es gelten also für $\mathfrak{R} \cdot \Lambda$ über $\mathfrak{R}$ die Sätze von § 4.*

Der Beweis braucht in Anbetracht der einschlägigen Definitionen offenbar ur für den Fall geführt zu werden, daß Λ ein endlicher und damit wegen er Separabilitätsvoraussetzung sogar ein einfacher Oberkörper von K ist, $= \mathsf{K}(\omega)$. Ist $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ das über K irreduzible olynom mit der Nullstelle ω, so ist $p(x)$ wegen der Maximaleigenschaft on K auch über $\mathfrak{K}$ irreduzibel, die Elemente $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ bilden also eine near unabhängige Basis von $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$. Die zu dem System $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ ehörige Diskriminante $\Delta(\omega)$ ist aber ein von 0 verschiedenes Element aus K, so eine Einheit aus $\mathfrak{R}$.

(Eingegangen am 7. Juni 1938.)

Über Ausnahmegebiete meromorpher Funktionen.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

---

1. Ist $w(z)$ eine in der ganzen Ebene oder innerhalb des Kreises $|z| < R$ meromorphe Funktion von z, so nennt man bekanntlich[1]) a einen Nevanlinnaschen Ausnahmewert, wenn der Ausdruck

$$\delta_N(a) = 1 - \overline{\lim} \frac{N(r, a)}{T(r)}$$

positiv ausfällt. Dabei sind $N(r, a)$ und $T(r)$ die Anzahlfunktion bzw. charakteristische Funktion der Nevanlinnaschen Theorie.

Im Laufe der Zeit sind unter anderem einige Sätze angegeben worden, die sich mit der Aufstellung von hinreichenden Bedingungen befassen, unter welchen ein gegebener Wert a den Nevanlinnaschen Defekt Null besitzt. Damit meine ich einige Sätze aus dem Kreis des Colingwoodschen[2]) Satzes.

Nun arbeitet man seit den fundamentalen Arbeiten von Ahlfors[3]) nicht nur mit einzelnen Werten a, sondern auch mit Gebieten, und es ist von Interesse zu untersuchen, wann ein bestimmtes Gebiet D im Ahlforsschen Sinne kein Ausnahmegebiet ist.

Bekanntlich bedeutet dies, daß der Ahlforssche Defekt

$$\delta_A(D) = 1 - \overline{\lim} \frac{n(r, D)}{S(r)}$$

gleich Null ist. Dabei ist $n(r, D)$ die gesamte Anzahl der über D liegenden Inseln desjenigen Riemannschen Flächenstückes, das durch $z(w)$ auf den Kreis $|z| < r$ abgebildet wird, und $\pi S(r)$ der sphärische Inhalt (auf der Riemannschen Kugel) dieser Näherungsfläche F_r.

Ich will in dieser Arbeit einen solchen Satz angeben und beweisen:

Wenn über einem Gebiet D_0, das D vollständig in seinem Inneren enthält, höchstens N-blättrige Inseln von $w(z)$ liegen, so ist $\delta_A(D) = 0$. Dabei soll R eine Konstante sein, und D wie D_0 einfach zusammenhängend.

---

[1]) Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Springer, 1937.

[2]) Vgl. u. a. Colingwood C. r. Acad. Sci. Paris **179** (1924), S. 1125; Selberg, Avh. Norske Vid-Akad. Oslo, Mat-nat. Kl. 1931, Nr. 9; Cartan, C. r. Acad. Sci. Paris **19** (1930), S. 1003; Kakutani, Proc. Physik. Math. Soc. Japan (3) **17** (1935), S. 17. Teichmüller, Deutsche Math. **2** (1937), S. 93.

[3]) Acta Math. **65** (1935), S. 157.

Zum Beweis dieses Satzes benutze ich erstens einen neuen Ausdruck für (r), der als Gegenstück einer längst bekannten Relation[4]) von Henri Cartan ıfgefaßt werden kann, und ferner eine Abschätzung der über D liegenden ungen von F, die ich im Anschluß an Kakutani[5]) beweise.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß man den vorstehenden atz verhältnismäßig leicht auch aus dem ersten Ahlforsschen Fundamentalıtz ableiten könnte. Der hier angegebene Beweis hat aber den Vorzug, on der Theorie der Überlagerungsflächen unabhängig zu sein.

2. Ein neuer Ausdruck für $S(r)$. Es sei $w(z) = u + iv$ eine in $|z| < R\,(R \leqq \infty)$ meromorphe Funktion von z.

Ist

$$[w, a] = \frac{|w - a|}{\sqrt{1 + |w|^2}\sqrt{1 + |a|^2}} \tag{2, 1}$$

ie Kugelentfernung zwischen w und a, so gilt bekanntlich[6])

$$S(r) = n(r, a) + \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{[w, a]}\, d\varphi. \tag{2, 2}$$

Wir setzen $a = e^{i\vartheta}$ (ϑ reell), integrieren die so entstandene Formel von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ nach vorherigen Multiplikationen mit $\frac{d\vartheta}{2\pi}$ und erhalten

$$S(r) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\vartheta})\, d\vartheta = \frac{r}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{[w, e^{i\vartheta}]}\, d\varphi. \tag{2, 3}$$

Nach dem Gaußschen Mittelwertsatz ist nun

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |w - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta = \overset{+}{\log}|w|,$$

e rechte Seite von (2, 3) wird also gleich

$$\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(\log \sqrt{1 + |w|^2} - \overset{+}{\log}|w|\right) d\varphi.$$

---

[4]) C. r. Acad. Sci. Paris 89 (1929), S. 521.

[5]) Kakutani, loc. cit., S. 175.

[6]) Diese Gleichung folgt durch Anwendung des Argumentenprinzips auf die rmonische Funktion $\log \frac{[w, a]}{[w, b]}$. Es stellt sich heraus, daß die rechte Seite von (2. 2) n a unabhängig ist. Durch Multiplikation mit dem Flächenelement der Riemannschen ugel und Integration über die ganze Fläche derselben, folgt (2. 2) unter Benutzung n (2. 1) und der Cauchy-Riemannschen Gleichungen unmittelbar.

Es werde zuerst eine Stelle z betrachtet, wo $|w| \geqq 1$ ist. Dann wird unter Heranziehung der Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}(\log\sqrt{1+|w|^2} - \log^+|w|) = \frac{u\,u_r + v\,v_r}{|w|^2(1+|w|^2)} \leqq \frac{|w'|}{|w|(1+|w|^2)} \leqq \frac{|w'|}{1+|w|^2},$$

da $|w| \geqq 1$ ist. Für $|w| < 1$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial r}(\log\sqrt{1+|w|^2} - \log^+|w|) = \frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{1+|w|^2} = \frac{u\,u_r + v\,v_r}{1+|w|^2} \leqq \frac{|w'|}{1+|w|^2}.$$

Wegen

$$L(r) = r\int_0^{2\pi} \frac{|w'|}{(1+|w|^2)}\,d\varphi \tag{2, 4}$$

wird also

$$\left| S(r) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\vartheta})\,d\vartheta \right| \leqq \frac{L(r)}{2\pi}$$

oder

$$S(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\vartheta})\,d\vartheta + h\,L(r), \tag{2, 5}$$

wobei $|h| \leqq \frac{1}{2\pi}$ ist.

Dies ist die in Aussicht gestellte Relation.

3. Beweis des Defektsatzes. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß der Nullpunkt ein innerer Punkt von D ist. Es sei $2\,\delta$ die Kugelentfernung von D und D_0 und D_1 ein Zwischengebiet, das vollständig im Inneren von D_0 liegt, und dessen Rand vom Rande von D eine Kugelentfernung $\geqq \delta$ hat. Wir wählen jetzt k so, daß der Kreis K um den Nullpunkt mit Radius k vollständig im Inneren von D liegt. Dann ist, wie man sehr leicht bestätigt, für $r < R$,

$$n(r, k\,e^{i\vartheta}) - n(r, D) \leqq N\left(\frac{L(r)}{2\,\delta} + 1\right). \tag{3, 1}$$

Betrachten wir in der Tat diejenigen Gebiete der z-Ebene, oder des Kreises $|z| < R$, auf welche die über D_1 befindlichen Inseln durch die Umkehrungsfunktion $z(w)$ abgebildet werden. Ist der Kreis $|z| \leqq r$ in einem solchen Gebiet enthalten, so ist

$$n(r, ke^{i\vartheta}) - n(r, D) \leqq N$$

und (3, 1) ist richtig. Die Ungleichung ist offenbar auch dann richtig, wenn der Kreis $|z| = r$ durch kein solches Gebiet geht. Liegt nun dieser letzte Fall vor, so können zwei Fälle eintreten, je nachdem eine bestimmte Zunge von D_1 eine oder mehrere Zungen $Z_1, \ldots, Z_q$ von D enthält. Zuerst ist es klar, daß

ie Differenz links höchstens gleich der Anzahl der Zungen von D ist, die unkte mit Spur $k e^{i\vartheta}$ enthalten, und es kommt darauf an, diese Anzahl nach ben abzuschätzen. Die Anzahl der Zungen der ersten Kategorie ist wohl $\leqq \Sigma \frac{l}{2\delta}$, wobei l die Länge des relativen Randes der sie enthaltenden unge von D_1 ist. Es bleiben noch die Zungen der zweiten Kategorie. Es seien etzt q Zungen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ von D in einer Zunge Z von D_1 enthalten, die en relativen Rand l besitzen möge. Es sei m_i die Anzahl der Blätter von Z_i ie über dem Punkt $k e^{i\vartheta}$ liegen. Dann ist der Beitrag der betreffenden Zunge Z_i edenfalls kleiner oder gleich $m_i \frac{l}{2\delta}$, und wegen $m_1 + m_2 + \ldots + m_q \leqq N$ t der Beitrag der q Zungen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$, $\leqq N \frac{l}{\delta}$. Durch Summation über lle Zungen ergibt sich nun die Richtigkeit von (3, 1) unmittelbar. Demach ist

$$\text{3, 2)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, k e^{i\vartheta})\, d\vartheta - n(r, D) \leqq N\left(\frac{L(r)}{2\delta} + 1\right)$$

der wegen (2, 5),

$$\text{3, 3)} \qquad S\left(r, \frac{w}{k}\right) - n(r, D) \leqq N + \left(\frac{N}{2\delta} + \frac{1}{2\pi}\right) L(r).$$

Wir behaupten nun: Es ist

$$\text{3, 4)} \qquad S\left(r, \frac{w}{k}\right) \geqq S(r, w) - \frac{(1+k^2)}{4\pi k} L(r).$$

Denn aus

$$S(r, w) = n(r, \infty) + \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{1 + |w|^2}\, d\varphi$$

nd

$$S\left(r, \frac{w}{k}\right) = n(r, \infty) + \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{k^2 + |w|^2}\, d\varphi,$$

olgt zuerst

$$\text{3, 5)} \qquad S(r, w) - S\left(r, \frac{w}{k}\right) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{\frac{1+|w|^2}{k^2+|w|^2}}\, d\varphi.$$

Nun ist wegen $|u u_r + v v_r| \leqq |w|\,|w'|$

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{\frac{1+|w|^2}{k^2+|w|^2}}\right| \leqq (1+k^2) \cdot \frac{|w'|\,|w|}{(1+|w|^2)(k^2+|w|^2)} \leqq \frac{1+k^2}{2k} \cdot \frac{|w'|}{1+|w|^2}.$$

da $\frac{|w|}{k^2+|w|^2} \leqq \frac{1}{2k}$ ist. Aus (3, 5) folgt also

$$\left| S(r, w) - S\left(r, \frac{w}{k}\right) \right| \leqq \frac{1+k^2}{4\pi k} L(r)$$

d. h. (3, 4). Damit ist die Ungleichung

$$S(r, w) - n(r, D) \leqq N + CL(r) \tag{3, 6}$$

mit $C = \frac{1+k^2}{4\pi k} + \frac{N}{2\delta} + \frac{1}{2\pi}$ vollständig bewiesen.

Daraus erhält man unter Voraussetzung der regulären Ausschöpfbarkeit

$$\delta_A(D) = 1 - \overline{\lim} \frac{n(r, D)}{S(r)} = 0.$$

Bekanntlich [7]) sind Riemannsche Flächen vom parabolischen und hyperbolischen Typus (diese letzteren, wenn sie nicht allzu langsam wachsen) regulär ausschöpfbar.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß man (3, 6) noch integrieren kann. Es folgt nämlich

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(t)}{t} dt - \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, D)}{t} dt = O\left(\log r + \int_{r_0}^{r} \frac{L(t)}{t} dt\right).$$

Ist nun die Fläche vom parabolischen Typus, so weiß man (vgl. diese Zeitschr. **44**, S. 568), daß außerhalb von Intervallen Δ_r die so beschaffen sind, daß $\int d \log\log r$ konvergiert, die Ungleichung

$$\int_{r_0}^{r} \frac{L(t)}{t} dt \leqq \sqrt{T} \log T$$

gilt. Es ist also außerhalb dieser Ausnahmeintervalle Δ_r

$$T(r) - N(r, D) \leqq O(\log r + \sqrt{T} \log T),$$

oder noch

$$\delta_N(D) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, D)}{T(r)},$$

womit wir Anschluß an bekannte Sätze gewinnen. Denn wegen $n(r, D) \leqq n(r, 0)$ gilt diese Relation auch dann, wenn $N(r, D)$ durch $N(r, 0)$ ersetzt wird.

---

[7]) Nevanlinna loc. cit., S. 342.

(Eingegangen am 24. August 1938).

Zur Invarianz der Shimizu-Ahlforsschen Charakteristik.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. Neben der klassischen Nevanlinnaschen[1]) Charakteristik $T(r, w)$, die als Maß des Wachstums einer in $|z| < R$ $(R \leqq +\infty)$ meromorphen Funktion $w(z)$ dient, haben Shimizu[2]) und Ahlfors[3]) noch die Funktion $S(r, w) = r T'(r, w)$ eingeführt, welche folgende einfache geometrische Bedeutung hat: Bildet man die Riemannsche Fläche F von $w(z)$ auf die Riemannsche Kugel stereographisch ab, so ist $S(r, w)$ gleich dem durch π dividierten sphärischen Inhalt desjenigen Flächenstückes F_r von F, das durch $z(w)$ auf den Kreis $|z| \leqq r < R$ abgebildet wird.

Insbesondere hat Ahlfors in wichtigen Arbeiten diese letzte Größe systematisch benutzt und gezeigt, daß man die meisten Nevanlinnaschen Sätze sogar auf Gebiete übertragen) in einer Form erhalten kann, in der nur $S(r, w)$, eine Anzahlfunktion und die sphärische Länge $L(r)$ von F_r eintreten.

Von diesem Standpunkt aus ist es von Interesse zu untersuchen, inwieweit eine lineare Transformation von w die Charakteristik $S(r, w)$ beeinflußt. Für die Funktion $T(r, w)$ wissen wir, daß sie die Beziehung

$$T(r, Uw) = T(r, w) + O(1) \tag{1. 1}$$

erfüllt, wenn Uw eine lineare Transformation von w mit nicht verschwindender Determinante ist. Für $S(r, w)$ beweist Shimizu in seiner oben zitierten Arbeit eine Beziehung, die (1. 1) sehr nachsteht, nämlich die Ungleichung

$$(1 - \varepsilon)\, S(r, Uw) \leqq S(r, w) \leqq (1 + \varepsilon)\, S(r, Uw), \tag{1. 2}$$

mit Ausnahme von Intervallen Δ_r, die so verteilt sind, daß $\int_{\Delta_r} d \log r$ konvergiert.

---

[1]) Vgl. z. B. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin, Jul. Springer, 1936.

[2]) Shimizu, On the Theory of Meromorphic Functions, Jap. Journ. of Math. 6 (1929).

[3]) Ahlfors, Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen, Comptes rendus du 7e congrès math. Scandin. Oslo 1929.

Es läge nun gewiß in der Richtung der Ahlforsschen Werteverteilungssätze, wenn man eine Beziehung von der Form

$$S(r, Uw) = S(r, w) + O(L(r)) \tag{1.3}$$

beweisen könnte. Denn in der Ahlforsschen Theorie wird (insofern man bei regulär ausschöpfbaren Flächen bleibt) jede Größe von der Größenordnung $L(r)$ als Restglied betrachtet. So wäre (1. 3) das vollkommene Analogon von (1. 1). Sie besagt, daß $S(r, w)$ bei einer linearen Transformation von w sich höchstens um ein $O(L(r))$ ändert.

Ich werde in dieser Arbeit die Gleichung (1. 3) für jede meromorphe Funktion und jedes r beweisen. Bekanntlich treten die Ausnahmeintervalle dann ein, wenn $L(r)$ mit $S(r, w)$ verglichen wird.

2. Um (1. 3) zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß diese Relation für jede der drei folgenden linearen Transformationen besteht:

1. $Uw = w + k$ (k konstant),
2. $Uw = \frac{1}{w}$

und

3. $Uw = kw$.

Denn die allgemeinste lineare Transformation ergibt sich bekanntlich durch Zusammensetzung dieser drei Transformationen.

Wir gehen von der Formel[4])

$$S(r, w) = n(r, a, w) + \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{[w, a]}\, d\varphi \tag{2.1}$$

aus. Dabei ist a eine beliebige komplexe Zahl, und $[w, a]$ wird durch

$$[w, a] = \frac{|w - a|}{\sqrt{1 + |w|^2}\sqrt{1 + |a|^2}}$$

definiert. Aus dieser Formel folgt, da $n(r, \infty, w) = n(r, \infty, w + k)$ ist:

$$S(r, w + k) - S(r, w) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{\frac{1 + |w + k|^2}{1 + |w|^2}}\, d\varphi. \tag{2.2}$$

Nun ist mit $w = u + iv$ und $k = \mu + i\nu$[5])

$$\frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{\frac{1 + |w + k|^2}{1 + |w|^2}} = u u_r + v v_r \left\{\frac{1}{1 + |w + k|^2} - \frac{1}{1 + |w|^2}\right\} + \frac{\mu u_r + \nu v_r}{1 + |w + k|^2};$$

[4]) Vgl. z. B. Ahlfors, Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen, Comment. Physicomath. Soc. Scient. Fennicae 8 (1935).

[5]) Es genügt hier nur Stellen zu betrachten, wo $w \neq \infty$ ist. Denn in diesen letzteren Stellen sind beide Seiten von (2. 2) stetig, und die Gültigkeit der Abschätzung kann durch Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen werden.

so unter Heranziehung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{\frac{1+|w+k|^2}{1+|w|^2}}\right| \leqq \frac{|w\,w'|\,|(w+k)^2-w^2|}{(1+|w+k|^2)(1+|w|^2)}+\frac{|k|\,|w'|}{1+|w+k|^2}$$

$$\leqq 2|k|\frac{|w'|}{1+|w|^2}\cdot\frac{(|w|+|k|)^2}{1+(|w|-|k|)^2}+\frac{|k|\,|w'|}{1+(|w|-|k|)^2}.$$

Wir behaupten jetzt: Es ist

$$\frac{(|w|+|k|)^2}{1+(|w|-|k|)^2} \leqq 4(1+|k|^2) \tag{2.3}$$

nd

$$\frac{1}{1+(|w|-|k|)^2} \leqq \frac{4(1+|k|^2)}{1+|w|^2}. \tag{2.4}$$

Wir setzen der Bequemlichkeit halber $|w| = x$ und $|k| = \lambda$. Dann hat e Funktion

$$F(x) = \frac{(x+\lambda)^2}{1+(x-\lambda)^2}$$

r Maximum bei $x = \lambda + \frac{1}{2\lambda}$, es ist also

$$F(x) \leqq \frac{(1+4\lambda^2)^2}{(1+4\lambda^2)} = 1+4\lambda^2,$$

mit (2. 3) bewiesen ist. Der Beweis von (2. 4) ist noch einfacher.

Es ist

$$\frac{1+x^2}{1+(x-\lambda)^2} \leqq 1+\frac{(x+\lambda)^2}{1+(x-\lambda)^2} < 4(1+\lambda^2).$$

Damit haben wir im ganzen:

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{\frac{1+|w+k|^2}{1+|w|^2}}\right| \leqq 12|k|(1+k^2)\frac{|w'|}{1+|w|^2},$$

nd wegen

$$L(r) = r\int_0^{2\pi}\frac{|w'|}{1+|w|^2}\,d\varphi$$

Verbindung mit (2. 2):

$$|S(r, w+k)-S(r, w)| \leqq \frac{12|k|}{2\pi}(1+k^2)L(r)$$

er

$$S(r, w+k)-S(r, w) = O(L(r)).$$

Bei der Transformation 2. bleibt $S(r, w)$ invariant. Denn es ist $n(r, \infty, w)$ $n\left(r, 0, \frac{1}{w}\right)$ und $[w, \infty] = \left[\frac{1}{w}, 0\right]$.

Es bleibt infolgedessen nur die Transformation 3. Wegen $n(r, \infty, w) = n(r, \infty, kw)$ folgt aus (2. 1):

$$S(r, kw) - S(r, w) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{\frac{|k|^2 + |w|^2}{1 + |w|^2}}\, d\varphi.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{\frac{|k|^2 + |w|^2}{1 + |w|^2}} = u u_r + v v_r \left\{ \frac{1}{|k|^2 + |w|^2} - \frac{1}{1 + |w|^2} \right\} = (1 - |k|^2) \frac{u u_r + v v_r}{(1 + |w|^2)(|k|^2 + |w|^2)},$$

also

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{\frac{|k|^2 + |w|^2}{1 + |w|^2}} \right| \leqq (1 + |k|^2) \frac{|w'|}{1 + |w|^2} \cdot \frac{|w|}{|k|^2 + |w|^2} \leqq \frac{1 + |k|^2}{2|k|} \frac{|w'|}{1 + |w|^2}.$$

Daraus und aus (2. 5) ergibt sich

$$|S(r, kw) - S(r, w)| \leqq \frac{1 + |k|^2}{4|k|\pi} L(r),$$

womit die allgemeine Beziehung (1. 3) bewiesen ist.

(Eingegangen am 9. September 1938.)

Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen[1]).

Von

Helmut Grunsky in Berlin.

Der erste Zugang zu scharfen Ergebnissen in der Theorie der schlichten Funktionen führte über den zweiten Bieberbachschen Flächensatz[2]). Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist der, daß eine in einem Gebiet schlichte Funktion mit einem Pol ein Bildgebiet ergibt, dessen Rand (der zunächst als Jordankurve vorausgesetzt werde) ein Flächenstück mit nichtpositivem Inhalt umschließt; dabei wird der Inhalt, den eine einfach geschlossene orientierte Kurve umschließt, positiv oder negativ gezählt, je nachdem, ob das Innere bei einem Umlauf im Sinne der Orientierung zur Linken oder zur Rechten liegt, und der Rand eines Gebietes soll stets so orientiert sein, daß das Gebiet zur Linken liegt. Indem man den genannten Flächeninhalt durch die Koeffizienten der Funktion ausdrückt oder wenigstens abschätzt, erhält man Abschätzungen für diese Koeffizienten.

Den nachstehenden Ausführungen liegt folgende Verallgemeinerung dieses Gedankens zugrunde: Man denke sich unter Wahrung der eben gemachten Voraussetzungen den Rand B_y des Bildgebietes $\mathfrak{B}_y$, das durch die Funktion $y = g(z)$ aus dem Gebiet $\mathfrak{B}_z$ entsteht, in ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet eingeschlossen, das man einer Abbildung durch eine in ihm überall reguläre Funktion $\Phi(y)$ unterwerfe; dabei geht B_y wieder in eine Kurve über, die einen nicht positiven Flächeninhalt umschließt, wenn man den von einer beliebigen geschlossenen Kurve umschlossenen Flächeninhalt dadurch definiert, daß man jedem Flächenelement der Ebene als Vielfachheit die Umlaufszahl der Kurve um dasselbe zuschreibt, und über die ganze Ebene integriert. Man kann diese Verallgemeinerung auch so verstehen, daß man der Bildebene eine gewisse Flächenmetrik aufprägt, nämlich die, die dem Flächenelement $d\omega_y$ den Inhalt $|\Phi'(y)|^2 d\omega_y$ zuschreibt, und das Prinzip des Flächensatzes in dieser Metrik ausspricht[3]).

---

[1]) Über die Ergebnisse dieser Arbeit habe ich auf der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung zu Stuttgart im September 1935 vorgetragen.

[2]) Siehe z. B. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2. Aufl., Leipzig 1931, S. 72—74.

[3]) Vgl. dazu Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung, Sammlung Göschen, Bd. 768, 3. Aufl., Berlin 1937, S. 110.

Die Hauptaufgabe bei der Anwendung des Verfahrens ist natürlich jenen Flächeninhalt durch die Koeffizienten der abbildenden Funktion auszudrücken oder abzuschätzen. Der Grundgedanke, nach dem dies im folgenden geschieht, werde am einfachsten Falle erläutert, nämlich an einem neuen Beweis einer Extremaleigenschaft der Parallelschlitzgebiete endlich vielfachen Zusammenhangs, die bei einfachem Zusammenhang eine unmittelbare Folge des zweiten Flächensatzes ist.

$\mathfrak{B}_z$ sei ein schlichtes, endlich vielfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene, das den unendlich fernen Punkt enthält, B_z sein Rand. $w = u + iv = g(z)$ sei in $\mathfrak{B}_z$ bis auf $z = \infty$ regulär, eindeutig und schlicht und besitze bei $z = \infty$ die Laurententwicklung

$$g(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Daneben betrachten wir die Funktion $\mathfrak{x}^{(\alpha)}(z)$, deren Entwicklung bei $z = \infty$ dieselbe Form hat:

$$\mathfrak{x}^{(\alpha)}(z) = z + \frac{a_1^{(\alpha)}}{z} + \frac{a_2^{(\alpha)}}{z^2} + \cdots,$$

und die $\mathfrak{B}_z$ auf ein Gebiet abbildet, das von geradlinigen Schlitzen begrenzt wird, die alle den Winkel α gegen die reelle Achse bilden $(0 \leqq \alpha < \pi)$[4]. Nun setzen wir

$$F(z) = U + iV = g(z) - \mathfrak{x}^{(\alpha)}(z).$$

$F(z)$ ist in $\mathfrak{B}_z$ überall regulär, daher ist bekanntlich

$$I(F) = \int_{B_z} U\, dV \geqq 0. \tag{1}$$

Andererseits ist

$$I(F) = \frac{i}{2}\int_{B_z} F\, d\bar{F} = \frac{i}{2}\int_{B_z} (g - \mathfrak{x}^{(\alpha)})(d\bar{g} - d\overline{\mathfrak{x}^{(\alpha)}}) \tag{2}$$

$$= \frac{i}{2}\int g\, d\bar{g} - \frac{i}{2}\int \mathfrak{x}^{(\alpha)}\, d\bar{g} - \frac{i}{2}\int g\, d\overline{\mathfrak{x}^{(\alpha)}} + \frac{i}{2}\int \mathfrak{x}^{(\alpha)}\, d\overline{\mathfrak{x}^{(\alpha)}}.$$

Hier ist nun

$$\frac{i}{2}\int g\, d\bar{g} = \int u\, dv = I(g) \leqq 0, \tag{3}$$

denn dies ist der Flächeninhalt, den das durch $g(z)$ entworfene Bild von B_z umschließt; ferner ist

$$\frac{i}{2}\int \mathfrak{x}^{(\alpha)}\, d\overline{\mathfrak{x}^{(\alpha)}} = 0, \tag{4}$$

---

[4]) Die Existenz und Einzigkeit dieser Funktionen findet man bewiesen bei Koebe, Abhandlungen zur konformen Abbildung IV, Acta math. **41** (1918), S. 305—344.

enn dies Integral hat für $x^{(\alpha)}$ dieselbe Bedeutung, wie das vorige für g.
ndlich ist

$$-\frac{i}{2}\int x^{(\alpha)}\,d\bar{g}-\frac{i}{2}\int g\,d\overline{x^{(\alpha)}}=\frac{i}{2}\int \bar{g}\,d\,x^{(\alpha)}-\frac{i}{2}\int g\,d\overline{x^{(\alpha)}}=\Re\left(-i\int g\,d\overline{x^{(\alpha)}}\right).$$

un ist aber auf B_z

$$d\,\overline{x^{(\alpha)}}=e^{-2i\alpha}\,d\,x^{(\alpha)},$$

nd man erhält für den letzten Ausdruck:

$$\Re\left(-i\,e^{-2i\alpha}\int g(z)\,d\,x^{(\alpha)}(z)\right).$$

as letzte Integral kann aber nach dem Residuensatz ausgewertet werden;
ist gleich

$$2\pi i\,(a_1^{(\alpha)}-a_1).$$

iernach und nach (1), (2), (3), (4) ist also

$$I(F)-I(g)=\Re\left(2\pi e^{-2i\alpha}(a_1^{(\alpha)}-a_1)\right)\geqq 0. \tag{5}$$

a in (1) das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $g\equiv x^{(\alpha)}$, und da es dann auch
(3) gilt, so gilt in (5) ebenfalls dann und nur dann das Gleichheitszeichen[5]).

Bei der Durchführung der vorhin angedeuteten Verallgemeinerung des erfahrens tritt an Stelle von $g(z)$ die Funktion $f(z)=\Phi(g(z))$, wo wir r Φ nur Polynome P zulassen, an Stelle von $x^{(\alpha)}(z)$ eine Funktion $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$, e dasselbe Verhalten auf dem Rande aufweist, wie $x^{(\alpha)}(z)$, d. h. die jeder andkomponente von $\mathfrak{B}_z$ ein Stück einer Geraden der Neigung α gegen die elle Achse entsprechen läßt, aber bei ∞ denselben Hauptteil besitzt wie $(g(z))$.

So erhält man zunächst notwendige Koeffizientenbedingungen für hlichte Funktionen. Daß sie in ihrer Gesamtheit auch hinreichend sind, uchtet nach folgender Überlegung ein: Es ist nur zu zeigen: Für nicht hlichtes g gibt es ein Polynom P derart, daß

$$I(f)-I(F)>0 \tag{6}$$

, wenn $f=P(g)$, $F=f-\mathfrak{f}^{(\alpha)}$ gesetzt wird und $\mathfrak{f}^{(\alpha)}$ denselben Hauptteil ie f besitzt; denn die Koeffizientenbedingung ergibt sich ja aus $I(f)-I(F)$

[5]) Dieses Ergebnis haben früher ungefähr gleichzeitig Grötzsch und de Possel funden. Vgl. H. Grötzsch, Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung hlichter Bereiche, Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl. 84 (1932), 15—36; R. de Possel, Sur quelques propriétés de la représentation conforme des maines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles, ath. Annalen 107 (1932), S. 496—504. — Den Grundgedanken des hier gegebenen weises hat Verf. schon früher in etwas anderer Ausgestaltung angewendet: H. Grunsky, eue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender reiche, Schr. math. Semin. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1 (1932), S. 94—140. e hier benutzte Fortbildung der Methode findet sich in den Schlußbemerkungen eser Arbeit angedeutet.

$\leqq 0$ einfach durch Auswertung der linken Seite mittels der Koeffizienten (vgl. (5)). Ist g nicht schlicht, so gibt es in der Bildebene y Gebiete $\mathfrak{G}_y$, und die das Bild des Randes eine positive Umlaufszahl hat; daneben können auch solche, $\mathfrak{G}_y'$, mit negativer Umlaufszahl vorkommen. Man wird nun versuchen $I(f)$ dadurch möglichst groß zu machen, daß man ein Polynom wählt, das die Gebiete $\mathfrak{G}_y$ hinlänglich vergrößert, die Gebiete $\mathfrak{G}_y'$ verkleinert; das ist offenbar ohne weiteres möglich. Daneben muß man aber danach trachten, das stets nichtnegative $I(F)$ möglichst klein zu halten, was nur dadurch erreicht werden kann, daß man F möglichst wenig von einer Konstanten, also wegen $F(\infty) = 0$, von 0 abweichen läßt. Es liegt nahe, dies dadurch zu versuchen, daß man P so wählt, daß $P(g)$ ein (auf einer Riemannschen Fläche liegendes) Bildgebiet ergibt, das möglichst gut die charakteristischen Eigenschaften der durch die $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$, speziell durch die $\mathfrak{f}^{(0)}(z)$ erzielten Bildgebiete verwirklicht. Man wird also $P(y)$ so wählen, daß die Schwankung des Imaginärteils, verglichen mit der Schwankung des Realteils, auf den Bilde B_y von $\dot{B}_z$ sehr klein ist. Es ist nicht schwer, diese Forderung neben der vorhin gestellten zu erfüllen. Daß dadurch allerdings (6) befriedigt wird, ist keineswegs leicht zu beweisen.

I. Vorbereitungen[6]).

§ 1.

Flächensätze. Hilfsmittel aus der Potentialtheorie.

1. K_w sei eine orientierte, geschlossene, stückweise analytische Kurve in der Ebene der komplexen Veränderlichen $w = u + iv$, oder auch eine endliche Anzahl solcher Kurven. Dann stellt das Integral

$$I_{K_w} = \int_{K_w} u\,dv = \frac{i}{2}\int_{K_w} w\,d\overline{w} \tag{7}$$

den von K_w umschlossenen Flächeninhalt dar, wenn dabei jedem Flächenelement $d\omega_w$ die Umlaufszahl β_{K_w} von K_w um dasselbe als Vielfachheit zugeschrieben wird; d. h. es ist

$$I_{K_w} = \int\int \beta_{K_w}(w)\,d\omega_w, \tag{8}$$

wo das Integral über die ganze w-Ebene zu erstrecken ist.

Für einfach geschlossene K_w ist dieser Satz aus den Elementen der Integralrechnung bekannt. Im allgemeinen Fall wird der Beweis leicht e

---

[6]) In diesem Abschnitt werden alle nachher benötigten Hilfsmittel in zweckmäßiger Form zusammengestellt. Es handelt sich dabei großenteils um bekannte Dinge.

acht, indem man K_w in einfach geschlossene Stücke zerlegt, etwa nach lgendem Verfahren: Man durchlaufe K_w von einem beliebigen Punkt w_0 us, bis man zum erstenmal ein geschlossenes Stück zurückgelegt hat. Dieses sse man weg (nicht aber einen etwa von w_0 bis zum Beginn desselben durchufenen Bogen). Man identifiziere nun die beiden Enden des verbleibenden ückes K'_w von K_w (die gleiche w-Koordinate haben, aber an K_w selbst als erschieden zu betrachten sind). Mit K'_w verfahre man ebenso. Nach endlich elen Schritten ist K_w in einfach geschlossene Kurven aufgelöst, denn K_w rlegt die Ebene bei den gemachten Voraussetzungen in endlich viele Teilbiete, und die Anzahl derselben nimmt bei jedem Schritt des geschilderten erfahrens ab (ausgenommen, wenn etwa mehrere geschlossene Stücke on K_w sich decken, ein Vorkommnis, das auch nur endlich oft aufeten kann).

2. Liegt die geschlossene, orientierte, stückweise analytische Kurve K_z der z-Ebene, und ist auf ihr eine eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $= \Phi(z)$ erklärt, die K_z auf K_w abbildet, so setzen wir

$$I_{K_z}(\Phi) = I_{K_w} = \int_{K_w} u\,dv = \frac{i}{2}\int_{K_z} \Phi(z)\,d\,\overline{\Phi(z)}. \tag{)}$$

K_z sei nun insbesondere der Rand B_z eines schlichten Gebietes $\mathfrak{B}_z$, und e Orientierung von B_z so, daß $\mathfrak{B}_z$ zur Linken liegt; $w = \Phi(z)$ sei in $\mathfrak{B}_z$ s auf endlich viele Pole regulär, im abgeschlossenen Bereich $\overline{\mathfrak{B}}_z$[7]) von den olen im Innern abgesehen, stetig differenzierbar und stückweise regulär. $_z$ wird durch $\Phi(z)$ auf ein Gebiet $\mathfrak{B}_w$ mit Rand B_w abgebildet, das im allgeeinen auf einer Riemannschen Fläche ausgebreitet ist. Die Anzahl der lätter $n(w)$, die dieses über einem bestimmten Punkt der schlichten w-Ebene esitzt, heiße dessen Bedeckungszahl (dabei wird ein Verzweigungspunkt mäß der Anzahl der um ihn sich windenden Blätter mehrfach gezählt); r jeden im endlichen liegenden Punkt w ist nach dem Argumentprinzip $(w) - n(\infty)$ die Umlaufszahl von B_w um w. Also ist nach (8) und (9)

$$I_{B_z}(\Phi) = \int\int (n(w) - n(\infty))\,d\omega_w. \tag{0}$$

Ist $\Phi(z)$ überall in $\mathfrak{B}_z$ regulär, so ist $n(\infty) = 0$, also $I_{B_z}(\Phi)$ einfach r Flächeninhalt von $\mathfrak{B}_w$, gemessen auf der Riemannschen Fläche. Insesondere ist also dann

$$I_{B_z}(\Phi) = \int_{Bz} u\,dv \geqq 0, \tag{1}$$

[7]) Durch Überstreichen des Zeichens für ein Gebiet bezeichnen wir hier und im genden stets den abgeschlossenen Bereich, der aus dem Gebiet und aus dessen Randnkten besteht.

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $\Phi = \text{const}$ in $\mathfrak{B}_z$. (11) gilt unter den allgemeinsten Voraussetzungen, unter denen das Integral einen Sinn hat. Das ist bekannt und kann im vorliegenden Zusammenhang etwa durch passende Approximation von Φ erschlossen werden.

3. $\mathfrak{B}_z$ sei nun speziell der Einheitskreis, Φ im Innern überall regulär und in $\overline{\mathfrak{B}}_z$ stetig und mit stetig differenzierbarem Imaginärteil versehen. Wir setzen $z = re^{i\vartheta}$. Nun ist $w = \Phi(z)$ schon allein durch $\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial r}$ auf $|z| = 1$ bis auf eine additive Konstante bestimmt; daher muß auch das Integral $I_{B_z}(\Phi)$ schon durch diese Randwerte allein auszudrücken sein. Wir wollen eine solche Darstellung herleiten.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{j}(\zeta; z, 0)$ eine Funktion, die in $|\zeta| \leqq 1$ bis auf einen Pol erster Ordnung bei 0 regulär und bis auf eine Nullstelle erster Ordnung bei z nullstellenfrei ist, und die auf $|\zeta| = 1$ rein reelle Randwerte hat. Man sieht leicht, daß

$$\mathfrak{j}(\zeta; z, 0) = \frac{(\zeta - z)(1 - \bar{z}\zeta)}{\zeta}$$

eine solche Funktion ist, und abgesehen von einem reellen konstanten Faktor die einzige. Nach dem Residuensatz ist

$$\Phi(z) - \Phi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = 1} \Phi(\zeta)\, d_\zeta \log \mathfrak{j}(\zeta; z, 0).$$

Durch Abspalten des Realteils folgt daraus:

$$u(z) - u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| = 1} v(\zeta)\, d \log |\mathfrak{j}(\zeta; z, 0)|,$$

und weiter durch partielle Integration:

$$u(z) - u(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta = 0}^{2\pi} \log |\mathfrak{j}(e^{i\vartheta}; z, 0)|\, dv.$$

Nun ist aber

$$\log |\mathfrak{j}(e^{i\vartheta}; z, 0)| = \log |e^{i\vartheta} - z| + \log |e^{-i\vartheta} - \bar{z}| = 2 \log |e^{i\vartheta} - z|,$$

und man erhält daher

$$u(z) - u(0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\vartheta = 0}^{2\pi} \log |e^{i\vartheta} - z|\, dv.$$

Dieses Integral existiert auch, wenn z auf $|z| = 1$ liegt, denn der Integrand wird nur für $e^{i\vartheta} = z$, und zwar nur logarithmisch unendlich; es stellt dann die Randwerte von $u(z)$ dar, die ja nach den über $\Phi(z)$ gemachten Voraussetzungen existieren.

Jetzt folgt sofort:

2) $$I_{B_z}(\Phi) = \int_{|z|=1} u\,dv = -\frac{1}{\pi}\int_{\vartheta'=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \log|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta'}|\,d_\vartheta v\,d_{\vartheta'} v.$$

4. Da bekanntlich zu stetig vorgegebenem $\frac{dv}{d\vartheta}$ mit

3) $$\int_0^{2\pi} \frac{dv}{d\vartheta}\,d\vartheta = 0$$

ne Funktion $\Phi = u + iv$ gehört, die den vorigen Voraussetzungen genügt, d für die $\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ auf $r = 1$ mit dem vorgegebenen $\frac{dv}{d\vartheta}$ übereinstimmt, so ist s in (12) rechts stehende Integral unter der Voraussetzung (13) stets nicht-gativ. Wir wollen zeigen, daß dies auch ohne (13) gilt; d. h. daß bei stetigem d mit 2π periodischem $\frac{dv}{d\vartheta}$ stets gilt:

4) $$(v, v) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta'}|\,dv(\vartheta)\,dv(\vartheta') \geqq 0.$$

Beweis. Wir betrachten das durch die Massenbelegung $\frac{1}{\pi}\frac{dv(\vartheta)}{d\vartheta}$ zeugte logarithmische Potential $u(z)$:

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int \log|e^{i\vartheta} - z|\,dv(\vartheta).$$

(z) ist für jedes endliche z mit $|z| \neq 1$ regulär harmonisch, und für alle end-hen z stetig. Die (nach der inneren wie nach der äußeren Normalen exi-ierende) Normalableitung auf $|z| = 1$ erleidet dort einen Sprung von der röße $2\frac{dv}{d\vartheta}$, d. h. es ist[8])

$$\left.\frac{\partial u(re^{i\vartheta})}{\partial r}\right|_{r=1-0} - \left.\frac{\partial u(re^{i\vartheta})}{\partial r}\right|_{r=1+0} = 2\frac{dv}{d\vartheta}.$$

der Umgebung von $z = \infty$ verhält sich $u(z)$ wie

$$-c\log|z| + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{d\vartheta}\,d\vartheta.$$

ın ist

$$(v, v) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\vartheta})\,dv(\vartheta) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} u\,u_{r-}\,d\vartheta - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} u\,u_{r+}\,d\vartheta,$$

[8]) Vgl. z. B. Kellogg, Foundations of potential theory, Berlin 1929, Chap. 6, . 5, 7.

wobei wir

$$u_{r-} = \left.\frac{\partial u(re^{i\vartheta})}{\partial r}\right|_{r=1-0}, \qquad u_{r+} = \left.\frac{\partial u(re^{i\vartheta})}{\partial r}\right|_{r=1+0}$$

setzen; bezeichnen wir nun mit t die zu u konjugierte harmonische Funktion und unterscheiden auf $|z| = 1$ durch die Indices $-$ und $+$ die von innen her und die von außen her bestimmten Randwerte, so können wir auch schreiben:

$$(v, v) = \tfrac{1}{2}\int u\, dt_- - \tfrac{1}{2}\int u\, dt_+.$$

Das erste Integral fällt unter den früher betrachteten Typus, ist also nach (11) nichtnegativ. Zur Abschätzung des zweiten Integrals betrachten wir die Funktion

$$U(z) = u(z) + c \log|z|.$$

Sie ist für $|z| > 1$, einschließlich $z = \infty$, regulär harmonisch, stetig für $|z| \geqq 1$, und es ist $U(\infty) = 0$. Also ist nach (11)

$$\int U\, dT \leqq 0,$$

wenn $T = t_+ - a\,\vartheta$ zu U konjugiert ist, und das Integral über $|z| = 1$ so erstreckt wird, daß das Äußere zur Rechten liegt. Auf $|z| = 1$ ist aber $U = u$ und daher folgt:

$$\begin{aligned}\int U\, dT &= \int (u - a\log|z|)\, d(t_+ - a\,\vartheta)\\ &= \int u\, dt_+ - a\int U\, d\vartheta = \int u\, dt_+ - 2\pi a\, U(\infty) = \int u\, dt_+\end{aligned}$$

Also ist

$$\int u\, dt_+ \leqq 0,$$

und damit ist (14) bewiesen.

5. Wir betrachten nun folgendes Funktional von zwei für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ erklärten, reellen, stetig differenzierbaren Funktionen $v_1(\vartheta)$ und $v_2(\vartheta)$ deren Ableitungen die Periode 2π besitzen:

$$(v_1, v_2) = -\frac{1}{\pi}\int_{\vartheta'=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \log|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta'}|\, dv_1(\vartheta)\, dv_2(\vartheta').$$

Für dieses Funktional gilt eine „Schwarzsche Ungleichung", nämlich:

$$(v_1, v_2)^2 \leqq (v_1, v_1)(v_2, v_2). \tag{15}$$

Beweis. Wir bilden

$$V(\vartheta) = \alpha\, v_1(\vartheta) + \beta\, v_2(\vartheta),$$

wo α und β beliebige reelle Konstanten sind. Dann ist nach (14)

$$(V, V) = \alpha^2(v_1, v_1) + 2\alpha\beta(v_1, v_2) + \beta^2(v_2, v_2) \geqq 0;$$

liegt also eine niemals negative quadratische Form in α und β vor, und die Behauptung ist einfach das bekannte Kriterium für eine solche.

Wir führen noch die folgende Bezeichnungsweise ein: Es sei $v_1(\vartheta)$ in einem Intervall erklärt, das $\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \Theta_1$ umfaßt, $v_2(\vartheta)$ in einem Intervall, das $\vartheta_2 \leqq \vartheta \leqq \Theta_2$ umfaßt. Dann setzen wir

$$(v_1 |_{\vartheta_1}^{\Theta_1}, v_2 |_{\vartheta_2}^{\Theta_2}) = -\frac{1}{\pi} \int_{\vartheta_2}^{\Theta_2} \int_{\vartheta_1}^{\Theta_1} \log |e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta'}| \, d v_1(\vartheta) \, d v_2(\vartheta'). \tag{6}$$

6. Es seien $A(x)$ und $a(x)$ stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktionen in $0 < x < 1$, die sich in 0 und 1 so verhalten mögen, daß die im folgenden auftretenden Integrale existieren. Aus der Formel für partielle Integration

$$\int_0^1 A(x) \, d a(x) = [A(x) a(x)]_0^1 - \int_0^1 a(x) \, d A(x)$$

folgt dann: Wenn in $0 < x < 1$

$$A(x) > 0, \qquad \frac{d A(x)}{d x} < 0, \tag{7}$$

$$a(x) \geqq a(0), \tag{8}$$

ist, so ist

$$\int_0^1 A(x) \, d a(x) \geqq 0. \tag{9}$$

(Man darf $a(0) = 0$, $a(x) \geqq 0$ voraussetzen.)

Ferner folgt: Wenn in $0 < x < 1$ gilt

$$|A(x)| \leqq A_0, \quad |A'(x)| \leqq A_0', \quad \text{Schwankung } a(x) \leqq a_0,$$

ist

$$\left| \int_0^1 A(x) \, d a(x) \right| \leqq (2 A_0 + A_0') a_0. \tag{10}$$

(Man darf $0 \leqq a(x) \leqq a_0$ voraussetzen.)

7. Ist $v(\vartheta)$ in $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{6}$ definiert und mit stückweise stetiger Ableitung versehen, und gilt dasselbe

$$v(\vartheta) \geqq v(0)$$

ist, wenn man

$$u(\vartheta') = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \log |e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta'}| \, d v(\vartheta) \tag{11}$$

setzt:

$$(22) \qquad u(\vartheta') \geqq 0, \qquad \frac{du}{d\vartheta'} \geqq 0 \quad \text{in} \quad -\frac{\pi}{6} \leqq \vartheta' \leqq 0.$$

Beweis. Setzen wir

$$(23) \qquad S(\vartheta, \vartheta') = -\log|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta'}| = -\log 2 \sin\frac{\vartheta - \vartheta'}{2},$$

so ist:

$$\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta - \vartheta'}{2}, \quad \frac{\partial S}{\partial \vartheta'} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta - \vartheta'}{2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \vartheta\, \partial \vartheta'} = \frac{-1}{4\sin^2\frac{\vartheta - \vartheta'}{2}}.$$

Daher erfüllen S und $\frac{\partial S}{\partial \vartheta'}$ als Funktionen von ϑ die Voraussetzung (17) übe $A(x)$, während $v(\vartheta)$ die Voraussetzung (18) über $a(x)$ erfüllt; daher folge die Behauptungen sofort aus (19).

Ist ferner $v(\vartheta)$ für $-\frac{\pi}{6} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{6}$ erklärt und ist dort in $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{6}$ $v(\vartheta) - v(0) \geqq 0$, in $-\frac{\pi}{6} \leqq \vartheta \leqq 0$ $v(0) - v(\vartheta) \geqq 0$, so ist (vgl. (16))

$$(24) \qquad (v|_0^{\frac{\pi}{6}}, v|_{-\frac{\pi}{6}}^0) \geqq 0.$$

Beweis. Es ist mit (23):

$$(v|_0^{\frac{\pi}{6}}, v|_{-\frac{\pi}{6}}^0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} S(\vartheta, \vartheta')\, dv(\vartheta)\, dv(\vartheta') = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\frac{\pi}{6}} u(\vartheta')\, d(-v(\vartheta')),$$

wo $u(\vartheta')$ durch (21) erklärt ist; nach (22) erfüllen $u(\vartheta')$ und $\frac{du}{d(-\vartheta')}$ d Voraussetzungen (17), und ferner gilt für $-(v(\vartheta') - v(0))$ nach Voraussetzun die Ungleichung (18), woraus die Behauptung nach (19) folgt.

8. Sind die Funktionen

$$T(\sigma, \tau) \text{ und } s(\sigma), t(\tau) \text{ in } 0 \leqq \sigma \leqq 1,\ 0 \leqq \tau \leqq 1$$

zweimal bzw. einmal stetig differenzierbar, und ist die Schwankung von s un t daselbst nicht größer als m bzw. m', so gilt, wenn M eine gemeinsame Schrank für $|T|$, $\left|\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right|$, $\left|\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 T}{\partial \sigma\, \partial \tau}\right|$ ist:

$$(25) \qquad \left|\int_0^1\int_0^1 T(\sigma, \tau)\, ds(\sigma)\, dt(\tau)\right| \leqq 9 M m m'.$$

Beweis. Setzen wir

$$X(\tau) = \int_0^1 T(\sigma, \tau)\, ds(\sigma),$$

) ist das abzuschätzende Integral

$$J = \int_0^1 X(\tau)\, d\, t(\tau).$$

us (20) folgt

$$X(\tau) \leqq 3\,M\,m, \qquad \left|\frac{d\,X}{d\,\tau}\right| \leqq 3\,M\,m;$$

orauf nochmalige Anwendung derselben Formel die Behauptung ergibt.

§ 2.

Spezielle Abbildungsfunktionen.

1. $\mathfrak{B}_z$ sei ein endlichvielfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene, ür das ∞ innerer Punkt ist; keine Komponente $B_z^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ seines andes B_z sei in einen Punkt ausgeartet.

Zu jedem vorgegebenen Polynom in z:

26) $$Q_m(z) = x_m z^m + x_{m-1} z^{m-1} + \ldots + x_0$$

ibt es genau eine in $\mathfrak{B}_z$ überall eindeutige und bis auf einen Pol bei $z = \infty$ eguläre Funktion $f^{(\alpha)}(z)$, deren Hauptteil bei $z = \infty$ [9]) mit Q_m übereinstimmt, nd die jeder Randkomponente $B_z^{(\nu)}$ ein Stück auf einer (von ν abhängigen) eraden entsprechen läßt, die mit der reellen Achse einen gegebenen von ν nabhängigen Winkel α $(0 \leqq \alpha < \pi)$ einschließt[10]).

Beweis. Wir setzen vorerst voraus, daß die Randkomponenten von $\mathfrak{B}_z$ uter einfach geschlossene analytische Kurven sind. Wir bilden zunächst urch Lösung der entsprechenden Randwertaufgabe für den Imaginärteil iejenige in $\mathfrak{B}_z$ überall reguläre Funktion $g(z)$ mit eindeutigem und in $\overline{\mathfrak{B}_z}$ etigem Imaginärteil, für die dieser auf dem Rande übereinstimmt mit

$$\Im\,(e^{-i\alpha} Q_m(z)).$$

er Realteil von $g(z)$ ist im allgemeinen nicht eindeutig, er besitzt vielmehr ir jede Randkomponente $B_z^{(\nu)}$ eine gewisse Periode π_ν, d. h. er erfährt beim mlauf um $B_z^{(\nu)}$ im positiven Sinn den Zuwachs π_ν; dabei ist bekanntlich $\sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu = 0$. Diese Perioden beseitigt man in bekannter Weise mittels der unktionen $l_\nu(z)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, die folgendermaßen erklärt sind: $l_\nu(z)$ ist iejenige in $\mathfrak{B}_z$ überall reguläre Funktion mit eindeutigem und in $\overline{\mathfrak{B}_z}$ stetigem naginärteil, für die dieser auf $B_z^{(\nu)}$ die Randwerte 1, auf allen $B_z^{(\mu)}$ mit $\mu \neq \nu$

[9]) Zum Hauptteil rechnen wir auch das konstante Glied.

[10]) Der Beweis verläuft ganz analog wie in dem Spezialfall $Q_m(z) = z$; vgl. die (3) zitierte Arbeit von Koebe.

die Randwerte 0 besitzt. Auch ihre Realteile besitzen gewisse Perioden, und man kann eine Funktion

$$l(z) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu l_\nu(z)$$

mit reellen c_ν bilden, deren Perioden mit denen von $g(z)$ übereinstimmen. Dann ist

$$\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z) = e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha} Q_m(z) - g(z) + l(z)\right) = Q_m(z) - e^{i\alpha}\left(g(z) - l(z)\right)$$

die gesuchte Funktion. Der Beweis für ihre Einzigkeit wird genau so erbracht, wie in dem speziellen Falle $Q_m(z) = z$, für den er bekannt ist[11]).

Ist der Rand von $\mathfrak{B}_z$ nicht durchweg analytisch, so bilde man dieses Gebiet durch eine Funktion $z = z(\zeta)$ mit der Entwicklung

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots \tag{27}$$

bei $\zeta = \infty$ schlicht ab auf ein Gebiet $\mathfrak{B}_\zeta$ der ζ-Ebene, für das obige Voraussetzung gilt; dies ist bekanntlich durch wiederholte Anwendung des Riemannschen Abbildungssatzes stets möglich. Durch Einsetzen von (27) in $Q_m(z)$ erhält man

$$Q_m(z) = \widetilde{Q}_m(\zeta) = Q_m^*(\zeta) + (\!(0)\!),$$

wo $Q_m^*(\zeta)$ den Hauptteil von $\widetilde{Q}_m(\zeta)$, also $(\!(0)\!)$ eine bei ∞ verschwindende, überall in $\mathfrak{B}_\zeta$ reguläre und eindeutige Funktion bezeichnet. Nach dem vorhin Bewiesenen existiert eine in $\mathfrak{B}_\zeta$ bis auf $\zeta = \infty$ reguläre und eindeutige Funktion $\mathfrak{f}^{(\alpha)*}(\zeta)$, die auf dem Rande das für $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ auf B_z vorgeschriebene Verhalten zeigt, und deren Laurententwicklung bei ∞ den Hauptteil $Q_m^*(\zeta)$ besitzt. $\mathfrak{f}^{(\alpha)*}(\zeta)$ unterscheidet sich also von $\widetilde{Q}_m(\zeta)$ nur um eine in $\mathfrak{B}_\zeta$ und insbesondere in ∞ reguläre Funktion, $R(\zeta)$:

$$\mathfrak{f}^{(\alpha)*}(\zeta) = \widetilde{Q}_m(\zeta) + R(\zeta).$$

Setzt man hier für ζ die Umkehrung von (27) ein, so erhält man aus $\widetilde{Q}_m(\zeta)$ wieder $Q(z)$, aus $R(\zeta)$ eine überall in $\mathfrak{B}_z$ reguläre Funktion, und die Summe zeigt das für $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ vorgeschriebene Randverhalten. Die Einzigkeit von $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ folgt sofort aus der von $\mathfrak{f}^{(\alpha)*}(\zeta)$.

2. Es sei $\mathfrak{B}_{z,k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ eine aufsteigende Folge von Gebieten, die samt ihren durchweg analytisch vorausgesetzten Randkurven ganz im Innern von $\mathfrak{B}_z$ liegen und dieselbe Zusammenhangszahl wie $\mathfrak{B}_z$ haben sollen, jeder innere Punkt von $\mathfrak{B}_z$ gehöre zu fast allen, der Punkt ∞ zu allen $\mathfrak{B}_{z,k}$. Bezeichnet dann $\mathfrak{f}_k^{(\alpha)}(z)$ die zu einem bestimmten $Q_m(z)$ gehörige Funktion für das Gebiet $\mathfrak{B}_{z,k}$, deren Existenz in §2, 1 bewiesen worden ist, $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ di

[11]) Vgl. Koebe, loc. cit.

demselben $Q_m(z)$ gehörige derartige Funktion für $\mathfrak{B}_z$, so gilt gleichmäßig jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{B}_z$:

3) $$\lim_{k \to \infty} \mathfrak{f}_k^{(\alpha)}(z) = \mathfrak{f}^{(\alpha)}(z).$$

ßerdem konvergieren die Koeffizienten der Laurententwicklungen der $\mathfrak{f}_k^{(\alpha)}$ i ∞ gegen die entsprechenden Koeffizienten der Laurententwicklungen n $\mathfrak{f}^{(\alpha)}$.

Beweis. Wir dürfen uns auf den Fall beschränken, in dem $\mathfrak{B}_z$ lauter alytische Randkurven hat; denn bei einer nötigenfalls zwischengeschalteten lfsabbildung von $\mathfrak{B}_z$ auf ein Gebiet, das diese Voraussetzung erfüllt, wird den sonstigen Voraussetzungen des Satzes nichts geändert.

$\overline{\mathfrak{B}_z^*}$ sei ein beliebiger, fester abgeschlossener Teilbereich von $\mathfrak{B}_z$. Ist k nreichend groß, so gilt auf jeder Randkomponente $B_{z,k}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ n $\mathfrak{B}_{z,k}$:

$$\Im\left(e^{-i\alpha}\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z) - ic_\nu\right) \leqq \varepsilon$$

i beliebig klein vorgegebenem ε, wo c_ν der Wert des Imaginärteils von $^{i\alpha}\mathfrak{f}^{(\alpha)}$ auf $B_z^{(\nu)}$ ist und $B_{z,k}^{(\nu)}$ diejenige Randkomponente von $\mathfrak{B}_{z,k}$ ist, die $^{\nu)}$ umschließt. $c_{\nu k}$ sei der konstante Wert des Imaginärteils von $e^{-i\alpha}\mathfrak{f}_k^{(\alpha)}(z)$ f $B_{z,k}^{(\nu)}$. Die Funktion

$$e^{-i\alpha}\left(\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z) - \mathfrak{f}_k^{(\alpha)}(z)\right) = g_k(z)$$

also in $\mathfrak{B}_k$ einschließlich Rand überall regulär, verschwindet bei $z = \infty$ d besitzt bei hinreichend großem k auf $B_{z,k}^{(\nu)}$ einen Imaginärteil, der bei iebig klein vorgegebenem ε daselbst von der Konstanten $c_\nu - c_{\nu k}$ um niger als ε abweicht. $c_\nu - c_{\nu k}$ geht gegen 0 mit $k \to \infty$ für jedes ν, denn dernfalls bestände bei hinreichend kleinem ε und beliebig großem k die aus n ε-Umgebungen des Punktes $w = 0$ und der Geraden $\Im(w) = c_\nu - c_{\nu k}$ $\nu = 1, \ldots, n$ gebildete Punktmenge aus mindestens zwei nicht zusammen-ngenden Teilmengen; es gäbe also in der w-Ebene Parallelen zur reellen hse, die den Rand des Wertevorrates von $w = g_k(z)$ in $\mathfrak{B}_{z,k}$ und also ch diesen Wertevorrat selbst nicht treffen, jedoch $g_k(\infty) = 0$ von $w = g_k(z)$ t z auf einem geeigneten $B_{z,k}^{(\nu)}$ trennen, was nicht möglich ist. Somit gilt erall auf dem Rande von $\mathfrak{B}_{z,k}$ bei beliebig klein vorgegebenem positivem ε'

$$|\Im(g_k(z))| < \varepsilon'$$

hinreichend großem k. Dasselbe gilt daher auch überall im Innern von $_k$; daher gilt $\Im(g_k(z)) \to 0$ in einem gewissen von k unabhängigen Bereich, $\overline{\mathfrak{B}^*}$ in seinem Innern enthält. Daraus folgt für $\overline{\mathfrak{B}^*}$ gleichmäßig: $g_k(z) \to 0$[12]),

[12]) Für den Schluß von der Konvergenz des Imaginärteils auf die Konvergenz Funktion selbst vgl. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2. Aufl., rlin 1931, S. 65.

womit die erste Behauptung bewiesen ist. Die zweite folgt daraus in be kannter Weise.

3. Die Funktionen $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ lassen sich aus speziellen unter ihnen aufbauen Bezeichnen wir nämlich mit

$$\mathfrak{x}_m^{(\alpha)}(z) = z^m + \frac{a_{m1}^{(\alpha)}}{z} + \frac{a_{m2}^{(\alpha)}}{z^2} + \cdots$$

diejenige Funktion $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$, die zu $Q_m(z) = z^m$ gehört und setzen $\mathfrak{x}_0^{(\alpha)}(z) =$ so ist die zu (26) mit $x_\mu = |x_\mu| e^{i\vartheta_\mu}$ gehörige Funktion darstellbar durc

$$\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z) = \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu \mathfrak{x}_\mu^{(\alpha - \vartheta_\mu)}(z). \tag{28}$$

Man überzeugt sich nämlich leicht, daß diese Funktion alle für $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ charak teristischen Eigenschaften besitzt.

Aber auch die $\mathfrak{x}_m^{(\alpha)}(z)$ lassen sich noch aus spezielleren aufbauen. W setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_m(z) &= \frac{\mathfrak{x}_m^{(0)}(z) + \mathfrak{x}_m^{\frac{\pi}{2}}(z)}{2} = z^m + \frac{b_{m1}}{z} + \cdots, \\ \mathfrak{z}_m(z) &= \frac{\mathfrak{x}_m^{(0)}(z) - \mathfrak{x}_m^{\frac{\pi}{2}}(z)}{2} = \frac{c_{m1}}{z} + \cdots. \end{aligned} \tag{29}$$

Dieses Paar von Funktionen ist eindeutig charakterisiert durch die folgende Eigenschaften:

1. Sie sind in $\mathfrak{B}_z$ eindeutig, und, ausgenommen $z = \infty$ für $\mathfrak{y}_m$, regulä
2. der Hauptteil von $\mathfrak{y}_m$ bei $z = \infty$ ist z^m;
3. auf $B_z^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gilt

$$\mathfrak{z}_m = \overline{\mathfrak{y}_m(z)} + d_{m\nu}, \tag{30}$$

wo die $d_{m\nu}$ passende Konstanten sind.

Beweis. Die Gültigkeit von 1. und 2. für die durch (29) definierte Funktionen folgt unmittelbar aus dem Verhalten der $\mathfrak{x}$. Zum Beweise von beachte man, daß, immer abgesehen von auf jedem $B_z^{(\nu)}$ konstanten Größe $\mathfrak{y}_m$ und $\mathfrak{z}_m$ für z auf B_z denselben Realteil haben wie $\mathfrak{x}_m^0$, dagegen $\mathfrak{y}_m$ denselbe und $\mathfrak{z}_m$ entgegengesetzten Imaginärteil wie $\mathfrak{x}_m^{\frac{\pi}{2}}$.

Daß auch nur die Funktionen (29) die Eigenschaften 1. bis 3. habe folgt sofort daraus, daß man aus ihnen $\mathfrak{x}_m^0$ und $\mathfrak{x}_m^{\frac{\pi}{2}}$ durch Auflösen von (2 darstellen kann; verschiedenen Paaren $\mathfrak{y}_m$, $\mathfrak{z}_m$ würden auch verschieden Paare $\mathfrak{x}_m^0$, $\mathfrak{x}_m^{\frac{\pi}{2}}$ entsprechen.

Nun besitzt offenbar die Funktion

$$\frac{x_m^{(0)}(z) + i t \overline{x_m^{\pi^2}(z)}}{1 + i t} = \mathfrak{y}_m(z) + \frac{1 - i t}{1 + i t}\mathfrak{z}_m(z) = \mathfrak{y}_m(z) + e^{2i\alpha}\mathfrak{z}_m(z)$$

ei reellem t alle für $x_m^{(\alpha)}(z)$ charakteristischen Eigenschaften, wobei

$$\alpha = -\operatorname{amp}(1 + i t) = \operatorname{amp}(1 - i t) = \frac{1}{2}\operatorname{amp}\frac{1 - i t}{1 + i t}.$$

lso ist

$$x_m^{(\alpha)}(z) = \mathfrak{y}_m(z) + e^{2i\alpha}\mathfrak{z}_m(z)$$

nd das zu (26) gehörige $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ ist nach (28)

1) $$\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z) = \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu \mathfrak{y}_\mu(z) + \sum_{\mu=0}^{m} e^{2i(\alpha - \vartheta_\mu)} x_\mu \mathfrak{z}_\mu(z)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu \mathfrak{y}_\mu(z) + e^{2i\alpha}\sum_{\mu=0}^{m} \overline{x_\mu}\,\mathfrak{z}_\mu(z).$$

ie Entwicklung dieser Funktion bei $z = \infty$ ist

2) $$\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z) = \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu z^\mu + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{a}_\nu^{(\alpha)}}{z^\nu}, \qquad \mathfrak{a}_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu \mathfrak{b}_{\mu\nu} + e^{2i\alpha}\sum_{\mu=0}^{m}\overline{x_\mu}\,\mathfrak{c}_{\mu\nu}.$$

4. Wir wollen nun die folgenden Eigenschaften der Koeffizientensysteme
$_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$ beweisen: Die Matrix

$$(\nu\,\mathfrak{b}_{\mu\nu})$$

t symmetrisch; die Matrix

$$(\nu\,\mathfrak{c}_{\mu\nu})$$

t Hermitesch, und die zu den Abschnitten der zweiten gehörigen Hermite-
hen Formen

3) $$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu\,\mathfrak{c}_{\mu\nu} x_\mu \overline{x_\nu}$$

nd positiv definit im strengen Sinne.

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, daß $\mathfrak{B}_z$ von analytischen Kurven
randet sei; wir bilden die Integrale

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}_z} \mathfrak{y}_\nu(z)\,d\,\mathfrak{y}_\mu(z), \qquad I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}_z} \mathfrak{y}_\nu(z)\,d\,\mathfrak{z}_\mu(z).$$

ach dem Residuensatz ist

$$I_1 = \nu\,\mathfrak{b}_{\mu\nu} - \mu\,\mathfrak{b}_{\nu\mu}, \qquad I_2 = \nu\,\mathfrak{c}_{\mu\nu}.$$

egen (30) ist andererseits

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}_z} \overline{\mathfrak{z}_\nu(z)}\,d\,\overline{\mathfrak{z}_\mu(z)} = -\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}_z} \mathfrak{z}_\nu(z)\,d\,\mathfrak{z}_\mu(z)} = 0,$$

da die $\mathfrak{z}_\mu$ regulär und eindeutig in $\mathfrak{B}_z$ sind. Damit ist die erste Behauptung bewiesen. — Ferner ist

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_z} \overline{\mathfrak{z}_\nu(z)\, d\,\mathfrak{y}_\mu(z)} = \overline{\frac{-1}{2\pi i}\int_{B_z} \mathfrak{z}_\nu(z)\, d\,\mathfrak{y}_\mu(z)} = \mu\,\overline{c_{\nu\mu}},$$

womit die zweite Behauptung bewiesen ist.

Zum Beweise der Definitheit der Formen (33) bilden wir mit beliebigen komplexen Größen x die Funktion

$$\mathfrak{Z} = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu \mathfrak{z}_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{C}_\lambda}{z^\lambda}, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{C}_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu c_{\mu\lambda}.$$

$\mathfrak{Z}$ ist sicher keine Konstante, denn andernfalls besäße wegen (30) auch

$$\sum_{\mu=1}^{m} \overline{x_\mu}\,\mathfrak{y}_\mu$$

auf jeder Komponente $B^{(\nu)}$ konstante Randwerte, wäre also selbst eine Konstante, was unmöglich ist, da diese Funktion bei $z = \infty$ einen Pol hat. Also ist nach (11), und weiter wieder nach (30) und dem Residuensatz:

$$0 < I_{B_z}(\mathfrak{Z}) = \frac{i}{2}\int_{B_z} \mathfrak{Z}\, d\,\overline{\mathfrak{Z}} = \frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{m} \overline{x_\mu}\int_{B_z} \mathfrak{Z}\, d\,\overline{\mathfrak{z}_\mu} = \frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{m} \overline{x_\mu}\int_{B_z} \mathfrak{Z}\, d\,\mathfrak{y}_\mu.$$

$$= \pi \sum_{\mu=1}^{m} \mu\, \overline{x_\mu}\,\mathfrak{C}_\mu = \pi \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu\, c_{\mu\nu}\, x_\mu\, \overline{x_\nu}.$$

Ist B_z nicht durchweg analytisch, so führt man den Beweis auf Grund von § 2, 2, indem man $\mathfrak{B}_z$ durch Teilbereiche ausschöpft, die der Voraussetzung genügen und samt ihren Rändern ganz im Innern von $\mathfrak{B}_z$ liegen.

5. Ist $\mathfrak{B}_z$ das Äußere des Einheitskreises, so lassen sich die Funktionen $\mathfrak{y}(z)$ und $\mathfrak{z}(z)$, also die $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ ohne Mühe angeben. Es ist

$$\mathfrak{x}_m^{(0)}(z) = z^m + \frac{1}{z^m}, \qquad \mathfrak{x}_m^{\frac{\pi}{2}} = z^m - \frac{1}{z^m},$$

also nach (29)

$$(34) \qquad \mathfrak{y}_m(z) = z^m, \quad \mathfrak{z}_m(z) = \frac{1}{z^m}; \qquad b_{\mu\nu} = 0, \quad c_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu, \\ 1 & \mu = \nu. \end{cases}$$

§ 3.

Die Faberschen Polynome.

1. Es sei $y = f_1(z)$ eine in dem Gebiet $\mathfrak{B}_z$ überall, ausgenommen ∞, reguläre eindeutige Funktion; ihre Entwicklung bei $z = \infty$ sei

$$(35) \qquad f_1(z) = z + \frac{a_{11}}{z} + \frac{a_{12}}{z^2} + \cdots.$$

r werden Polynome in $f_1(z)$ zu bilden und ihre Entwicklung nach Potenzen
n z bei $z = \infty$ in Betracht zu ziehen haben. Um übersichtliche Verhält-
se zu bekommen, werden wir diese Polynome aus speziellen, den Faberschen
lynomen, aufbauen. Das m-te Fabersche Polynom $p_m(y)$ zu $f_1(z)$ ist
durch charakterisiert, daß der Hauptteil von $p_m(f_1(z)) = f_m(z)$ bei $z = \infty$
ade z^m ist[13]); die Entwicklung dieser Funktion daselbst sieht also so aus:

$$f_m(z) = p_m(f_1(z)) = z^m + \frac{a_{m1}}{z} + \frac{a_{m2}}{z^2} + \cdots. \tag{5}$$

r setzen ferner $p_0(y) = f_0(z) = 1$. Es gibt bei vorgegebenem $f_1(z)$ genau
solches System $p_m(y)$. Daß es höchstens eines geben kann, sieht man
cht daraus, daß die Differenz zweier verschiedener Polynome $p_m(y)$ nach
nsetzen von $y = f_1(z)$ bei $z = \infty$ nicht verschwinden könnte, wie doch
) fordert. Daß es ein solches System gibt, beweist man durch Induktion:
$(y) = 1$ und $p_1(y) = y$ existieren; ist die Existenz von $p_m(y)$ für $m \leqq m_0$
wiesen, dann bilde man $(f_1(z))^{m_0+1}$; seine Entwicklung bei $z = \infty$ beginnt
t z^{m_0+1}; die niedrigeren Potenzen des Hauptteils kann man durch Sub-
ktion einer linearen Verbindung von $f_0(z), \ldots, f_{m_0}(z)$ eliminieren; man
ält so eine Funktion, die als Polynom in $f_1(z)$ darstellbar ist, und deren
uptteil bei $z = \infty$ gerade z^{m_0+1} ist; dieses Polynom ist dann das gesuchte
$_{0+1}(y)$.

Liegt nun ein beliebiges Polynom in $f_1(z)$ vor:

$$f(z) = P(f_1(z)) = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu z^\mu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu},$$

läßt es sich als lineare Verbindung der $f_\mu(z)$ schreiben:

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu f_\mu(z),$$

d es ist

$$a_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu a_{\mu\nu}. \tag{7}$$

2. Wir beweisen nun: Die Matrix

$$(\nu a_{\mu\nu})$$

symmetrisch.

Wir bilden zu diesem Zweck das Integral

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_z'} f_\nu(z)\, d f_\mu(z),$$

[13]) Siehe G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome, Journ. reine angew. Math.
(1920), S. 79—106, insbesondere S. 81—83.

wo B_z' eine beliebige ganz in $\mathfrak{B}_z$ verlaufende einfach geschlossene Kurve ist, die ∞ von B_z trennt. Nach dem Residuensatz ist

$$I_3 = \nu a_{\mu\nu} - \mu a_{\nu\mu}.$$

Andererseits ist

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_z'} p_\nu(f_1(z))\, p_\mu'(f_1(z))\, d f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int p_\nu(y)\, p_\mu'(y)\, d y = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

II. Notwendige und hinreichende Koeffizienten-Bedingungen für schlicht abbildende Funktionen.

§ 4.

Der Hauptsatz.

Wir werden nun den folgenden Satz beweisen:

Die Funktion $y = f_1(z)$ sei in dem endlich vielfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{B}_z$, das $z = \infty$ enthält, eindeutig und regulär bis auf einen Pol bei $z = \infty$ woselbst ihre Entwicklung laute

$$f_1(z) = z + \frac{a_{11}}{z} + \frac{a_{12}}{z^2} + \cdots.$$

Dafür, daß $f_1(z)$ das Gebiet $\mathfrak{B}_z$ schlicht abbildet, ist die Gesamtheit der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$(38) \qquad \Big| \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu (a_{\mu\nu} - \mathfrak{b}_{\mu\nu})\, x_\mu x_\nu \Big| \leqq \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu\, \mathfrak{c}_{\mu\nu}\, x_\mu \overline{x_\nu} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

wobei die $a_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$ die in § 2 und 3 (vgl. (29) und (36)) erklärten Koeffizienten und die x_μ beliebige komplexe Größen sind. Zu jedem Randpunkt des Kreises, auf den danach der Wertevorrat der in (38) links stehenden quadratischen Form bei festen x_μ beschränkt ist, wenn für $f_1(z)$ die Gesamtheit der schlichten Funktionen zugelassen ist, gehören gewisse schlichte Funktionen, für die der Wert dieser Form in diesen Randpunkt fällt; eine solche Funktion bildet $\mathfrak{B}$ auf einen Schlitzbereich ab, dessen Schlitze einem isothermen System algebraischer Kurven angehören.

Falls $\mathfrak{B}_z$ das Äußere des Einheitskreises ist, so gehen nach (34) die Bedingungen (38) über in

$$\Big| \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu \Big| \leqq \sum_{\nu=1}^{m} \nu\, |x_\nu|^2.$$

Für $m = 1$ ist das eine bekannte Folgerung aus dem zweiten Bieberbachschen Flächensatz, während (38) für $m = 1$ die in der Einleitung bewiesene Verallgemeinerung darstellt.

§ 5.

Die Notwendigkeit der Bedingungen.

Wir beweisen die Notwendigkeit unserer Bedingungen zunächst unter
Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}_z$ von lauter analytischen Kurven berandet wird
d daß $f_1(z)$ auch auf dem Rande noch regulär ist.

Es sei $w = f(z)$ eine in $\mathfrak{B}_z$ überall bis auf einen Pol bei $z = \infty$ reguläre
deutige Funktion, die $\mathfrak{B}_z$ auf ein Gebiet $\mathfrak{B}_w$ abbildet, das jeden Punkt
chstens so oft bedeckt, wie den Punkt $w = \infty$. Dann ist nach (10)

$$I_{B_z}(f) \leqq 0,$$

d das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn es in der w-Ebene
ine Punktmenge von positivem Flächenmaß gibt, deren Bedeckungszahl
einer als die von $w = \infty$ ist. Mit $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ mit beliebigem α $(0 \leqq \alpha < \pi)$ be-
chnen wir nun speziell diejenige der in § 2 eingeführten Funktionen, deren
auptteil bei $z = \infty$ mit dem von $f(z)$ übereinstimmt; dann setzen wir

$$F(z) = f(z) - \mathfrak{f}^{(\alpha)}(z).$$

ese Funktion ist überall in $\mathfrak{B}_z$ regulär, und daher gilt nach (11)

$$I_{B_z}(F) \geqq 0,$$

d das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $f(z) \equiv \mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ ist;
nn ist aber insbesondere auch die Bedingung für die Gültigkeit des Gleich-
itszeichens in (39) erfüllt. Nun ist ferner:

$$I_{B_z}(F) = \frac{i}{2}\int_{B_z} F\,d\,\overline{F} = \frac{i}{2}\int_{B_z} (f - \mathfrak{f}^{(\alpha)})\,d\,(\overline{f} - \overline{\mathfrak{f}^{(\alpha)}})$$

$$= \frac{i}{2}\int_{B_z} f\,d\,\overline{f} - \frac{i}{2}\int_{B_z} \mathfrak{f}^{(\alpha)}\,d\,\overline{f} - \frac{i}{2}\int_{B_z} f\,d\,\overline{\mathfrak{f}^{(\alpha)}} + \frac{i}{2}\int_{B_z} \mathfrak{f}^{(\alpha)}\,d\,\overline{\mathfrak{f}^{(\alpha)}}.$$

as erste dieser vier Integrale ist $I_{B_z}(f)$, das letzte $I_{B_z}(\mathfrak{f}^{(\alpha)}) = 0$. Ferner ist

$$\frac{i}{2}\int \mathfrak{f}^{(\alpha)}\,d\,\overline{f} = -\frac{i}{2}\int \overline{f}\,d\,\mathfrak{f}^{(\alpha)} = \overline{\frac{i}{2}\int f\,d\,\overline{\mathfrak{f}^{(\alpha)}}},$$

d es folgt:

$$I_{B_z}(F) = I_{B_z}(f) - \Re\,(i\int f\,d\,\overline{\mathfrak{f}^{(\alpha)}}).$$

uf B_z gilt:

$$d\,\overline{\mathfrak{f}^{(\alpha)}} = e^{-2i\alpha}\,d\,\mathfrak{f}^{(\alpha)};$$

mit folgt:

$$\frac{1}{2\pi}(I_{B_z}(f) - I_{B_z}(F)) = -\Re\left(\frac{e^{-2i\alpha}}{2\pi i}\int_{B_z} f\,d\,\mathfrak{f}^{(\alpha)}\right).$$

Nach (39) und (41) ist

$$I_{B_z}(f) - I_{B_z}(F) \leqq 0, \tag{43}$$

und nach der im Anschluß an (41) gemachten Bemerkung gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $f(z) \equiv \mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$.

Die rechte Seite von (42) können wir nach dem Residuensatz auswerten. Die Laurententwicklung von $f(z)$ bei $z = \infty$ sei:

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu z^\mu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu},$$

diejenige von $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$:

$$\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z) = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu z^\mu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_\nu^{(\alpha)}}{z^\nu}.$$

Zu dem Residuum von $f(z)\frac{d\,\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)}{dz}$ liefert jedes Glied $x_\mu z^\mu$ des Hauptteils von $f(z)$ einen Beitrag, und zwar $\mu x_\mu \mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)}$; ferner liefert jedes Glied $x_\mu z^\mu$ des Hauptteils von $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ den Beitrag $-\mu x_\mu a_\mu$, so daß also aus (42) und (43) folgt:

$$\Re\left(e^{-2i\alpha} \sum_{\mu=1}^{m} \mu x_\mu (a_\mu - \mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)})\right) \leqq 0, \tag{44}$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $f(z) \equiv \mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ gilt.

Ist nun $f_1(z)$ eine in $\mathfrak{B}_z$ schlichte Funktion, deren Entwicklung bei $z = \infty$ die Form (35) hat, $f(z) = P(f_1(z))$ irgendein Polynom in $f_1(z)$, so besitzt diese Funktion alle eben für $f(z)$ vorausgesetzten Eigenschaften; wir bauen sie gemäß § 3, 1 aus den Faberschen Polynomen in $f_1(z)$ auf; ebenso bauen wir $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ aus den $\mathfrak{x}_\mu^\beta(z)$ gemäß § 2, 3 auf. Setzen wir nun in (44) für die a_μ und die $\mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)}$ die Ausdrücke (37) und (32) ein, so ergibt sich

$$\Re\left(e^{-2i\alpha} \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu (a_{\mu\nu} - \mathfrak{b}_{\mu\nu}) x_\mu x_\nu\right) \leqq \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu\, \mathfrak{c}_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu. \tag{45}$$

Da diese Ungleichung für jedes α gilt, so folgt sofort (38).

Bei gegebenen x_μ gilt in (45) dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn die Funktion $f_1(z)$ so beschaffen ist, daß dasjenige (durch die x_μ und $f_1(z)$ eindeutig festgelegte) Polynom in $f_1(z)$, $P(f_1(z))$, dessen Hauptteil bei $z = \infty$ $\sum x_\mu z^\mu$ ist, das für $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ vorgeschriebene Randverhalten aufweist. Die Abschätzung (45) ist also dann und nur dann scharf, wenn es ein solches $f_1(z)$ gibt. Wir werden später zeigen, daß das stets der Fall ist.

Ist der Rand von $\mathfrak{B}_z$ nicht durchweg analytisch, oder ist $f(z)$ auf dem Rande nicht mehr regulär, so folgt aus dem Seitherigen die Gültigkeit unserer Bedingungen für jeden abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}_{z\,k}$ von $\mathfrak{B}_z$, der die erforderliche Beschaffenheit des Randes aufweist und $z = \infty$ enthält, wen

$_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$ durch die entsprechenden Koeffizienten $\mathfrak{b}_{\mu\nu}^{(k)}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}^{(k)}$ der Funktionen $^{(k)}$, $\mathfrak{z}_\mu^{(k)}$ ersetzt werden, die in bezug auf $\mathfrak{B}_{z\,k}$ dieselben charakteristischen igenschaften haben, wie $\mathfrak{y}_\mu$, $\mathfrak{z}_\mu$ in bezug auf $\mathfrak{B}_z$. Läßt man aber $\mathfrak{B}_{z\,k}$ eine en Bereich ausschöpfende aufsteigende Folge durchlaufen, so konvergieren ach § 2, 2 die Folgen der $\mathfrak{b}_{\mu\nu}^{(k)}$ und $\mathfrak{c}_{\mu\nu}^{(k)}$ gegen die der $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, und daraus lgt die allgemeine Gültigkeit von (38). Auch der auf das Gleichheitszeichen ezügliche Zusatz zu (45) bleibt gültig, denn wenn $f(z) \not\equiv \mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ ist, so ist $_{z\,k}(F_k) > \delta > 0$ mit von k unabhängigem δ und $F_k = f - \mathfrak{f}_k^{(\alpha)}$.

§ 6.

Das Hinreichen der Bedingungen.

Wir zeigen zunächst, daß aus der Gültigkeit unserer Bedingungen für as ganze Gebiet $\mathfrak{B}_z$ auch ihre Gültigkeit für jedes $z = \infty$ enthaltende Teilebiet $\mathfrak{B}_z^*$ von $\mathfrak{B}_z$ folgt, wenn wieder die $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$ durch die entsprechenden rößen $\mathfrak{b}_{\mu\nu}^*$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}^*$ für dieses Teilgebiet ersetzt werden. Zu diesem Zweck gehen ir auf (44) zurück, welche Ungleichungen mit unseren Bedingungen gleichedeutend sind, wenn darin die a_μ und $\mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)}$ durch (37) und (32) ersetzt werden. ndererseits haben sie eine allgemeinere Bedeutung; sie gelten, wenn f eine unktion ist, für die das Bild $\mathfrak{B}_w$ von $\mathfrak{B}_z$ jeden Punkt höchstens so oft bedeckt, ie den unendlich fernen Punkt. Diese Eigenschaft hat insbesondere die unktion $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ in dem Bereich $\mathfrak{B}_z^*$; (44) gibt also eine richtige Ungleichung, enn wir a_μ durch $\mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)}$, $a_\mu^{(\alpha)}$ durch $\mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)*}$ ersetzen. Addieren wir die so erhaltene ngleichung zu (44), so erhalten wir diejenige, die aus (44) hervorgeht, wenn ir $\mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)}$ durch $\mathfrak{a}_\mu^{(\alpha)*}$ ersetzen, und aus dieser folgt dann wie früher (38) mit $^*_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}^*$ anstelle von $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$.

Unsere Bedingungen werden also als für Schlichtheit hinreichend erannt sein, wenn es uns gelingt zu zeigen, daß bei nichtschlichtem $f_1(z)$ n Teilgebiet $\mathfrak{B}_z^*$ von $\mathfrak{B}_z$ existiert, in bezug auf das sie verletzt sind. Diese öglichkeit, zu einem Teilgebiet an Stelle von $\mathfrak{B}_z$ selbst überzugehen, nutzen ir dazu aus, den Fall eines mehrfach zusammenhängenden $\mathfrak{B}_z$ auf den eines nfach zusammenhängenden zurückzuführen; außerdem können wir ein eliebiges nichtschlichtes $f_1(z)$ durch ein solches von in gewissem Sinne öglichst einfachem Typus ersetzen.

Es sei also $y = f_1(z)$ in $\mathfrak{B}_z$ bis auf einen Pol erster Ordnung bei $z = \infty$ gulär und eindeutig, aber nicht schlicht; das Bildgebiet $\mathfrak{B}_y$ denken wir uns uf einer Riemannschen Fläche über der y-Ebene ausgebreitet; wir unterheiden im folgenden diese Fläche von der schlichten y-Ebene, die wir uns einem zweiten Exemplar darunterliegend denken; jedem Punkt aus $\mathfrak{B}_y$ ommt in der schlichten Ebene ein Spurpunkt zu, nämlich derjenige Punkt, r die gleiche y-Koordinate hat; ebenso sprechen wir von der Spur einer

beliebigen Punktmenge aus $\mathfrak{B}_y$. Das Bild B_y des Randes B_z von $\mathfrak{B}_z$ besitz eine beschränkte Spur. Wir schließen diese in einen Kreis C ein; über den Äußeren desselben liegt $\mathfrak{B}_y$ schlicht; in seinem Innern gibt es einen Punkt y_0 der Spur von mindestens zwei verschiedenen Punkten, $y_0^{(1)}$ und $y_0^{(2)}$ von $\mathfrak{B}$ ist. Wir verbinden diese beiden Punkte durch zwei ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ verlaufende Kurven mit dem Kreis C', dessen Spur C ist und schneiden nun aus $\mathfrak{B}_y$ eine Fläche $\mathfrak{B}_y^*$ heraus, die von dem Äußeren von C' und von je einer ganz in $\mathfrak{B}_y$ liegenden Umgebung jener beiden Kurven gebildet wird. $\mathfrak{B}_y^*$ ist einfach zusammenhängend und nicht schlicht. Die Konstruktion kann ferner, wie man leicht sieht, so ausgeführt werden, daß folgende Forderungen erfüllt sind: Der Rand B_y^* von $\mathfrak{B}_y^*$ sei eine viermal stetig differenzierbare Kurve, deren Spur die y-Ebene in vier Teilgebiete zerlegt, nämlich in ein von $\mathfrak{B}_y^*$ einfach bedecktes, das den unendlich fernen Punkt enthält, ein zweifach bedecktes, $\mathfrak{G}_y$ und zwei unbedeckte $\mathfrak{G}_y'$ und $\mathfrak{G}_y''$. $\mathfrak{G}_y$ sei ein Kreis mit y als Mittelpunkt, $\mathfrak{G}_y'$ und $\mathfrak{G}_y''$ sollen mit $\mathfrak{G}_y$ je einen Randpunkt y_1 bzw. y gemeinsam haben, nämlich den linken bzw. rechten Endpunkt des zur reellen Achse parallelen Durchmessers von $\mathfrak{G}_y$. $\mathfrak{G}_y'$ und $\mathfrak{G}_y''$ sind punktfremd. Die Ränder von $\mathfrak{G}_y$, $\mathfrak{G}_y'$, $\mathfrak{G}_y''$ seien G_y, G_y', G_y''. G_y' und G_y'' seien auch in y_1 bzw. y_2 viermal stetig differenzierbar.

$\mathfrak{B}_y^*$ entsteht durch die Abbildung $y = f_1(z)$ aus einem einfach zusammenhängenden, samt seinem Rande B_z^* ganz im Innern von $\mathfrak{B}_z$ liegenden Teilgebiet $\mathfrak{B}_z^*$ von $\mathfrak{B}_z$; B_z^* ist dabei viermal stetig differenzierbar. Nach den früher Gesagten genügt es zu zeigen, daß $f_1(z)$ in $\mathfrak{B}_z^*$ mindestens eine der Bedingungen unseres Satzes verletzt.

Wir schreiben nun wieder $\mathfrak{B}_z$ für $\mathfrak{B}_z^*$, $\mathfrak{B}_y$ für $\mathfrak{B}_y^*$.

Die Bedingungen unseres Satzes folgen aus (42), indem man die rechte Seite durch die Koeffizienten auswertet und speziell $P(f_1)$ für f setzt; die für schlichtes f_1 gültige Abschätzung (43) der linken Seite ergibt dann die Ungleichung (44). Die umgekehrte Ungleichung erhält man, wenn statt (43) gilt

$$I_{B_z}(f) - I_{B_z}(F) > 0. \tag{46}$$

Unsere Behauptung ist also gleichwertig mit der folgenden: Ist $f_1(z)$ eine Funktion in $\mathfrak{B}_z$, deren Entwicklung bei $z = \infty$ die Form (35) hat, und die $\mathfrak{B}_z$ auf ein nicht schlichtes Gebiet der vorhin geschilderten Art abbildet, so gibt es ein Polynom $P(y)$ derart, daß (46) gilt, wenn $f = P(f_1)$ ist und F in der früher erklärten Weise gebildet wird (vgl. (40) und die vorangehenden Zeilen), wobei α irgendeinen Wert aus $0 \leqq \alpha < \pi$ haben kann. Wir werden das speziell mit $\alpha = 0$ beweisen.

Wir gehen jetzt an die Konstruktion eines geeigneten Polynoms $P(y)$. $\mathfrak{E}_w^{(a)}$ sei eine Ellipse in der w-Ebene ($w = u + iv$), deren Achsen in die u- und

Achse fallen und die Längen $2a > 2$ bzw. 2 haben sollen. Wir bilden $\mathfrak{G}_y$ rch $w = k_a(y)$ auf $\mathfrak{E}_w^{(a)}$ ab derart, daß y_1 in $w = -a$, y_2 in $w = a$, y_0 in $= 0$ übergehen. Geht a gegen ∞, so konvergiert $k_a(y)$ gegen die Abbildung (y) von $\mathfrak{G}_y$ auf den Streifen $\mathfrak{S}_w$, der von den beiden Parallelen $v = \pm i$ grenzt wird. Die Konvergenz findet dabei nach einem allgemeinen Satz[14]) nächst gleichmäßig statt in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}_y$. ir zeigen, daß sie auch gleichmäßig besteht in jedem abgeschlossenen Teilreich von $\overline{\mathfrak{G}_y}$, der die Punkte y_1 und y_2 nicht enthält.

Wir können für diesen Beweis annehmen, $\mathfrak{G}_y$ sei der Einheitskreis. Man nn dann $k_a(y)$ folgendermaßen gewinnen: Man schlitze $\mathfrak{G}_y$ längs einer recke der reellen Achse von $-y'$ nach y' auf, wobei y' irgendein Punkt s $0 < y' < 1$ sei. Den entstandenen zweifach zusammenhängenden Bereich lde man auf einen Kreisring der $\tilde{w}$-Ebene, $1 < |\tilde{w}| < R$ ab derart, daß r Schlitz in $|\tilde{w}| = 1$, das obere Ufer in den oberen Halbkreis, das untere den unteren übergeht.

$$w = \frac{R}{R^2 - 1}\left(\tilde{w} + \frac{1}{\tilde{w}}\right)$$

ldet $|\tilde{w}| = R$ auf eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \frac{R^2+1}{R^2-1}$ und 1 ab, ährend $|\tilde{w}| = 1$ in einen Schlitz übergeht, der die Brennpunkte der Ellipse rbindet, wobei zwei Punkte des Schlitzes in der y-Ebene mit derselben oordinate wieder in Punkte mit derselben w-Koordinate übergehen; die usammensetzung jener beiden Abbildungen ergibt also eine im aufgeschlitzten $_y$ reguläre, in ganz $\mathfrak{G}_y$ stetige Abbildung auf $\mathfrak{E}_w^{(a)}$, sonach eine in ganz $\mathfrak{G}_y$ guläre Abbildung; durch geeignete Wahl von y' erhält man jede beliebige llipse $\mathfrak{E}_w^{(a)}$, denn man kann bei gegebenem a auf dem umgekehrten Wege $^{(a)}_w$ auf $\mathfrak{G}_y$ abbilden. Die Abbildung $y \to \tilde{w}$ kann durch Spiegelung über $| = 1$ hinaus in die ganze längs der reellen Achse außerhalb des Einheitseises aufgeschlitzte Ebene fortgesetzt werden; wir nennen diesen Bereich $\mathfrak{D}_y$. an erhält als Bilder der beiden Hälften des Äußeren von $\mathfrak{G}_y$ je eine Hälfte s Ringes $R < |\tilde{w}| < R^2$, und durch die Abbildung $\tilde{w} \to w$ gehen diese in albellipsenringe über, deren äußere Ellipse die Halbachsen $\frac{R^4+1}{R(R^2-1)}$ und $+\frac{1}{R}$ hat. $\mathfrak{D}_y$ wird also durch $k_a(y)$ auf das Innere dieser mit geradlinigen hlitzen von $\mp\frac{R^4+1}{R(R^2-1)}$ nach $\mp\frac{R^2+1}{R^2-1}$ versehene Ellipse $'\mathfrak{E}_w^{(a)}$ abgebildet; ßt man $a \to \infty$ gehen, so konvergiert die Folge der $\mathfrak{E}_w^{(a)}$ gegen den Streifen $1 < v < 1$, die der $'\mathfrak{E}_w^{(a)}$ gegen $-2 < v < 2$ als ihren Kern. Nach dem oben ierten allgemeinen Konvergenzsatz besteht also die Konvergenz $k_a(y) \to k(y)$

[14]) Siehe Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2. Aufl. (1931), 13.

gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{D}_y$, also insbesonde auch in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\overline{\mathfrak{G}_y}$, der y_1 und y_2 nic enthält.

Wir setzen, indem wir die spezielle Annahme, daß $\mathfrak{G}_y$ der Einheitskre sei, wieder verlassen:

$$y - y_0 = re^{i\psi}, \quad |y_1 - y_0| = r_1$$

und bezeichnen mit $G_{y\varepsilon}^{(+)}$ und $G_{y\varepsilon}^{(-)}$ die beiden Teilbogen von G_y, auf dene gilt $\varepsilon < \psi < \pi - \varepsilon$ bzw. $\pi + \varepsilon < \psi < 2\pi - \varepsilon$, mit $\mathfrak{G}_{y\varepsilon}$ den Teilbereic von $\mathfrak{G}_y$, der von diesen beiden Bogen begrenzt wird, sowie von zwei Krei bogen mit den Mittelpunkten y_1 und y_2, die die Endpunkte $\psi = 2\pi -$ und $\psi = \varepsilon$, sowie $\psi = \pi - \varepsilon$ und $\psi = \pi + \varepsilon$ von $G_{y\varepsilon}^{(+)}$ und $G_{y\varepsilon}^{(-)}$ im Inne von $\mathfrak{G}_y$ miteinander verbinden. Dann gibt es nach dem soeben Bewiesene zu beliebig klein positiv vorgegebenen ε_1 und ε_2 ein a_0 derart, daß b $a > a_0$ für $v(\psi) = \Im(k_a(r_1 e^{i\psi}))$

$$1 - \varepsilon_2 < v(\psi) < 1 \text{ auf } G_{y\varepsilon_1}^{(+)}, \quad -1 < v(\psi) < -1 + \varepsilon_2 \text{ auf } G_{y\varepsilon_1}^{(-)} \tag{47}$$

gilt.

Mit $\mathfrak{G}_y^{(\delta)}$ bezeichnen wir ein (möglicherweise nicht schlichtes) Gebi über der y-Ebene, das entsteht, indem man mit dem Kreis $\mathfrak{G}_y$ längs d beiden Bogen

$$G_{y\delta}^{(1)}: \ \pi - \delta < \psi < \pi + \delta, \qquad G_{y\delta}^{(2)}: \ -\delta < \psi < \delta$$

je ein zu der Geraden $y_1 y_2$ symmetrisches, $\mathfrak{G}_y'$ bzw. $\mathfrak{G}_y''$ enthaltendes Gebi verheftet derart, daß der Rand $G_y^{(\delta)}$ zweimal stetig differenzierbar ist. W bilden bei festem a $\mathfrak{G}_y^{(\delta)}$ durch $w = k_{a\delta}(y)$ mit $k_{a\delta}(y_0) = 0$, $k'_{a\delta}(y_0) >$ auf $\mathfrak{E}_{|w|}^{(a)}$ ab. Dann konvergiert mit $\delta \to 0$

$$k_{a\delta}(y) \to k_a(y), \tag{48}$$

und zwar gilt dies gleichmäßig in jedem $\overline{\mathfrak{G}_{y\varepsilon}}$, was man wieder leicht dur Fortsetzung von $k_{a\delta}(y)$ über $G_{y\varepsilon'}^{(+)}$ und $G_{y\varepsilon'}^{(-)}$ (mit $\delta < \varepsilon' < \varepsilon$) hinaus zeigt. Wäh man daher a so groß, daß (47) bei beliebig klein vorgegebenen ε_1 und ε_2 mit anstatt ε_2 gelten, und dann δ so klein, daß die Annäherung (48) hinreiche gut ist, so gelten die Ungleichungen (47) auch für

$$v(\psi) = \Im(k_{a\delta}(r_1 e^{i\psi})). \tag{49}$$

Außerdem kann man, wie auch a gewählt wird, δ so klein wählen, daß b beliebig klein vorgegebenem positivem ε_3 gilt:

$$I_{G_y'}(k_{a\delta}(y)) < \varepsilon_3^2, \quad I_{G_y''}(k_{a\delta}(y)) < \varepsilon_3^2; \tag{50}$$

$$|v| = |\Im(k_{a\delta}(y))| < \varepsilon_3 \quad \text{für} \quad y \subset G_y', \ y \subset G_y''. \tag{51}$$

nn die Bilder von $\mathfrak{G}_y'$ und $\mathfrak{G}_y''$ liegen ja bei hinreichend kleinem δ in beliebig inen Umgebungen von $w = \pm a$. Endlich gilt aus Symmetriegründen

$$\left.\frac{dv}{d\psi}\right|_{\psi=0} > 0, \quad \left.\frac{dv}{d\psi}\right|_{\psi=\pi} < 0;$$

$$v(\psi) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \psi \leqq \varepsilon_1, \qquad \pi - \varepsilon_1 \leqq \psi \leqq \pi;$$

$$v(\psi) \leqq 0 \quad \text{für} \quad \pi \leqq \psi \leqq \pi + \varepsilon_1, \; 2\pi - \varepsilon_1 \leqq \psi \leqq 2\pi.$$

gibt also zwei Intervalle $-\delta' < \psi < \delta'$, $\pi - \delta' < \psi < \pi + \delta'$ mit $< \varepsilon_1$ und ein $\alpha > 0$ derart, daß dort

$$\frac{dv}{d\psi} > \alpha \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv}{d\psi} < -\alpha.$$

rner gilt mit einem gewissen $\beta > 0$

$$v(\psi) > \beta \quad \text{für} \quad \delta' < \psi < \varepsilon_1, \quad \pi - \varepsilon_1 < \psi < \pi - \delta',$$
$$v(\psi) < -\beta \quad \text{für} \quad \pi + \delta' < \psi < \pi + \varepsilon_1, \quad 2\pi - \varepsilon_1 < \psi < 2\pi - \delta'.$$

Mit $\mathfrak{G}_y^{(\delta)*}$ bezeichnen wir nun ein einfach zusammenhängendes schlich-, von einer Jordankurve berandetes Teilgebiet von $\mathfrak{G}_y^{(\delta)}$, das $\mathfrak{G}_y$, $\mathfrak{G}_y'$ d $\mathfrak{G}_y''$ enthält. Nach der über den Rand von $\mathfrak{G}_y^{(\delta)}$ gemachten Voraus-zung ist $k'_{a\delta}(y)$ in $\overline{\mathfrak{G}_y^{(\delta)}}$, also auch in $\overline{\mathfrak{G}_y^{(\delta)*}}$ stetig[15]), und kann also dem letztgenannten Bereich gleichmäßig durch Polynome approxi-ert werden[16]). Zu beliebig klein vorgegebenem ε_4 gibt es also ein $P(y)$ art, daß

$$|k'_{a\delta}(y) - P'(y)| < \varepsilon_4, \qquad |k_{a\delta}(y) - P(y)| < \varepsilon_4$$

$\mathfrak{G}_y$, $\mathfrak{G}_y'$, $\mathfrak{G}_y''$. Indem man nun a und δ zunächst so wählt, daß die Un-ichungen (47) für (49), sowie (50) und (51) mit $\frac{\varepsilon_2}{2}$ statt ε_2, $\frac{\varepsilon_3}{2}$ statt ε_3 ten, und dann ε_4 hinreichend klein wählt, wird erreicht, daß die Un-ichungen (47) auch für

$$v(\psi) = \Im(P(r_1 e^{i\psi})),$$

d ferner die Ungleichungen

$$I_{G_y'}(P(y)) < \varepsilon_3^2, \qquad I_{G_y''}(P(y)) < \varepsilon_3^2,$$

$$|v| = |\Im(P(y))| < \varepsilon_3 \quad \text{für} \quad y \subset G_y' \text{ und } y \subset G_y''$$

[15]) Siehe etwa S. Warschawski, Über einen Satz von O. D. Kellogg, Nachr. Ges. s. Göttingen, math.-phys. Kl. 1932, S. 73–86.

[16]) Siehe J. L. Walsh, Interpolation and approximation by rational functions in complex domain. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. 20, New York 1935, 36.

gelten. Außerdem kann ε_4 so klein gewählt werden, daß die Ungleichungen (52) und (53) für (54) in dem jeweiligen Intervall mit $\frac{\alpha}{2}$ statt α, $\frac{\beta}{2}$ statt β gelten, und ferner mit beliebig kleinem $\delta_1 < \frac{\beta}{2}$:

$$|v(0)| < \delta_1, \quad |v(\pi)| < \delta_1. \tag{56a}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v(\psi) - v(0) &\geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \psi \leqq \varepsilon_1, \\ v(\psi) - v(\pi) &\geqq 0 \quad \text{für} \quad \pi - \varepsilon_1 \leqq \psi \leqq \pi; \\ v(\psi) - v(\pi) &\leqq 0 \quad \text{für} \quad \pi \leqq \psi \leqq \pi + \varepsilon_1, \\ v(\psi) - v(2\pi) &\leqq 0 \quad \text{für} \quad 2\pi - \varepsilon_1 \leqq \psi \leqq 2\pi. \end{aligned} \tag{57}$$

Indem wir endlich $P(y)$ mit einer passenden reellen Konstanten $1 - \delta''$ multiplizieren, wobei $\delta'' > 0$, $\delta'' \to 0$ mit ε_4, erreichen wir, daß die bei der Polynomapproximation möglicherweise verlorengegangene Beschränktheit von v auf

$$|v| \leqq 1 \tag{58}$$

wiederhergestellt wird, ohne daß an dem sonst Erreichten etwas geändert wird. Wir schreiben wieder $P(y)$ für $(1 - \delta'')\, P(y)$. Wir zeigen, daß das so bestimmte $P(y)$ bei hinreichend kleinen ε_1, ε_2, ε_3, δ_1 unserer Forderung genügt.

$F(z)$ ist, von einer additiven Konstanten abgesehen, eindeutig charakterisiert als diejenige in $\mathfrak{B}_z$ überall reguläre und eindeutige Funktion, deren Imaginärteil auf B_z (abgesehen allenfalls von einer additiven Konstanten) dieselben Randwerte hat, wie $\Im(f(z))$. Dieselben Randwerte (in passender Verteilung) hat auch $\Im(P(y))$ auf den Rändern von $\mathfrak{G}_y$, $\mathfrak{G}'_y$, $\mathfrak{G}''_y$, die durch $f_1(z)$, von y_1 und y_2 abgesehen, umkehrbar eindeutig auf B_z bezogen sind. Ferner ist offenbar

$$I_{B_z}(f) = I_{G_y}(P) - I_{G'_y}(P) - I_{G''_y}(P). \tag{59}$$

Auf Grund dieses Zusammenhangs der Randwerte von $\Im(F(z))$ und derer von $\Im(P(y))$ und der Beziehung (59) wird uns der gewünschte Vergleich zwischen $I_{B_z}(f)$ und $I_{B_z}(F)$ (s. (46)) gelingen.

Wir wollen $I_{B_z}(F)$, $I_{G_y}(P)$, $I_{G'_y}(P)$, $I_{G''_y}(P)$ durch die Randwerte der zugehörigen Imaginärteile ausdrücken, gemäß (12). Zu diesem Zweck bilden wir zunächst $\mathfrak{B}_z$, $\mathfrak{G}_y$, $\mathfrak{G}'_y$, $\mathfrak{G}''_y$ auf Kreise vom Radius 1 ab; nämlich $\mathfrak{B}$ durch

$$z = \psi(\zeta) \quad \text{mit} \quad \psi(0) = \infty$$

auf den Einheitskreis der ζ-Ebene ($\zeta = |\zeta| e^{i\vartheta}$); $\mathfrak{G}_y$ auf den Einheitskreis $\mathfrak{G}$ der η-Ebene, $\mathfrak{G}'_y$ auf den Kreis $\mathfrak{G}'_\eta : |\eta + 2| < 1$, $\mathfrak{G}''_y$ auf $\mathfrak{G}''_\eta : |\eta - 2| < 1$ und zwar derart, daß jedesmal die Punkte y_1 bzw. y_2 in $\eta = -1$ bzw

$= +1$, $y = 0$ in $\eta = 0$ übergehen; über die dann noch freien Parameter fügen wir willkürlich, doch in wohlbestimmter Weise. $y = \chi(\eta)$ sei die se Abbildung vermittelnde Funktion (sie besteht aus drei im allgemeinen ht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehenden Zweigen).

Wir setzen nun

$$W = U + iV = H(\zeta) = F(\psi(\zeta)), \quad w = u + iv = h(\eta) = P(\chi(\eta)).$$

nn ist, wenn B_ζ, G_η, G'_η, G''_η die Ränder von $\mathfrak{B}_\zeta$, $\mathfrak{G}_\eta$, $\mathfrak{G}'_\eta$, $\mathfrak{G}''_\eta$ sind:

) $\quad I_{B_z}(F) = I_{B_\zeta}(H), \quad I_{B_z}(f) = I_{G_\eta}(h) - I_{G'_\eta}(h) - I_{G''_\eta}(h),$

d die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Größen lassen h nun gemäß (12) durch die Randwerte der Imaginärteile der betreffenden nktionen ausdrücken.

Zwischen diesen Randwerten besteht ein Zusammenhang, der dem auf 54 erwähnten zwischen den Randwerten von $\Im(F(z))$ und $\Im(P(y))$ spricht, und den wir noch etwas zu erläutern haben. Wir setzen:

1) auf G_η: $\eta = e^{i\varphi}$, $\quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $\quad 3\pi \leqq \varphi \leqq 4\pi$;

2) auf G'_η: $\eta + 2 = e^{-i(\varphi - \pi)}$, $\quad \pi \leqq \varphi \leqq 3\pi$,

3) auf G''_η: $\eta - 2 = e^{-i(\varphi - \pi)}$, $\quad 4\pi \leqq \varphi \leqq 6\pi$.

nn wird vermöge

$$y = f_1(z), \quad z = \psi(\zeta), \quad y = \chi(\eta)$$

e umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen

$$0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leqq \varphi \leqq 6\pi$$

gestellt:

$$\vartheta = \vartheta(\varphi).$$

die vermittelnden Funktionen nach den auf S. 50 über B_y, G_y, G''_y, B_z (B_y und B_z waren dort mit B_y^* und B_z^* bezeichnet) gemachten raussetzungen auf den Rändern ihrer Bereiche jeweils mindestens dreimal tig differenzierbar sind [17]), so gilt dasselbe auch für $\vartheta(\varphi)$. Ferner ist ts $\vartheta'(\varphi) \neq 0$, da die Ableitungen von f_1, ψ, χ überall endlich und von 0 schieden sind.

Setzen wir nun auf G_η, G'_η, G''_η

$$v(\varphi) = \Im(h(\eta)),$$

B_ζ

$$V(\vartheta) = \Im(H(\zeta)),$$

nn drückt sich der erwähnte Zusammenhang durch

) $\quad V(\vartheta(\varphi)) = v(\varphi)$

.

[17]) Siehe S. Warschawski, loc. cit.

Wir übertragen ferner die früher für $P(y)$ aufgestellten Eigenschafte auf $h(\eta)$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}_{\eta\varepsilon}$, $G^{(+)}_{\eta\varepsilon}$, $G^{(-)}_{\eta\varepsilon}$, $G^{(1)}_{\eta\delta}$, $G^{(2)}_{\eta\delta}$ ein Gebiet sowi Randbogen, die den in der y-Ebene entsprechend bezeichneten als Bilde zugehören; dann gilt, wenn ε_1, ε_2, ε_3, δ_1 beliebig klein vorgegeben und hinreichend groß, δ, ε_4 hinreichend klein gewählt werden (vgl. (47), (55) (56), (56a), (57)):

$$(65)\qquad \begin{gathered} 1-\varepsilon_2 < v(\varphi) < 1 \quad \text{auf} \quad G^{(+)}_{\eta\varepsilon_1}, \qquad -1 < v(\varphi) < -1+\varepsilon_2 \quad \text{auf} \quad G^{(-)}_{\eta\varepsilon_1} \\ |v(0)| < \delta_1, \qquad |v(\pi)| < \delta_1. \end{gathered}$$

$$(66)\qquad \begin{aligned} v(\varphi) - v(0) &\geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \varepsilon_1, \\ v(\varphi) - v(\pi) &\geqq 0 \quad \text{für} \quad \pi - \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq \pi; \\ v(\varphi) - v(3\pi) &\leqq 0 \quad \text{für} \quad 3\pi \leqq \varphi \leqq 3\pi + \varepsilon_1, \\ v(\varphi) - v(4\pi) &\leqq 0 \quad \text{für} \quad 4\pi - \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq 4\pi; \end{aligned}$$

$$(67)\qquad I_{G'_\eta}(h) < \varepsilon_3^2, \qquad I_{G''_\eta}(h) \leqq \varepsilon_3^2,$$

$$(68)\qquad |v(\varphi)| \leqq \varepsilon_3 \quad \text{für} \quad \pi \leqq \varphi \leqq 3\pi, \quad 4\pi \leqq \varphi \leqq 6\pi.$$

Schließlich bemerken wir noch: Wegen der dreimaligen stetigen Dif ferenzierbarkeit von $\vartheta(\varphi)$ und wegen $\vartheta'(\varphi) \neq 0$ ist (vgl. (23)):

$$(69)\qquad T(\varphi, \varphi') = S(\vartheta(\varphi), \vartheta(\varphi')) - S(\varphi, \varphi') = \log\left|\frac{e^{i\vartheta(\varphi)} - e^{i\vartheta(\varphi')}}{e^{\varphi} - e^{i\varphi'}}\right|$$

in jedem der vier in (61) bis (63) erwähnten φ-Intervalle, die Endpunkte inbegriffen, eine mit stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion Ebenso wie $\vartheta(\varphi)$ hängt $T(\varphi, \varphi')$ nur von $f_1(z)$ (und der Normierung von $\chi(\eta)$ und $\psi(\zeta)$) ab, nicht von $P(y)$.

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen für die φ- und ϑ-Intervalle ein:

$$\delta_1 : 0 \leqq \varphi \leqq \pi, \qquad \delta_2 : \pi \leqq \varphi \leqq 3\pi, \qquad \delta_3 : 3\pi \leqq \varphi \leqq 4\pi, \qquad \delta_4 : 4\pi \leqq \varphi \leqq 6\pi$$

$$\vartheta_\nu = \vartheta(\nu\pi) \qquad (\nu = 1, \ldots, 6)$$

$$\Delta_1 : \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_1, \quad \Delta_2 : \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_3, \quad \Delta_3 : \vartheta_3 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_4, \quad \Delta_4 : \vartheta_4 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_6$$

Dann ist nach (12) mit der Bezeichnungsweise (23):

$$(70)\qquad I_{G_\eta}(h) = d_{11} + 2\,d_{13} + d_{33},$$

wobei

$$d_{\iota\varkappa} = \frac{1}{\pi}\int_{\delta_\varkappa}\int_{\delta_\iota} S(\varphi, \varphi')\, dv(\varphi)\, dv(\varphi').$$

In analoger Bezeichnungsweise ist

$$(71)\qquad I_{G'_\eta}(h) = d_{22}, \qquad I_{G''_\eta}(h) = d_{44},$$

ferner

$$(72)\qquad I_{B_\zeta}(H) = \sum_{\iota,\varkappa=1}^{4} D_{\iota\varkappa},$$

bei

$$D_{\iota\varkappa} = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta_\varkappa}\int_{\Delta_\iota} S(\vartheta,\vartheta')\,dV(\vartheta)\,dV(\vartheta').$$

Wir vergleichen nun die rechten Seiten der beiden Formeln (60) unter ranziehung von (70), (71), (72) miteinander. Dabei wird sich ergeben: ejenigen $D_{\iota\varkappa}$, bei denen ein Index gleich 2 oder 4 ist, sind beschränkt, nn ε_1, ε_2, ε_3 gegen 0 gehen; potentialtheoretisch gesprochen sind das chselseitige Energien von zwei Ladungen, deren eine mit ε_3 gegen 0 geht. $_3$ ist beschränkt, da, in entsprechender Ausdrucksweise, die beiden be- ränkten Ladungen positiven Abstand voneinander haben. D_{11} ist von d_{11}, $_3$ von d_{33} nur um eine beschränkte Größe verschieden, da beim Übergang G_η auf B_ζ die Ladung nur in beschränktem Maße zusammengezogen wird. und d_{44} sind nach (71) und (67) zu vernachlässigen. Den Ausschlag gibt ließlich d_{13}, das beliebig groß positiv wird, denn es ist im wesentlichen die chselseitige Energie von Ladungen gleichen Vorzeichens, deren Betrag t gleich 1 ist, und die nach (65) auf ε_1-Intervalle um $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $= 3\pi$, $\varphi = 4\pi$ zusammengedrängt sind. Wir führen das nun im einzelnen rch.

Es ist (vgl. (69), (64))

$$D_{11} = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta_1}\int_{\Delta_1} S(\vartheta,\vartheta')\,dV(\vartheta)\,dV(\vartheta')$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}\int_{\delta_1} S(\varphi,\varphi')\,dv(\varphi)\,dv(\varphi') + \frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}\int_{\delta_1} T(\varphi,\varphi')\,dv(\varphi)\,dv(\varphi') = d_{11} + R_{11}.$$

$T(\varphi, \varphi')$ zweimal stetig differenzierbar und unabhängig von ε_1, ε_2, ε_3 ist, l da $|v| \leqq 1$ ist, so ist nach (25)

$$R_{11} = O(1) \qquad \text{für alle } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3.$$

enso gilt

$$D_{33} = d_{33} + R_{33} \qquad \text{mit } R_{33} = O(1).$$

ner ist

$$D_{22} = d_{22} + R_{22}, \qquad D_{44} = d_{44} + R_{44}.$$

r ist nach (71) und (67) $d_{22} < \varepsilon_3^2$, $d_{44} < \varepsilon_3^2$, und nach (25) und (68) gilt

$$R_{22} = O(\varepsilon_3^2), \qquad R_{44} = O(\varepsilon_3^2).$$

ner ist

$$D_{22} = O(\varepsilon_3^2), \qquad D_{44} = O(\varepsilon_3^2).$$

ner ist nach (15) (vgl. (16))

$$D_{12}^2 = (V|_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}, V|_{\vartheta_1}^{\vartheta_3})^2 \leqq (V|_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}, V|_{\vartheta_0}^{\vartheta_1})(V|_{\vartheta_1}^{\vartheta_3}, V|_{\vartheta_1}^{\vartheta_3}) = D_{11}D_{22}.$$

Nehmen wir die nachher zu beweisende Tatsache vorweg, daß d_{13} positiv ist, so ist d_{11} nach (70) jedenfalls kleiner als der Gesamtinhalt πa von $\mathfrak{E}_w^{(a)}$; also ist $D_{11} = \pi a + O(1)$; andererseits ist $D_{22} = O(\varepsilon_3^2)$, wo ε_3 von a unabhängig beliebig klein ist. Also ist

$$D_{12} = O(1),$$

wenn ε_3 passend von a abhängig gemacht wird. Ebenso gilt

$$D_{23},\ D_{34},\ D_{41},\ D_{24} = O(1).$$

Ferner ist

$$D_{13} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_1} S(\vartheta, \vartheta')\, d\,V(\vartheta)\, d\,V(\vartheta').$$

Hier erfüllt $S(\vartheta, \vartheta')$ die Voraussetzungen für T aus § 1, 8, während $|V(\vartheta)| \leqq 1$ ist. Daher ist

$$D_{13} = O(1).$$

Damit ist gezeigt, daß

$$I_{B_\zeta}(H) = I_{B_z}(F) = d_{11} + d_{33} + O(1). \tag{74}$$

Wir kommen endlich zur Untersuchung von d_{13}. Es ist

$$d_{13} = \frac{1}{\pi} \int_{\delta_3} \int_{\delta_1} S(\varphi, \varphi')\, dv(\varphi)\, dv(\varphi').$$

Behauptung: Bei hinreichend kleinen ε_1, ε_2, δ_1 ist d_{13} beliebig groß. Zum Beweis zerlegen wir die Integrationsintervalle je in drei Teile:

$\delta_1^{(1)}$: $0 \leqq \varphi \leqq \varepsilon_1$, $\quad \delta_1^{(2)}$: $\quad \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon_1$, $\delta_1^{(3)}$: $\pi - \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq \pi$.

$\delta_3^{(1)}$: $3\pi \leqq \varphi' \leqq 3\pi + \varepsilon_1$, $\delta_3^{(2)}$: $3\pi + \varepsilon_1 \leqq \varphi' \leqq 4\pi - \varepsilon_1$, $\delta_3^{(3)}$: $4\pi - \varepsilon_1 \leqq \varphi' \leqq 4\pi$

Dann ist

$$d_{13} = \sum_{\iota,\,\varkappa=1}^{3} d_{13}^{(\iota\,\varkappa)}$$

mit

$$d_{13}^{(\iota\,\varkappa)} = \frac{1}{\pi} \int_{\delta_3^{(\varkappa)}} \int_{\delta_1^{(\iota)}} S(\varphi, \varphi')\, dv(\varphi)\, dv(\varphi').$$

Ist mindestens einer der oberen Indices 2, so können wir wieder (25) anwenden, die Schranke M hängt jetzt allerdings von ε_1 ab, aber m oder m' ist hier nach (65) gleich ε_2, das unabhängig von ε_1 beliebig klein gewählt werden kann. Sonach ist, wenn ε_2 in passender Weise von ε_1 abhängig gemacht wird

$$|d_{13}^{(\iota,\varkappa)}| = O(1) \quad \text{wenn} \quad \iota = 2 \quad \text{oder} \quad \varkappa = 2.$$

ner sind, wieder nach (25), $d_{13}^{(11)}$ und $d_{13}^{(33)}$ beschränkt, da für sie $S(\varphi, \varphi')$ dortigen Voraussetzungen über T genügt. Endlich ist

$$d_{13}^{(13)} = \frac{1}{\pi} \int_{4\pi-\varepsilon_1}^{4\pi} \int_{0}^{\varepsilon_1} S(\varphi, \varphi')\, dv(\varphi)\, dv(\varphi').$$

könnte in dem Teilintervall $|\varphi| \leqq \delta$ (vgl. S. 52) des Integrationsrvalls auch stellenweise negativ sein. Wir bilden daher in $0 \leqq \varphi \leqq \varepsilon_1$ größte aller nirgends abnehmenden, $v(\varphi)$ nirgends übertreffenden Funkien $v^*(\varphi)$; ferner definieren wir $v^*(\varphi)$ in $4\pi - \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq 4\pi$ als die nste aller $v(\varphi)$ nirgends unterschreitenden und nirgends abnehmenden ktionen. Aus (66) folgt

$$\begin{aligned} v^*(\varphi) - v^*(0) &\geqq 0 \qquad \text{in} \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \varepsilon_1, \\ v^*(4\pi) - v^*(\varphi) &\geqq 0 \qquad \text{in } 4\pi - \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq 4\pi. \end{aligned}$$

ner folgt aus (65)

$$\begin{aligned} v^*(\varepsilon_1) - v^*(0) &= v(\varepsilon_1) - v(0) \geqq 1 - \varepsilon_2 - \delta_1, \\ v^*(4\pi) - v^*(4\pi - \varepsilon_1) &= v(4\pi) - v(4\pi - \varepsilon_1) \geqq 1 - \varepsilon_2 - \delta_1. \end{aligned}$$

zen wir weiterhin

$$\mathfrak{v}(\varphi) = v(\varphi) - v^*(\varphi),$$

st

$$\mathfrak{v}(\varphi) \geqq 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \varepsilon_1, \qquad \mathfrak{v}(\varphi) \leqq 0 \quad \text{in} \quad 4\pi - \varepsilon_1 \leqq \varphi \leqq 4\pi.$$

$\varphi)$ und $\mathfrak{v}(\varphi)$ sind stückweise stetig differenzierbar. Nun ist

$$= (v^*|_0^{\varepsilon_1}, v^*|_{4\pi-\varepsilon_1}^{4\pi}) + (v^*|_0^{\varepsilon_1}, \mathfrak{v}|_{4\pi-\varepsilon_1}^{4\pi}) + (\mathfrak{v}|_0^{\varepsilon_1}, v^*|_{4\pi-\varepsilon_1}^{4\pi}) + (\mathfrak{v}|_0^{\varepsilon_1}, \mathfrak{v}|_{4\pi-\varepsilon_1}^{4\pi}).$$

r sind die drei letzten Klammern nach (24) nicht negativ. Die erste mmer ist

$$\frac{1}{\pi} \int_{4\pi-\varepsilon_1}^{4\pi} \int_{0}^{\varepsilon_1} S(\varphi, \varphi')\, dv^*(\varphi)\, dv^*(\varphi').$$

hier $v^{*\prime}$ nirgends negativ ist, so können wir den Mittelwertsatz der Integralnung anwenden und finden so schließlich

$$d_{13}^{(13)} \geqq \frac{1}{\pi} S(\varphi_0, \varphi_0') \left(v^*(\varepsilon_1) - v^*(0)\right) \left(v^*(4\pi) - v^*(4\pi - \varepsilon_1)\right)$$

$$0 < \varphi_0 < \varepsilon_1, \qquad 4\pi - \varepsilon_1 < \varphi_0' < 4\pi.$$

r ist $S(\varphi_0, \varphi_0')$ bei hinreichend kleinem ε_1 beliebig groß; also ist mit ksicht auf (75) $d_{13}^{(13)}$, und ebenso $d_{13}^{(31)}$, und damit auch d_{13} beliebig groß.

Indem wir nun zusammenfassen, erhalten wir nach (60), (70), (67):

$$I_{B_z}(f) = d_{11} + 2\,d_{13} + d_{33} + O(1).$$

Danach und nach (74) ist also mit Rücksicht auf das soeben gewonnene Ergebnis bei hinreichend großem a und hinreichend kleinen δ und ε_4:

$$I_{B_z}(f) - I_{B_z}(F) = 2\,d_{13} + O(1) > 0,$$

was zu beweisen war.

§ 7.

Die Schrankenfunktionen.

Es ist noch der auf die Gültigkeit des Gleichheitszeichens bezügliche Teil des Satzes zu beweisen. Schreiben wir unsere Bedingungen kurz so:

$$|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0| \leqq \mathfrak{r}$$

mit

$$\mathfrak{w} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} \nu\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu, \qquad \mathfrak{w}_0 = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} \nu\, b_{\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu, \qquad \mathfrak{r} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} \nu\, c_{\mu\nu}\, x_\mu\, \overline{x_\nu},$$

so wird, bei festen x_ν, ein bestimmter Randpunkt

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0 + \mathfrak{r} e^{i\beta} \tag{76}$$

dieses Kreises nach S. 48 für solche $f_1(z)$ erreicht, zu denen es ein Polynom $P(y)$ gibt derart, daß $P(f_1(z))$ gleich demjenigen $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ ist, dessen Hauptteil gleich $\sum_{\mu=1}^{m} x_\mu z^\mu$, und für das $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Es ist also zu zeigen, daß es zu jeder $\mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ ein schlichtes, ∞ enthaltendes Gebiet $\mathfrak{B}_y$ und ein Polynom $P(y)$ gibt, das $\mathfrak{B}_y$ auf das durch $w = \mathfrak{f}^{(\alpha)}(z)$ von $\mathfrak{B}_z$ entworfene Bildgebiet $\mathfrak{B}$ abgebildet. $\mathfrak{B}_w$ hat bei ∞ einen Windungspunkt $(m-1)$-ter Ordnung und bedeckt jeden Punkt der Bildebene genau m-mal, ausgenommen die Punkte die auf dem Bild einer Randkomponente liegen. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{B}$ in eine geschlossene m-blättrige Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 eingebettet werden kann; denn es gibt bekanntlich zu jeder solchen Fläche eine rationale Funktion, die sie als Bild der Vollkugel erzeugt. Wählt man diese Funktion so, daß die unendlich fernen Punkte sich entsprechen, so ist sie notwendig ein Polynom. Die Möglichkeit, $\mathfrak{B}_w$ in eine Fläche der erwähnten Art einzubetten, ist leicht zu sehen. Das Bild $B_w^{(\nu)}$ jeder Randkomponente B_ν liegt auf einer Geraden des festen Neigungswinkels α gegen die reelle Achse. Wir dürfen $\alpha = 0$ annehmen. An jeder Stelle von $B_w^{(\nu)}$ müssen beiderseits gleich viele Blätter der Riemannschen Fläche angrenzen; durch geeignete Verheftung je zweier von verschiedenen Seiten anstoßender Blätter erhält man die gesuchte geschlossene Fläche. Diese Verheftung kann man etwa so vornehmen:

Man wähle auf $B_z^{(\nu)}$ einen Punkt z_1, dessen Bild einem relativen Minimum s Realteils von $\mathfrak{f}^{(0)}(z)$ auf $B_z^{(\nu)}$ entspricht, also einen Punkt, in dem $\mathfrak{f}^{(0)'}(z_1) = 0$, während die erste nicht verschwindende Ableitung von $\mathfrak{f}^{(0)}(z_1)$ von gerader dnung ist; man durchlaufe nun $B_z^{(\nu)}$ von z_1 aus nach beiden Seiten; im Bilde rchläuft man dabei zunächst sich deckende Strecken, die man verheftet, d zwar so weit, bis man in der z-Ebene auf dem einen oder anderen Bogen f einen Punkt z_2 stößt, in dem $\Re(\mathfrak{f}^{(0)}(z))$ umkehrt; ist dasselbe in dem entrechenden Punkt z_2' auf dem anderen Bogen der Fall, so kann man die Verftung über $\mathfrak{f}^{(0)}(z_2)$ und $\mathfrak{f}^{(0)}(z_2')$ hinaus fortsetzen, entweder bis $B_z^{(\nu)}$ ganz rchlaufen ist oder bis man auf ein Punktepaar z_3, z_3' stößt derart, daß $(\mathfrak{f}^{(0)}(z))$ in z_3 umkehrt, in z_3' nicht. Dann erstreckt sich die Verheftung nächst über den Bogen $z_3 z_1 z_3'$, wenn man sie aus der w-Ebene in die z-Ebene erträgt, indem man entsprechende Punkte identifiziert. Jetzt suche man f dem komplementären Bogen, der wegen der Identifizierung von z_3 und z_3' schlossen ist, wieder einen Punkt z_4 mit derselben Eigenschaft wie z_1 und he von da aus genau so vor wie soeben. Da es auf $B_z^{(\nu)}$ nur endlich viele nkt z_μ mit $\mathfrak{f}^{(0)'}(z_\mu) = 0$ gibt, so muß das Verfahren nach endlich vielen hritten zum Ziel führen. In der z-Ebene erhält man aus $\mathfrak{B}_z$ ein der vollen ene topologisch äquivalentes Gebiet, also auch in der w-Ebene, was zu weisen war.

Es ist noch zu beachten, daß dieser Verheftungsprozeß im allgemeinen ineswegs ein eindeutig bestimmter ist. Wären etwa die vorhin erwähnten nkte z_2, z_2' solche mit $\mathfrak{f}^{(0)'}(z_2) = \mathfrak{f}^{(0)'}(z_2') = 0$, $\mathfrak{f}^{(0)''}(z_2) \neq 0$, $\mathfrak{f}^{(0)''}(z_2') \neq 0$, kann man den Verheftungsprozeß über sie hinaus fortsetzen. Man kommt bei offenbar zu einer anderen geschlossenen Fläche, als wenn man von z_2 er z_2' an Stelle von z_1 ausgegangen wäre. Das bedeutet, daß es mehrere lynome gibt, deren Umkehrfunktion $\mathfrak{B}_w$ auf ein schlichtes Gebiet abbildet, o mehrere in $\mathfrak{B}_z$ schlichte Funktionen, die, an Stelle von $f_1(z)$ gesetzt, $z) = \mathfrak{f}^{(0)}(z)$ ergeben, also mehrere Schrankenfunktionen für die Abschätzung 5) bei $\alpha = 0$.

Ein derartiges $f_1(z)$ bildet $\mathfrak{B}_z$ auf ein Schlitzgebiet ab, dessen Schlitze auf rven liegen, die durch ein Polynom auf Parallelen zur reellen Achse abgedet werden, d. h. auf Kurven, für die gilt

$$\Im(P(y)) = \text{const};$$

s ist eine isotherme Schar algebraischer Kurven[18]).

[18]) Siehe G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und Raume, 2. Aufl., 1921, S. 170ff.

(Eingegangen am 3. September 1938.)

Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern.

Von

Friedrich Karl Schmidt in Jena.

1. Fragestellung und Ergebnisse.

In der klassischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Verände lichen und in der formalen Theorie der linearen Differentialgleichunge spielt bekanntlich die aus den aufeinanderfolgenden Ableitungen eines Fun tionensystems gebildete Wronskische Determinante eine Rolle. Ziel d folgenden Zeilen ist es, für differenzierbare Funktionenkörper beliebig Charakteristik ein entsprechendes Hilfsmittel einzuführen, was nicht dur unmittelbare Übertragung möglich ist.

Ich betrachte einen beliebigen Körper K, dessen Elemente ich Fun tionen nenne. In K sei eine iterative Differentiation erklärt, d. h. jeder Fun tion y aus K sei für jede natürliche Zahl ν eine Funktion $y^{(\nu)}$ aus K so zug ordnet, daß die drei Definitionsforderungen einer iterativen Differentiation erfüllt sind:

1. Summenregel: $(y+z)^{(\nu)} = y^{(\nu)} + z^{(\nu)}$,
2. Produktregel[1a]): $(yz)^{(\nu)} = y^{(\nu)} z + y^{(\nu-1)} z' + \ldots + y z^{(\nu)}$,
3. Iterationsregel[1a]): $(y^{(\mu)})^{(\nu)} = \binom{\mu+\nu}{\mu} y^{(\mu+\nu)}$.

$y^{(\nu)}$ heißt dann die ν-te Ableitung von y, wobei noch $y = y^{(0)}$ gesetzt werd soll. Eine Funktion, deren sämtliche Ableitungen ($\nu \geqq 1$) verschwinde bezeichne ich in üblicher Weise als absolute Differentiationskonstante. A absoluten Differentiationskonstanten bilden einen Unterkörper k von K.

---

[1]) Vgl. H. Hasse, Noch eine Begründung der höheren Differentialquotienten einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, Journ. f. reine u. ange Math. 77 (1937), S. 215. Insbesondere den Zusatz bei der Korrektur, S. 223. D Kenntnis dieser Arbeit wird jedoch im folgenden nicht vorausgesetzt.

[1a]) Die Produktregel und die Iterationsregel weichen im Hinblick auf d Fall der Charakteristik $p > 0$ von den klassischen ab. Die klassische Interatio regel $(y^{(\mu)})^{(\nu)} = y^{(\mu+\nu)}$ zieht nämlich im Fall der Charakteristik $p > 0$ für je Funktion das Verschwinden aller Ableitungen von einer Ordnung $\geqq p$ nach si Die Hinzufügung des Binomialkoeffizienten $\binom{\mu+\nu}{\mu}$ verhindert das, doch ändert si damit natürlich auch die Produktregel.

Hängen die $n+1$ Funktionen $y_0, \ldots, y_n$ aus K über dem Körper der soluten Differentiationskonstanten linear voneinander ab, so verschwindet lbstverständlich die Determinante

$$\Delta_{1,\ldots,n}(y_0, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_0, & \ldots, & y_n \\ y_0', & \ldots, & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(n)}, & \ldots, & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

lgemeiner verschwindet dann jede Determinante von der Form

$$\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(y_0, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_0, & \ldots, & y_n \\ y_0^{(\nu_1)}, & \ldots, & y_n^{(\nu_1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_0^{(\nu_n)}, & \ldots, & y_n^{(\nu_n)} \end{vmatrix} \quad (0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n).$$

n Falle eines Körpers K von Funktionen, die sich an einer festen Stelle r komplexen Zahlebene rational verhalten, zieht nun bekanntlich umkehrt das Verschwinden von (1) auch die lineare Abhängigkeit der Funknen nach sich. Aber schon in einem rationalen Funktionenkörper $K = k(x)$ r Charakteristik $p > 0$ kann die Determinante (1) gleich 0 sein, obwohl s Funktionensystem linear unabhängig ist, wie einfache Beispiele zeigen[2]) n suche daher in einem beliebigen Körper K zu je $n+1$ über k linear unabngigen Funktionen eine Determinante von der allgemeinen Form (2) zu den, die nicht verschwindet. Wähle ich noch ihre Ordnungen $0, \nu_1, \ldots, \nu_n$ Sinne lexikographischer Anordnung möglichst niedrig, so ist sie als wahres alogon zur Wronskischen Determinante der klassischen Theorie anzusehen d soll deshalb kurz die Wronskische Determinante $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ des ear unabhängigen Funktionensystems $y_0, \ldots, y_n$ von K genannt werden.

Daß eine solche Wronskische Determinante zu jedem über k linear abhängigen Funktionensystem des Körpers K existiert, wird in Nr. 2 eigt. Ihre Ordnungen $0, \nu_1, \ldots, \nu_n$ hängen selbstverständlich im allgeinen von den betrachteten Funktionen $y_0, \ldots, y_n$ ab. Doch besitzen sie ige wichtige Invarianzeigenschaften (Nr. 3). Sie ändern sich nämlich ht, wenn man die ursprünglich gegebene Differentiation mit Hilfe der ttenregel durch eine neue ersetzt, wobei sich zugleich ergibt, daß die onskische Determinante im allgemeinen Falle bei Änderung der Differention entsprechend transformiert wird wie in der klassischen Theorie. Die dnungen sind ferner Invarianten des Moduls

$$\mathfrak{m} = y_0 \cdot k + \ldots + y_n \cdot k,$$

[2]) Man betrachte etwa in einem rationalen Funktionenkörper der Charakteristik p Funktionen $1, x^p$.

der durch $y_0, \ldots, y_n$ über k aufgespannt wird; d. h. bilden $z_0, \ldots, z_n$ ei Basis von $\mathfrak{m}/k$, so hat $\Delta(z_0, \ldots, z_n)$ dieselben Ordnungen wie $\Delta(y_0, \ldots, y$ Der eigentliche Grund für diese Invarianzen liegt darin, daß sich die Ordnung mit Hilfe der Taylorentwicklungen an einer allgemeinen Stelle modultheor tisch deuten lassen, was für die Anwendung in der Theorie der algebraisch Funktionen von Bedeutung ist.

Schließlich können die ganzen Zahlen, die als Ordnungen einer Wronsk schen Determinante in K auftreten, arithmetisch gekennzeichnet werd (Nr. 4). Ist die Charakteristik $\chi(K) = 0$, so hat $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ die Or nungen $0, 1, \ldots, n$. Diese Tatsache läßt sich offenbar völlig gleichbedeuten folgendermaßen ausdrücken: Zugleich mit ν ist im Falle der Charakteristik auch jede nichtnegative ganze Zahl $\leqq \nu$ eine Ordnung von $\Delta(y_0, \ldots, y$ Im Falle der Charakteristik $p > 0$ gilt hiervon die genaue p-adische Ve allgemeinerung. Man hat nur jede ganze Zahl in eine p-adische Reihe m den reduzierten Resten $0, 1, \ldots, p-1$ als Koeffizienten zu entwickel Zugleich mit einer Zahl ν ist dann nämlich auch jede Zahl, deren p-adisch Koeffizienten einzeln nicht größer als die entsprechenden von ν sind, ei Ordnung von $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$. Besitzt umgekehrt das System ganzer Zahl $0 < \nu_1 \ldots < \nu_n$ die Eigenschaft, daß mit einem ν zu ihm auch jede Za gehört, deren p-adische Koeffizienten einzeln nicht größer als die von ν sin so hat die Wronskische Determinante geeigneter Funktionen $y_0, \ldots,$ aus K gerade der Ordnungen $0, \nu_1, \ldots, \nu_n$, vorausgesetzt natürlich, daß mindestens eine nichtkonstante Funktion enthält.

In einer anschließenden Arbeit werden die hier entwickelten einfach Begriffe und Sätze auf die Theorie der Weierstraßpunkte eines algebraisch Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik angewandt.

2. Bildung der Wronskischen Determinante.

Neben den Körpern K stelle ich den Körper T^* aller Potenzreihen einer Unbestimmten u mit Koeffizienten aus K und ordne jeder Funktion aus K ihre allgemeine u-Taylorentwicklung aus T^* zu

$$y \to Y = y + y'u + \ldots + y^{(\nu)} u^{(\nu)} + \ldots,$$

deren Koeffizienten die aufeinanderfolgenden Ableitungen von y sind[3]).

Satz 1. *Sind die $n+1$ Funktionen $y_0, \ldots, y_n$ aus K linear unabhäng über k, so sind ihre u-Taylorentwicklungen $Y_0, \ldots, Y_n$ linear unabhäng über K.*

---

[3]) Der Begriff der allgemeinen u-Taylorentwicklung ist l. c. [1]), S. 226 eingefüh worden.

Beweis durch das aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen kannte Verfahren der fortgesetzten Differentiation[4]). Offenbar genügt zu zeigen: Sind $Y_1, \ldots, Y_r$ linear unabhängig über K, aber $Y_0, Y_1, \ldots, Y_r$ ear abhängig über K, so hängen $y_0, y_1, \ldots, y_r$ über k voneinander linear ab.

Auf Grund meiner Annahme gibt es in K sicher r Funktionen a_i, so daß

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i Y_1,$$

o

$$y_0^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{r} a_i y_i^{(\mu)} \qquad \text{für jedes } \mu \geqq 0$$

. Durch Bildung der ν-ten Ableitung folgt aus (3):

$$(y_0^{(\mu)})^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{r} a_i^{(\nu)} y_i^{(\mu)} + \sum_{i=1}^{r} a_i^{(\nu-1)} (y_i^{(\mu)})' + \ldots + \sum_{i=1}^{r} a_i (y_i^{(\mu)})^{(\nu)},$$

d hieraus mit Hilfe der Iterationsregel weiter:

$$\binom{\mu+\nu}{\mu} y_0^{(\mu+\nu)}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i^{(\nu)} y_i^{(\mu)} + \binom{\mu+1}{\mu} \sum_{i=1}^{r} a_i^{(\nu-1)} y_i^{(\mu+1)} + \ldots + \binom{\mu+\nu}{\mu} \sum_{i=1}^{r} a_i y_i^{(\mu+\nu)}.$$

ch (3) ist aber das letzte Glied der rechten Seite gleich der linken Seite, so ß ich schließlich

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i^{(\nu)} y_i^{(\mu)} + \binom{\mu+1}{\mu} \sum_{i=1}^{r} a_i^{(\nu-1)} y_i^{(\mu+1)} + \ldots + \binom{\mu+\nu-1}{\mu} \sum_{i=1}^{r} a_i' y_i^{(\mu+\nu-1)}$$

vinne. Für $\nu = 1, 2, \ldots$ ergibt das (wenn man im folgenden von der zweiten le ab jeweils die vorhergehenden Zeilen berücksichtigt):

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i' y_i^{(\mu)} \text{ für jedes } \mu \geqq 0,$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i'' y_i^{(\mu)} + \binom{\mu+1}{\mu} \sum_{i=1}^{r} a_i' y_i^{(\mu+1)} = \sum_{i=1}^{r} a_i'' y_i^{(\mu)} \text{ für jedes } \mu \geqq 0,$$

. . . . . .

gemein

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i^{\varrho} y_i^{(\mu)} \text{ für jedes } \mu \geqq 0 \text{ und jedes } \varrho \geqq 1.$$

ischen den Taylorentwicklungen $Y_1, \ldots, Y_r$ besteht also die Beziehung

$$a_1^{(\varrho)} Y_1 + \ldots + a_r^{(\varrho)} Y_r = 0 \text{ für jedes } \varrho \geqq 1.$$

[4]) Siehe etwa Goursat, Cours d'Analyse, Bd. II (1925), S. 437—438.

Da die Y_i aber über K linear unabhängig angenommen waren, zieht das d
Gleichungen

$$a_i^{(\varrho)} = 0 \text{ für jedes } \varrho \geqq 1$$

nach sich. Die a_i sind daher absolute Differentiationskonstante und (
liefert nun für $\mu = 0$ die behauptete lineare Abhängigkeit der Funktione
$y_0, y_1, \ldots, y_r$ über k.

Satz 2. *Sind die Funktionen $y_0, \ldots, y_n$ linear unabhängig über k, s
gibt es stets n ganze Zahlen $0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$ der Art, daß die Determinan*

$$\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(y_0, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_0, & \ldots, y_n \\ y_0^{(\nu_1)}, & \ldots, y_n^{(\nu_1)} \\ \cdot & \cdots \\ y_0^{(\nu_n)}, & \ldots, y_n^{(\nu_n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist.

Nach Satz 1 sind nämlich die $n + 1$ Taylorentwicklungen

$$Y_0 = y_0 + y_0' u + \ldots + y_0^{(\nu)} u^\nu + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_n = y_n + y_n' u + \ldots + y_n^{(\nu)} u^\nu + \ldots$$

linear unabhängig über K. Aus der spaltenfiniten Matrix ihrer Koeffiziente
müssen sich daher $n + 1$ über K linear unabhängige Spalten herausgreife
lassen. Da die Funktionen $y_0, \ldots, y_n$ nach Voraussetzung sicher nicht alle
sind, muß es insbesondere ein linear unabhängiges System von $n + 1$ Spalte
in der Koeffizientenmatrix geben, das die Spalte $y_0, \ldots, y_n$ enthält. Dam
ist aber die Behauptung über die Determinante (2) bereits bewiesen.

Wählt man zu $n + 1$ über k linear unabhängige Funktionen $y_0, \ldots,$
eine nicht verschwindende Determinante $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(y_0, \ldots, y_n)$ so, da
die in ihr vorkommenden Ableitungsordnungen $0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$ i
Sinne lexikographischer Anordnung möglichst niedrig werden, so soll d
auf diese Weise eindeutig bestimmte Determinante als *Wronskische Dete
minante* des linear unabhängigen Funktionensystems bezeichnet werden. Ic
schreibe für sie

$$\Delta(y_0, \ldots, y_n) \quad \text{bzw.} \quad \Delta'(y_0, \ldots, y_n),$$

wobei der Strich andeuten soll, daß sie mit Hilfe der „gestrichenen" Differe
tiation gewonnen wurde. Bildet man aus den Ordnungen $0 < \mu_1 < \ldots <$
von $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ und den Ordnungen $0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$ einer beliebige
nichtverschwindenden Determinante $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(y_0, \ldots, y_n)$ die Differen
kette

$$\nu_1 - \mu_1, \ldots, \nu_n - \mu_n,$$

so ist also nach Definition die erste nichtverschwindende Differenz positi

3. Invarianzeigenschaften der Wronskischen Determinante.

Um eine erste einfache Invarianzeigenschaft der Wronskischen Deter-
nante $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ zu erhalten, bilde ich den Modul

$$\mathfrak{m}_\varrho = y_0 \cdot K_\varrho + \ldots + y_n \cdot K_\varrho,$$

von $y_0, \ldots, y_n$ über dem Körper K_ϱ aller Differentiationskonstanten
mindestens ϱ-ter Ordnung aufgespannt wird, wo ϱ größer als die größte
dnung von $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ gewählt ist. Der Körper K_ϱ besteht dabei
allen Funktionen von K, deren ν-te Ableitungen für $0 < \nu < \varrho$ ver-
winden.

Man erhält dann ohne weiteres

Satz 3. *Ist $z_0, \ldots, z_n$ eine Basis von $\mathfrak{m}_\varrho/K_\varrho$, so stimmen die Ordnungen Wronskischen Determinanten $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ und $\Delta(z_0, \ldots, z_n)$ überein, d zwar ist $\Delta(y_0, \ldots, y_n) = \Delta(z_0, \ldots, z_n) \det(A)$, falls A die Matrix Basistransformation $\{y_0, \ldots, y_n\} = \{z_0, \ldots, z_n\} A$ bedeutet.*

Die Ordnungen der Wronskischen Determinante sind also Invarianten
Moduls $\mathfrak{m}_\varrho$. Das gilt insbesondere, wenn man $\varrho = \infty$ annimmt, d. h. den
dul $\mathfrak{m}_\infty$ betrachtet, der durch $y_0, \ldots, y_n$ über dem Körper $K_\infty = k$ der
soluten Differentiationskonstanten aufgespannt wird.

Die Ordnungen der Wronskischen Determinante können mit Hilfe der
gemeinen u-Taylorentwicklungen der Funktionen von K modultheoretisch
eutet werden. Dazu bemerke ich zunächst zweierlei.

a) Zwei Integritätsbereiche mit iterativer Differentiation sollen *ab-
ungsisomorph* heißen, wenn zwischen ihnen ein Isomorphismus besteht,
dem die Ableitungen einer beliebigen Funktion des ersten Integritäts-
eichs der Reihe nach in die Ableitungen der entsprechenden Funktionen
zweiten Integritätsbereichs übergehen. Ich will nun in dem Körper T^*
r Potenzreihen in einer Unbestimmten u mit Koeffizienten aus K die
ative Differentiation

$$D^\nu \left(\sum a_\lambda u^\lambda \right) = \sum \binom{\lambda}{\nu} a_\lambda u^{\lambda - \nu}$$

runde legen. Ordnet man dann jeder Funktion y aus K ihre u-Taylor-
wicklung zu, so erhält man einen Ableitungsisomorphismus zwischen K
dem Körper T ($\subset T^*$) der zugehörigen Taylorentwicklungen, weil die
egebene Zuordnung sicher einen Isomorphismus darstellt und weil für die
lorentwicklung $Y^{(\nu)}$ von $y^{(\nu)}$

$$Y^{(\nu)} = \sum_{\varkappa = 0}^{\infty} (y^{(\nu)})^{(\varkappa)} u^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda = 0}^{\infty} \binom{\lambda}{\nu} y^{(\lambda)} u^{\lambda - \nu} = D^\nu Y$$

Sind $Z_0, \ldots, Z_n$ irgendwelche Potenzreihen aus T^*, so verstehe ich unter $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Z_0, \ldots, Z_n)$ die Determinante, in deren 1-ter, 2-ter, ..., $(n+1)$-ter Zeile die Ableitungen $D^0, D^{\nu_1}, \ldots, D^{\nu_n}$ dieser Potenzreihen stehen. Bei der in T^* zugrunde gelegten Differentiation ist K der Körper aller absoluten Differentiationskonstanten. Für $n+1$ über K linear unabhängige Potenzreihen soll insbesondere $\Delta(Z_0, \ldots, Z_n)$ die Wronskische Determinante bedeuten. Zwischen der Determinante $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(y_0, \ldots, y_n)$ von $n+1$ Funktionen aus K und der Determinante $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Y_0, \ldots, Y_n)$ ihrer u-Taylorentwicklungen besteht dann infolge des Ableitungsisomorphismus der Körper K und T die Beziehung: *$\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Y_0, \ldots, Y_n)$ ist die u-Taylorentwicklung von $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(y_0, \ldots, y_n)$, folglich*

$$\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Y_0, \ldots, Y_n) \equiv \Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(y_0, \ldots, y_n) \bmod u.$$

Sind $y_0, \ldots, y_n$ linear unabhängig über k und daher $Y_0, \ldots, Y_n$ nach Satz 1 linear unabhängig über K, so haben die Wronskischen Determinanten $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ und $\Delta(Y_0, \ldots, Y_n)$ die gleichen Ordnungen. $\Delta(Y_0, \ldots, Y_n)$ kann gekennzeichnet werden als die erste Determinante $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Y_0, \ldots, Y_n)$ im Sinne lexikographischer Anordnung, für die $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Y_n, \ldots, Y_n) \not\equiv 0 \bmod u$ gilt.

b) Ich bilde den Potenzreihenmodul

$$\mathfrak{M} = Y_0 \cdot K + \ldots + Y_n \cdot K,$$

der von den $n+1$ über K linear unabhängigen Taylorentwicklungen Y_i über dem Körper der absoluten Differentiationskonstanten von T^* aufgespannt wird. Ist dann $Z_0, \ldots, Z_n$ irgendeine Basis von $\mathfrak{M}/K$, so haben die Wronskischen Determinanten $\Delta(Y_0, \ldots, Y_n)$ und $\Delta(Z_0, \ldots, Z_n)$ nach Satz 3 die gleichen Ordnungen.

Die Basispotenzreihen Z_i kann man stets so wählen, daß ihre Anfangsexponenten h_i der Bedingung

$$h_0 < h_1 < \ldots < h_n$$

genügen und außerdem

$$Z_0 = u^{h_0} + \ldots, Z_1 = u^{h_1} + \ldots, \ldots, Z_n = u^{h_n} + \ldots \tag{4}$$

ist. Die Zahlen h_i sind dann Invarianten des Moduls $\mathfrak{M}$. Offenbar ist nämlich u^{h_0} die höchste Potenz von u, die in allen Potenzreihen von $\mathfrak{M}$ aufgeht, allgemein ist u^{h_i+1} die höchste Potenz von u, die in allen durch u^{h_i+1} teilbaren Potenzreihen von $\mathfrak{M}$ aufgeht. Ich nenne die Potenzen u^{h_i} die *Hermiteschen Invarianten* des Potenzreihenmoduls $\mathfrak{M}$ und eine Basis von der Form (4) eine *Hermitesche Basis* von $\mathfrak{M}/K$. Da die Y_i als Taylorentwicklungen von 0 verschiedener Funktionen y_i je den Anfangsexponenten 0 besitzen, ist notwendig $h_0 = 0$.

Hilfssatz 1. *Ist $Z_0, \ldots, Z_n$ eine Hermitesche Basis von $\mathfrak{M}/K$ mit den Anfangsexponenten $0 < h_1 < \ldots < h_n$, so ist*

$$\Delta_{h_1, \ldots, h_n}(Z_0, \ldots, Z_n) \equiv 1 \bmod u.$$

Aus der Form der Potenzreihen Z_i und der Definition der Differentiation D^{h_i} ergibt sich nämlich unmittelbar $D^{h_i} Z_j \equiv 1$ oder $0 \bmod u$, je nachdem ob $i = j$ oder $i < j$ ist. Man hat also

$$\Delta_{h_1, \ldots, h_n}(Z_0, \ldots, Z_n) \equiv \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \bmod u.$$

Hilfssatz 2. *Ist $Z_0, \ldots, Z_n$ eine Hermitesche Basis von $\mathfrak{M}/K$ mit den Anfangsexponenten $0 < h_1 < \ldots < h_n$ und ist für die ganzen Zahlen $0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$ die erste nicht verschwindende Differenz in der Kette,*

$$\nu_1 - h_1, \ldots, \nu_n - h_n$$

etwa $\nu_r - h_r$, negativ, so ist

$$\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Z_0, \ldots, Z_n) \equiv 0 \bmod u.$$

Aus der Form von Z_r und der Definition der Differentiation D^{ν_r} folgt nämlich jetzt $D^{\nu_r} Z_r \equiv 0 \bmod u$ und daher

$$\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_r}(Z_0, \ldots, Z_n) \equiv \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & 0 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 0 \ldots 0 & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \bmod u.$$

Die $r + 1$ ersten Zeilen von $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Z_0, \ldots, Z_n)$ sind also $\bmod u$ linear abhängig und das bestätigt die Behauptung.

Nunmehr erhält man mühelos die gesuchte modultheoretische Deutung für die Ordnungen einer Wronskischen Determinante.

Satz 4. *Sind $Y_0, \ldots, Y_n$ die u-Taylorentwicklungen der Funktionen $y_0, \ldots, y_n$, so sind die Ordnungen der Wronskischen Determinant $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ gleich den Exponenten der Hermiteschen Invarianten des Potenzreihenmoduls*

$$\mathfrak{M} = Y_0 K + \ldots + Y_n K.$$

Die Wronskische Determinante $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ selbst ist gleich der Determinante der Matrix A in der Basistransformation

$$\{Y_0, \ldots, Y_n\} = \{Z_0, \ldots, Z_n\} \mathsf{A},$$

wo $Z_0, \ldots, Z_n$ eine Hermitesche Basis von $\mathfrak{M}/K$ bedeutet.

In der Tat, die Wronskische Determinante $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$ hat die gleichen Ordnungen wie $\Delta(Y_0, \ldots, Y_n)$ und diese wiederum die gleichen Ordnungen wie $\Delta(Z_0, \ldots, Z_n)$. Dabei kann $\Delta(Z_0, \ldots, Z_n)$ gekennzeichnet werden als die erste Determinante $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Z_0, \ldots, Z_n)$ im Sinne lexikographischer Anordnung, für die $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(Z_0, \ldots, Z_n) \not\equiv 0 \bmod u$ ist. Nach Hilfssatz 1 und 2 besitzt aber gerade $\Delta_{h_1, \ldots, h_n}(Z_0, \ldots, Z_n)$ diese letzte Eigenschaft, d. h. es ist $\Delta(Z_0, \ldots, Z_n) = \Delta_{h_1, \ldots, h_n}(Z_0, \ldots, Z_n)$, wo $h_1, \ldots, h_n$ die Hermiteschen Invarianten von $\mathfrak{M}$ bedeuten.

Aus der Gleichung $\Delta(Y_0, \ldots, Y_n) = \Delta(Z_0, \ldots, Z_n) \det(A)$ folgt nun weiter auf Grund von Hilfssatz 1 die Kongruenz $\Delta(Y_0, \ldots, Y_n) \equiv \det(A) \bmod u$. Da andererseits $\Delta(Y_0, \ldots, Y_n) \equiv \Delta(y_0, \ldots, y_n) \bmod u$ ist und die Elemente der Matrix A aus K stammen, muß notwendig $\Delta(y_0, \ldots, y_n) = \det(A)$ sein.

Mit Hilfe der modultheoretischen Deutung der Wronskischen Determinante läßt sich schließlich leicht feststellen, wie sie sich bei Wechsel der Differentiation transformiert. Ich nehme jetzt an, in K seien zwei Differentiationen gegeben, eine „gestrichene"

$$y', y'', \ldots, y'^{(\nu)}, \ldots$$

und eine punktierte

$$\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \dot{y}^{(\nu)}, \ldots$$

Dabei gehe die punktierte Differentiation aus der gestrichenen mit Hilfe der Funktion x nach der Kettenregel hervor, wobei $\dot{x} \not\equiv 0$ sei. Man erhält also die punktierte v-Taylorentwicklung

$$Y_v = y + \dot{y}v + \ldots + \dot{y}^{(\nu)} v^\nu + \ldots$$

einer beliebigen Funktion y aus K mit Hilfe der punktierten v-Taylorentwicklung

$$X_v = x + \dot{x}v + \ldots + \dot{x}^{(\nu)} v^\nu + \ldots$$

von x, indem man in der gestrichenen u-Taylorentwicklung

$$Y_u = y + y'u + \ldots + y'^{(\nu)} u^\nu + \ldots$$

von y überall u durch

$$u = \dot{x}v + \ldots + \dot{x}^{(\nu)} v^\nu + \ldots \tag{5}$$

ersetzt.

Satz 5. *Die punktierte Wronskische Determinante* $\dot{\Delta}(y_0, \ldots, y_n)$ *und die gestrichene Wronskische Determinante* $\Delta'(y_0, \ldots, y_n)$ *haben die gleichen Ordnungen* $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n$. *Es ist*

$$\dot{\Delta}(y_0, \ldots, y_n) = \Delta'(y_0, \ldots, y_n)(\dot{x})^{\mu_1 + \ldots + \mu_n}.$$

Zum Beweis betrachte ich die Moduln

$$\mathfrak{M} = Y_{0u}K + \ldots + Y_{nu}K \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{N} = Y_{0v}K + \ldots + Y_{nv}K,$$

die durch die gestrichenen u-Taylorentwicklungen bzw. die punktierten v-Taylorentwicklungen von $y_0, \ldots, y_n$ aufgespannt werden. $\mathfrak{N}$ entsteht aus $\mathfrak{M}$, indem ich in jeder Potenzreihe von $\mathfrak{M}$ überall u durch (5) ersetze. Diese Ersetzung gibt für eine Hermitesche Basis

$$Z_0 = 1 + \ldots, Z_1 = u^{\mu_1} + \ldots, \ldots, Z_n = u^{\mu_n} + \ldots$$

von $\mathfrak{M}/K$ die Transformation

$$Z_0 = W_0, Z_1 = (\dot{x})^{\mu_1} W_1, \ldots, Z_n = (\dot{x})^{\mu_n} W_n,$$

wo

$$W_0 = 1 + \ldots, W_1 = v^{\mu_1} + \ldots, \ldots, W_n = v^{\mu_n} + \ldots$$

offenbar eine Hermitesche Basis von $\mathfrak{N}/K$ ist. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ haben also die gleichen Hermiteschen Invarianten, mithin $\dot{\Delta}(y_0, \ldots, y_n)$ und $\Delta'(y_0, \ldots, y_n)$ die gleichen Ordnungen.

Aus den Gleichungen

$$\{Y_{0u}, \ldots, Y_{nu}\} = \{Z_0, \ldots, Z_n\}\,\mathsf{A} \text{ und } \{Y_{0v}, \ldots, Y_{nv}\} = \{W_0, \ldots, W_n\} \begin{Bmatrix} 1 & & \\ & (\dot{x})^{\mu_1} & \\ & & \ddots \\ & & (\dot{x})^{\mu_n} \end{Bmatrix} \mathsf{A}$$

folgt nun weiter

$$\dot{\Delta}(y_0, \ldots, y_n) = \det(\mathsf{A})\,(\dot{x})^{\mu_1 + \ldots + \mu_n} = \Delta'(y_0, \ldots, y_n)\,(\dot{x})^{\mu_1 + \ldots + \mu_n}.$$

4. Arithmetische Kennzeichnung der Ordnungen einer Wronskischen Determinante.

In K liege wieder eine feste gestrichene Differentiation zugrunde. Was läßt sich allgemein über die arithmetische Natur der Ordnungen einer Wronskischen Determinante sagen? Bei der Beantwortung dieser Frage sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die Charakteristik $\chi(K) = 0$ oder $\chi(K) > 0$ ist. Im Falle der Charakteristik 0 betrachte ich die ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge. Im Falle der Charakteristik $p > 0$ denke ich mir jede ganze Zahl in eine p-adische Reihe mit den reduzierten Resten $0, 1, \ldots, p-1$ als Koeffizienten entwickelt und vergleiche entsprechende Koeffizienten in den p-adischen Entwicklungen.

Satz 6. *Im Falle $\chi(K) = 0$ ist zugleich mit μ auch jede nichtnegative ganze Zahl $\nu \leqq \mu$ eine Ordnung von $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$.*

Im Falle $\chi(K) = p > 0$ ist zugleich mit μ auch jede nichtnegative ganze Zahl ν, deren p-adische Koeffizienten einzeln nicht größer als die von μ sind, eine Ordnung von $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$.

Selbstverständlich zieht die im Falle $\chi(K) > 0$ an ν gestellte Bedingung die Ungleichung $\nu \leqq \mu$ nach sich; sie ist also schärfer als die Bedingung im Falle $\chi(K) = 0$.

Der Beweis des Satzes 6 kann mit Hilfe der modultheoretischen Deutung der Ordnungen einer Wronskischen Determinante einheitlich für beide Fälle geführt werden. Ich betrachte den Modul

$$\mathfrak{M} = Y_0 \cdot K + \ldots + Y_n \cdot K,$$

der durch die u-Taylorentwicklungen $Y_0, \ldots, Y_n$ von $y_0, \ldots, y_n$ aufgespannt wird und greife aus ihm eine Hermitesche Basis

$$Z_0 = 1 + \ldots, Z_1 = u^{\mu_1} + \ldots, \ldots, Z_n = u^{\mu_n} + \ldots$$

heraus. Die Wronskische Determinante $\Delta(Z_0, \ldots, Z_n)$ besitzt dann die Ordnungen $0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ und diese sind zugleich die Ordnungen von $\Delta(y_0, \ldots, y_n)$. In dem Potenzreihenkörper T^* will ich abkürzend $D^\nu Z = Z^{(\nu)}$ schreiben.

Ich schließe indirekt. μ sei eine der Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$; $\nu < \mu$ sei eine natürliche Zahl, die im Falle $\chi(K) = p > 0$ nicht größere p-adische Koeffizienten als μ besitzt. Ich nehme an, ν komme entgegen der Behauptung unter den Ordnungszahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ nicht vor. Nach der Definition der Wronskischen Determinante muß dann die Zeile

$$Z_0^{(\nu)}, \ldots, Z_n^{(\nu)} \tag{6}$$

linear abhängen von denjenigen Zeilen aus $\Delta(Z_0, \ldots, Z_n)$, deren Ableitungsordnungen $< \nu$ sind, also etwa von den $r+1$ Zeilen

$$\begin{array}{l} Z_0, \quad \ldots, Z_n \\ Z_0^{(\mu_1)}, \ldots, Z_n^{(\mu_1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ Z_0^{(\mu_r)}, \ldots, Z_n^{(\mu_r)} \end{array} \qquad (\mu_r < \nu < \mu). \tag{7}$$

Andererseits gilt für die unter den $Z_0, \ldots, Z_n$ vorkommende Potenzreihe $Z = u^\mu + \ldots$ mit dem Anfangsexponenten μ offenbar

$$Z^{(\nu)} = \binom{\mu}{\nu} u^{\mu-\nu} + \ldots$$

Dabei ist der Binomialkoeffizient $\binom{\mu}{\nu}$, wie ich nachträglich bestätigen werde (siehe Hilfssatz 3), infolge der arithmetischen Annahmen über μ und ν durch die Charakteristik $\chi(K)$ unteilbar, also $Z^{(\nu)} = \binom{\mu}{\nu} u^{\mu-\nu} W$ mit einem Potenzreihenfaktor $W \equiv 1 \bmod u$. Dagegen sind die Ableitungen $Z^{(\mu_i)}$ für $\mu_i < \nu$ sicher durch eine höhere Potenz von u teilbar als $u^{\mu-\nu}$, folglich

$Z^{(\mu_i)} = \binom{\mu}{\nu} u^{\mu-\nu} W_i$ mit einem Potenzreihenfaktor $W_i \equiv 0 \mod u$. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} Z_0, & \ldots, Z_r, & Z \\ Z_0^{(\mu_1)}, & \ldots, Z_r^{(\mu_1)}, & Z^{(\mu_1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_0^{(\mu_r)}, & \ldots, Z_r^{(\mu_r)}, & Z^{(\mu_r)} \\ Z_0^{(\nu)}, & \ldots, Z_r^{(\nu)}, & Z^{(\nu)} \end{vmatrix} = \binom{\mu}{\nu} u^{\mu-\nu} \begin{vmatrix} Z_0, & \ldots, Z_r, & W_0 \\ Z^{(\mu_1)}, & \ldots, Z_r^{(\mu_1)}, & W_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_0^{(\mu_r)}, & \ldots, Z_r^{(\mu_r)}, & W_r \\ Z_0^{(\nu)}, & \ldots, Z_r^{(\nu)}, & W \end{vmatrix}$$

kann daher wegen

$$\begin{vmatrix} Z_0, & \ldots, Z_r, & W_0 \\ Z_0^{(\mu_1)}, & \ldots, Z_r^{(\mu_1)}, & W_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_0^{(\mu_r)}, & \ldots, Z_r^{(\mu_r)}, & W_r \\ Z_0^{(\nu)}, & \ldots, Z_r^{(\nu)}, & W \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \mod u$$

nicht verschwinden. Die Zeile (6) muß also doch von den Zeilen (7) linear unabhängig sein. Widerspruch!

Der Beweis des Satzes 6 ist damit jedenfalls gesichert, wenn ich noch folgendes zeige.

Hilfssatz 3. *Seien μ und ν natürliche Zahlen. Der Benomialkoeffizient $\binom{\mu}{\nu}$ ist dann und nur dann*

a) *durch 0 unteilbar (also $\neq 0$), wenn $\nu \leqq \mu$ ist;*

b) *durch die Primzahl p unteilbar, wenn die p-adischen Koeffizienten von ν einzeln nicht größer als die von μ sind.*

Da die Behauptung a) trivial ist, kommt es beim Beweis nur auf b) an. Ich betrachte über einen Körper der Charakteristik p, also etwa über K, das Polynom $(1+u)^\mu$. Offenbar ist $\binom{\mu}{\nu}$ dann und nur dann durch p unteilbar, wenn in diesem Polynom die Potenz u^ν wirklich vorkommt. Aus

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots + \alpha_s p^s \text{ mit } 0 \leqq \alpha_i \leqq p-1$$

folgt aber

$$(1+u)^\mu = (1+u)^{\alpha_0} (1+u^p)^{\alpha_1} \ldots (1+u^{p^s})^{\alpha_s}.$$

Dabei kommen in $(1+u)^{\alpha_0}$ alle Potenzen von u mit einem Exponenten $\leqq \alpha_0$ wirklich vor, in $(1+u^p)^{\alpha_1}$ kommen alle Potenzen von u^p mit einem Exponenten $\leqq \alpha_1$ wirklich vor usf. Beim Multiplizieren der $s+1$ Faktoren

$$(1+u)^{\alpha_0}, \quad (1+u^p)^{\alpha_1}, \ldots, (1+u^{p^s})^{\alpha_s}$$

können sich schließlich aus Gradgründen keine Glieder wegheben. In $(1+u)^u$ kommen daher wirklich alle und nur die Potenzen von u vor, deren Exponenten ν nicht größere p-adische Koeffizienten als μ besitzen.

Im Falle $\chi(K) = 0$ folgt aus Satz 6 unmittelbar, daß die Wronskische Determinante von $n+1$ über k linear unabhängige Funktionen die Ordnungen $0, 1, \ldots, n$ besitzen. Enthält K mindestens eine Funktion x mit $x' \neq 0$, so gibt es auch stets $n+1$ über k linear unabhängige Funktionen, nämlich z. B. $1, x, x^2, \ldots, x^n$, also kann man stets eine Wronskische Determinante mit den vorgegebenen Ordnungen $0, 1, \ldots, n$ bilden.

Auch im Falle $\chi(K) = p > 0$ ist die in Satz 6 angegebene arithmetische Eigenschaft für die Ordnungen einer Wronskischen Determinante kennzeichnend. Es gilt nämlich:

Satz 7. *Kommen unter den Zahlen* $0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n$ *mit einem* μ *stets auch alle Zahlen vor, deren p-adische Koeffizienten nicht größer als die von* μ *sind, und enthält* K *mindestens eine Funktion* x, *für die* $x' \neq 0$ *ist, so sind* $\mu_0, \ldots, \mu_n$ *die Ordnungen der Wronskischen Determinante* $\Delta(x^{\mu_0}, \ldots, x^{\mu_n})$.

Beim Beweis gehe ich in K zu der Differentiation D_x^ν nach x über, aus der die gestrichene Differentiation mit Hilfe von x nach der Kettenregel hervorgeht[5]). Sie liefert $D_x^\nu x^{\mu_j} = \binom{\mu_j}{\nu} x^{\mu_j - \nu}$. Die Ordnungen der Wronskischen Determinante von $x^{\mu_0}, \ldots, x^{\mu_n}$ ändern sich ferner nach Satz 5 beim Übergang zu dieser Differentiation nach x nicht.

Es genügt daher zu zeigen: Ist $0 < \nu < \mu_n$ eine unter den Zahlen $\mu_0, \ldots, \mu_n$ nicht vorkommende ganze Zahl, so hängt die Zeile

$$D_x^\nu x^{\mu_0}, \ldots, D_x^\nu x^{\mu_n}$$

linear ab von den Zeilen

$$D_x^{\mu_i} x^{\mu_0}, \ldots, D_x^{\mu_i} x^{\mu_n} \text{ mit } \mu_i < \nu.$$

Da ν unter den $\mu_0, \ldots \mu_n$ nicht vorkommt, und da das System $\mu_0, \ldots, \mu_n$ nach Voraussetzung sicher alle Zahlen umfaßt, deren p-adische Koeffizienten nicht größer als die von μ_j sind, ist aber $\binom{\mu_j}{\nu}$ nach Hilfssatz 3 durch p teilbar. Also $D_x^\nu x^{\mu_j} = 0$ für $j = 0, \ldots, n$, womit die in Frage stehende lineare Abhängigkeit schon bewiesen ist.

Jena, Abbeanum, den 1. Oktober 1937.

---

[5]) Vgl. loc. cit. [1]) S. 228.

(Eingegangen am 29. September 1938.)

Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. II.

Allgemeine Theorie der Weierstraßpunkte.

Von

Friedrich Karl Schmidt in Jena.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 75

Teil I. Allgemeiner Fall.

§ 1. Grundlagen. Hauptsätze 76
§ 2. Der zusammengesetzte Verzweigungsdivisor der kanonischen Klasse. Beweis der Hauptsätze 79
§ 3. Die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte 84

Teil II. Spezialfälle.

§ 4. Hyperelliptische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper 86
§ 5. Allgemeines Beispiel für nichtklassische Fehlzahlverteilung der gewöhnlichen Punkte bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper 89
§ 6. Bestimmung der Fehlzahlverteilungen der gewöhnlichen Punkte im Falle des Geschlechts 3 und 4 bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper . . 94

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit behandelt eine Frage, die beim Ausbau der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen eine Rolle spielt und bisher unbeantwortet geblieben ist, nämlich die allgemeine Theorie der Weierstraßpunkte. Die klassische Theorie der Weierstraßpunkte hängt bekanntlich eng mit dem Riemann-Rochschen Satz zusammen. Nun läßt sich der Riemann-Rochsche Satz, wie man weiß, vom klassischen Fall auf den arithmetischen Fall eines algebraischen Funktionenkörpers in einer Unbestimmten mit beliebigem Konstantenkörper übertragen. Man wird daher wohl zunächst vermuten, daß sich auch die Theorie der Weierstraßpunkte ohne weiteres auf den arithmetischen Fall ausdehnen lasse. Das ist jedoch keineswegs so, und H. Hasse hat daher bereits vor mehreren Jahren die Aufgabe gestellt, die Theorie der Weierstraßpunkte allgemein zu entwickeln. Dabei stößt man, eigentlich zum erstenmal in der arithmetischen Theorie, auf neuartige, vom klassischen abweichende Verhältnisse, und das möchte ich auseinandersetzen. Hält man sich vor Augen, daß die Theorie der Weierstraßpunkte eine Vielfachheitsfrage betrifft, da sie ja nach den möglichen Multiplizitäten einer einzigen, festen Polstelle fragt, so wird man allerdings im Fall der Charak-

teristik p von vornherein auf Abweichungen gegenüber der vertrauten Sachlage im Fall der Charakteristik 0 gefaßt sein.

Im folgenden beschäftige ich mich zunächst (Teil I) mit dem allgemeinen Fall eines algebraischen Funktionenkörpers mit beliebigem Konstantenkörper. Das Hauptergebnis lautet: Die klassische Definition der Weierstraßpunkte, die in den bisherigen Arbeiten[1]) auch innerhalb der arithmetischen Theorie verwendet wurde, ist für eine allgemeine Theorie selbst bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper unbrauchbar (§ 5). Ändert man dagegen die klassische Definition geeignet ab, so erhält man eine allgemeingültige Theorie, die zur klassischen analog verläuft und im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörpers der Charakteristik 0 wieder in die klassische Theorie übergeht. Die allgemeine Definition der Weierstraßpunkte und die Hauptsätze gebe ich in § 1 an. Bei den Beweisen (§ 2) spielt die Verallgemeinerung der Wronskischen Determinante, die ich in einer vorangehenden Arbeit eingeführt habe[2]), eine entscheidende Rolle.

Im zweiten Teil der Arbeit stelle ich einige Spezialfälle zusammen, die die allgemeine Theorie beleuchten. Die genauere Untersuchung der hyperelliptischen Funktionenkörper mit beliebigem Konstantenkörper ohne Voraussetzung separabler Erzeugbarkeit zeigt, welche Möglichkeiten bei beliebigem Konstantenkörper bestehen (§ 4). Einem ähnlichen Zweck dient der letzte Paragraph, der den Körpern vom Geschlecht 3 und 4 mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper gewidmet ist.

Teil I. Allgemeiner Fall.

§ 1.

Grundlagen. Hauptsätze.

Worum handelt es sich in der Theorie der Weierstraßpunkte? Sei K ein Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten mit dem beliebigen Konstantenkörper k. Man greife aus K alle Funktionen a heraus, deren Nennerdivisor Potenz eines beliebigen, aber fest gewählten Primdivisors $\mathfrak{P}$ ist, $a \sim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}^\nu}$. Gibt es zu der natürlichen Zahl ν eine Funktion a mit dem genauen Nennerdivisor $\mathfrak{P}^\nu$, so nennt man ν eine *Polzahl* für den Primdivisor $\mathfrak{P}$; existiert dagegen zu der natürlichen Zahl φ in K keine Funktion mit dem genauen Nennerdivisor $\mathfrak{P}^\varphi$, so heiße φ eine *Fehlzahl* von $\mathfrak{P}$.

---

[1]) Vgl. H. L. Schmid, Zur Arithmetik der zyklischen p-Körper, Journ. f. reine u. angew. Math. **176** (1937), S. 161, insbesondere S. 166.

[2]) F. K. Schmidt, Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 62.

Die Fehlzahlen hängen im allgemeinen selbstverständlich von der Auswahl des Primdivisors $\mathfrak{P}$ ab. Sie stehen aber regelmäßig in enger Beziehung zum Geschlecht g von K. Aus dem Riemann-Rochschen Satz folgt nämlich, daß bei beliebigem Konstantenkörper k jede Fehlzahl

$$\varphi < 2g$$

ist, und daß bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper k die Anzahl der Fehlzahlen von $\mathfrak{P}$ mit dem Geschlecht übereinstimmt[3]).

Soweit die Grundlagen der Theorie. Im klassischen Fall definiert man nun einen Primdivisor $\mathfrak{P}$ als Weierstraßpunkt, wenn die Menge seiner Fehlzahlen von der Zahlenmenge $1, 2, \ldots, g$ abweicht, und man erklärt $\mathfrak{P}$ als gewöhnlichen Punkt, wenn die Menge seiner Fehlzahlen mit der Zahlenmenge $1, 2, \ldots, g$ übereinstimmt. Fast alle Primdivisoren eines algebraischen Funktionenkörpers mit dem Körper der komplexen Zahlen als Konstantenkörper sind dann gewöhnliche Punkte; höchstens endlich viele sind also Weierstraßpunkte. Ist das Geschlecht $g > 1$, so gibt es ferner mindestens $2g + 2$ verschiedene Weierstraßpunkte. Mit Hilfe dieser Sätze über Weierstraßpunkte läßt sich schließlich zeigen, daß die Automorphismengruppe von K/k für einen algebraischen Funktionenkörper vom Geschlecht $g > 1$ endlich ist.

Die klassische Definition der Weierstraßpunkte versagt jedoch im arithmetischen Fall, und zwar sogar bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper. Man kann nämlich algebraische Funktionenkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik bilden, deren Primdivisoren sämtlich Weierstraßpunkte im klassischen Sinne sind (vgl. § 5); die klassische Theorie wird dann selbstverständlich sinnlos. Damit entsteht die Aufgabe, eine Definition der Weierstraßpunkte aufzustellen, auf die sich im arithmetischen Fall eine zur klassischen analoge Theorie aufbauen läßt, und die im klassischen Fall wieder in die klassische Definition übergeht. Das soll nun geschehen.

Für einen beliebigen, aber fest gewählten Primdivisor $\mathfrak{P}$ eines algebraischen Funktionenkörpers K mit beliebigem Konstantenkörper k bestehen offenbar zwei Möglichkeiten. Entweder nur endlich viele Primdivisoren von K haben die gleichen Fehlzahlen wie $\mathfrak{P}$. Dann will ich $\mathfrak{P}$ einen *Weierstraßpunkt* nennen. Oder unendlich viele Primdivisoren von K haben die gleichen Fehlzahlen wie $\mathfrak{P}$. Dann soll $\mathfrak{P}$ ein *gewöhnlicher Punkt* heißen. Der Unterschied dieser Definitionen gegenüber den klassischen springt unmittelbar in die Augen. Bei der klassischen Definition werden die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte

[3]) Vgl. die Darstellung bei Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902.

von vornherein festgelegt, während die neue Definition die Fehlzahlverteilung der gewöhnlichen Punkte offen läßt. Aus den klassischen Sätzen entnimmt man aber unmittelbar, daß die neuen Definitionen im klassischen Fall mit den klassischen gleichwertig sind, was sich übrigens aus dem folgenden unabhängig davon von neuem ergeben wird. Von jetzt ab verwende ich die Bezeichnung Weierstraßpunkt und gewöhnlicher Punkt stets im Sinne der neuen Definitionen.

Aus der neuen Definition folgt ohne weiteres:

I. *Ein algebraischer Funktionenkörper K mit beliebigem Konstantenkörper besitzt höchstens endlich viele Weierstraßpunkte.*

Zum Beweis denke man sich etwa zu jedem Primdivisor von K die zugehörige Fehlzahlenmenge hingeschrieben. Da jede Fehlzahl $< 2g$ ist und es nur endlich viele natürliche Zahlen $< 2g$ gibt, erhält man dann höchstens endlich viele Fehlzahlenmengen, also sicher bloß endlich viele, die je zu nur endlich vielen Primdivisoren von K gehören. Es gibt mithin wirklich höchstens endlich viele Weierstraßpunkte.

Bei beliebigem Konstantenkörper läßt sich über die Endlichkeit der Anzahl der Weierstraßpunkte hinaus keine allgemeine Aussage machen. Die gewöhnlichen Punkte brauchen keineswegs alle die gleichen Fehlzahlen zu haben, und es braucht auch bei beliebig großem Geschlecht keinen Weierstraßpunkt zu geben (§ 4). Anders liegen die Dinge dagegen, wenn man den Konstantenkörper algebraisch abgeschlossen annimmt, was ich für den Rest des ersten Teils dieser Arbeit tun will. Dann gilt:

II. *Bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper haben alle gewöhnlichen Punkte von K die gleichen Fehlzahlen. Im Falle $g > 1$ gibt es ferner mindestens einen Weierstraßpunkt.*

Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_g$ die Fehlzahlen eines gewöhnlichen Punktes und $\psi_1, \ldots, \psi_g$ diejenigen eines Weierstraßpunktes, jeweils der Größe nach geordnet, so ist die erste nichtverschwindende Differenz in der Differenzenkette

$$\psi_1 - \varphi_1, \ldots, \psi_g - \varphi_g$$

positiv.

Den Beweis führe ich in § 2. Hier möchte ich nur noch die Analogie zur klassischen Theorie hervorheben, die jedoch in zweifacher Hinsicht eine Abweichung in sich schließt. Auch bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper muß nämlich die Fehlzahlverteilung der gewöhnlichen Punkte im allgemeinen offen gelassen werden. Ist die Charakteristik des algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörpers 0, so sind die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte allerdings stets gleich $1, \ldots, g$. Im Fall der Charakteristik $p > 0$ gilt aber für die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte ein Verteilungsgesetz, das zwar die genaue p-adische Verallgemeinerung des klassischen darstellt,

das aber die Fehlzahlen nicht mehr eindeutig bestimmt, so daß diese von der Natur des betrachteten Funktionenkörpers abhängen. Genaueres enthält § 3. Die zweite Abweichung betrifft die Anzahl der verschiedenen Weierstraßpunkte. Darüber zeige ich in § 2:

III. *Im Fall der Charakteristik 0 besitzt ein Körper K vom Geschlecht $g > 1$ mindestens $2g + 2$ verschiedene Weierstraßpunkte. Diese untere Schranke stellt in einem hyperelliptischen Körper K die genaue Anzahl dar; in jedem anderen Körper K wird sie übertroffen.*

Im Fall der Charakteristik $p > 0$ braucht dagegen in K bei beliebig hohem Geschlecht nur ein Weierstraßpunkt vorzukommen.

Trotz dieser Abweichungen läßt sich mit Hilfe von II., wie H. L. Schmid erkannt hat, wieder die Endlichkeit der Automorphismengruppe von K/k für algebraische Funktionenkörper vom Geschlecht $g > 1$ beweisen. Hurwitz hat nämlich im klassischen Fall einen Beweis für die Endlichkeit der Automorphismengruppe angegeben, der mit der Existenz mindestens eines Weierstraßpunktes auskommt, und dieser kann nunmehr mit geeigneten Abänderungen auf den arithmetischen Fall übertragen werden[3a]).

§ 2.

Der zusammengesetzte Verzweigungsdivisor der kanonischen Klasse. Beweis der Hauptsätze.

Die klassische Theorie der Weierstraßpunkte benutzt außer dem Riemann-Rochschen Satz noch die Wronskische Determinante als Hilfsmittel[3]). Im arithmetischen Fall stütze ich den Beweis der Hauptsätze in entsprechender Weise auf die Verallgemeinerung der Wronskischen Determinante, die ich in einer vorangehenden Arbeit eingeführt habe[2]). Die Tatsache, daß die Wronskische Determinante von g linear unabhängigen Funktionen im Fall der Charakteristik $p > 0$ keineswegs notwendig aus den 0-ten, 1-ten, ... $(g-1)$-ten Ableitungen dieser Funktionen gebildet zu sein braucht, zieht gerade die schon angeführte Abweichung in der Fehlzahlverteilung der gewöhnlichen Punkte nach sich.

Da der Fall $g = 0$ für die Theorie der Weierstraßpunkte offenbar ohne Interesse ist, betrachte ich von vornherein einen algebraischen Funktionenkörper K mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper k vom Geschlecht $g > 0$. Aus der kanonischen Klasse (Differentialklasse) W von K greife ich g linear unabhängige ganze Divisoren $\mathfrak{W}_0, \ldots, \mathfrak{W}_{g-1}$ heraus. Ist $\mathfrak{W}$ ein beliebiger, aber fester Divisor aus W, so suche ich g Funktionen $y_i \sim \frac{\mathfrak{W}_i}{\mathfrak{W}}$ auf und bilde nach klassischem Vorbild die Wronskische Determinante

3a) H. L. Schmid, Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik, Journ. f. r. angew. Math. 179 (1938), S. 5—21.

$\Delta_x(y_0, \ldots, y_{g-1})$, wo das angehängte x andeuten soll, daß in K die Differentiation nach einer festen, separierenden Funktion x zugrunde gelegt wird. Die Ordnungen von $\Delta_g(y_1, \ldots, y_g)$ seien $0, \mu_1, \ldots, \mu_{g-1}$. Für den Divisor

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{W}_g \Delta_x(y_0, \ldots, y_{g-1}) (dx)^{\mu_1 + \cdots + \mu_g + 1}$$

ergeben sich dann in üblicher Weise die folgenden Invarianzeigenschaften [4]).

a) $\mathfrak{B}$ ist unabhängig von der Wahl der Differentiationsvariablen x. Ersetzt man nämlich x durch die separierende Funktion t, so erhält man

$$\Delta_t(y_0, \ldots, y_{g-1}) = \Delta_x(y_0, \ldots, y_{g-1}) \left(\frac{dx}{dt}\right)^{\mu_1 + \cdots + \mu_{g-1}},$$

was die behauptete Invarianz bestätigt. Die invarianten Ableitungsordnungen $0, \mu_1, \ldots, \mu_{g-1}$ sollen kurz die Ordnungen einer Wronskischen Determinante von W heißen.

b) $\mathfrak{B}$ ist unabhängig von der Wahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren $\mathfrak{W}_i$ und der zugehörigen Funktionen y_i. Der Übergang zu anderen ganzen Basisdivisoren und zugehörigen Funktionen z_i ist nämlich gleichwertig mit einer linearen Transformation der y_i,

$$\{z_0, \ldots, z_{g-1}\} = \{y_0, \ldots, y_{g-1}\} A,$$

deren Matrix aus k stammt. Die Wronskische Determinante multipliziert sich dann mit $\det(A)$, was den zugehörigen Divisor nicht ändert.

c) $\mathfrak{B}$ ist unabhängig von dem zur Nennerbildung benutzten Divisor $\mathfrak{W}$. Bedeutet nämlich $\mathfrak{W}^*$ einen von $\mathfrak{W}$ verschiedenen Divisor aus W und ist $c \sim \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}^*}$, so folgt $cy_i \sim \frac{\mathfrak{W}_i}{\mathfrak{W}^*}$ und

$$\Delta_x(cy_0, \ldots, cy_{g-1}) = c^g \Delta_x(y_0, \ldots, y_{g-1}),$$

also die Divisorengleichung

$$\mathfrak{W}^{*g} \Delta_x(cy_0, \ldots, cy_{g-1}) = \mathfrak{W}^g \Delta_x(y_0, \ldots, y_{g-1}).$$

Der Divisor $\mathfrak{B}$ hängt mithin nur von der Klasse W ab. Ich nenne ihn den zusammengesetzten Verzweigungsdivisor von W, weil er im klassischen Fall in leicht angebbarer Weise mit den von Hensel und Landsberg eingeführten Verzweigungsdivisoren [5]) zusammenhängt. Sein Grad ist $(2g-2)(g+\sum \mu_i)$, also $= 0$, im Falle $g = 1$ und > 0, sobald $g > 1$ ist. $\mathfrak{B}$ ist übrigens ein ganzer Divisor, wie sich aus den folgenden Überlegungen mitergibt.

Die angeführten Invarianzeigenschaften des Divisors $\mathfrak{B}$ lassen sich dazu benutzen, für einen beliebigen Primdivisor $\mathfrak{P}$ den $\mathfrak{P}$-Beitrag zu $\mathfrak{B}$ zu untersuchen. Das geschieht in zwei Schritten. Ich wähle den Divisor $\mathfrak{W}$ prim zu $\mathfrak{P}$

---

[4]) Vgl. l. c. [3]), S. 452—457, wo die entsprechenden Überlegungen für die gewöhnliche Wronskische Determinante durchgeführt sind.

[5]) l. c. [3]), S. 452 u. 456.

und differenziere nach einem Primelement π für $\mathfrak{P}$. Da $(d\pi)$ durch $\mathfrak{P}$ unteilbar ist, stimmt der $\mathfrak{P}$-Beitrag zu

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{W}^g \, \Delta_\pi \, (y_0, \ldots, y_{g-1}) \, (d\pi)^{\mu_1 + \cdots + \mu_{g-1}}$$

mit dem $\mathfrak{P}$-Beitrag zu der Wronskischen Determinante $\Delta_\pi (y_0, \ldots, y_{g-1})$ überein. Es braucht also nur noch dieser letzte $\mathfrak{P}$-Betrag abgeschätzt zu werden, was durch geeignete Wahl der Multipla y_i von $\mathfrak{W}^{-1}$ möglich ist. Ich betrachte den Modul aller Multipla von $\mathfrak{W}^{-1}$ und ordne jeder darin enthaltenen Funktion ihre nach Potenzen von π fortschreitende Potenzreihenentwicklung für $\mathfrak{P}$ zu. Aus dem so entstehenden Potenzreihenmodul greife ich eine Hermitesche Basis

(1) $$z_0 = \pi^{h_0} + \ldots, \quad z_1 = \pi^{h_1} + \ldots, \quad z_{g-1} = \pi^{h_{g-1}} + \ldots$$

heraus, deren Anfangsexponenten also den Ungleichungen

$$h_0 < h_1 < \ldots < h_{g-1}$$

genügen. Die Potenzen $\mathfrak{P}^{h_0}, \ldots, \mathfrak{P}^{h_{g-1}}$, die von der Auswahl des Nennerdivisors $\mathfrak{W}$ unabhängig sind, bezeichne ich als *Hermitesche $\mathfrak{P}$-Invarianten* von W. Da die Klasse W primitiv und folglich mindestens ein Multiplum von $\mathfrak{W}^{-1}$ zu $\mathfrak{P}$ prim ist, muß notwendig $h_0 = 0$ sein. Aus den Sätzen über die Determinanten $\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_{g-1}}$ einer Hermiteschen Basis ergibt sich nun [6]): Es ist

$$\Delta_{h_1, \ldots, h_{g-1}} \, (z_0, \ldots, z_{g-1}) \equiv 1 \bmod \pi,$$

also jedenfalls

$$\Delta_{h_1, \ldots, h_{g-1}} (z_0, \ldots, z_{g-1}) \not\equiv 0.$$

Bildet man daher aus den Ordnungen $0, \mu_1, \ldots, \mu_{g-1}$ von $\Delta (z_0, \ldots, z_{g-1})$ und den Exponenten h_i die Differenzenkette

$$h_1 - \mu_1, \ \ldots, \ h_{g-1} - \mu_{g-1},$$

so muß die erste nichtverschwindende Differenz nach Definition der Wronskischen Determinante positiv sein. Falls alle Differenzen $h_i - \mu_i = 0$ sind, ist $\Delta (z_0, \ldots, z_{g-1}) = \Delta_{h_1, \ldots, h_{g-1}} (z_0, \ldots, z_{g-1}) \equiv 1 \bmod \pi$. Falls aber mindestens eine Differenz $h_i - \mu_i \neq 0$ ist, so folgt aus der vorangehenden Arbeit $\Delta (z_0, \ldots, z_{g-1}) \equiv 0 \bmod \pi$. Zusammengefaßt:

Hilfssatz 1. *In der Differenzenkette*

$$h_1 - \mu_1, \ \ldots, \ h_{g-1} - \mu_{g-1}$$

zwischen den Exponenten h_i der Hermiteschen $\mathfrak{P}$-Invarianten von W und den Ordnungen μ_i einer Wronskischen Determinante von W ist die erste nichtverschwindende Differenz positiv. $\mathfrak{P}$ ist dann und nur dann zu dem zusammengesetzten Verzweigungsdivisor $\mathfrak{B}$ prim, wenn die h_i sämtlich gleich den μ_i sind.

[6]) l. c. [2]), Hilfssatz 1 und 2.

Die Hermiteschen $\mathfrak{P}$-Invarianten h_i von W hängen aber eng mit den Fehlzahlen φ_i von $\mathfrak{P}$ zusammen. Aus dem Riemann-Rochschen Satz schließt man nämlich in bekannter Weise[3]), daß

$$\varphi_1 = h_0 + 1, \ \ldots, \ \varphi_g = h_{g-1} + 1$$

ist. Man erhält somit

Satz 1. *Die Fehlzahlen φ_j aller und nur der zu dem Verzweigungsdivisor $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{W}$ primen Primdivisoren stimmen mit den um 1 vermehrten Ordnungen μ_{j-1} einer Wronskischen Determinante von W überein.*

$$\varphi_j = \mu_{j-1} + 1 \quad (\mu_0 = 0).$$

Die Fehlzahlen ψ_j eines in $\mathfrak{B}$ aufgehenden Primdivisors sind von den φ_j verschieden, und zwar ist die erste nichtverschwindende Differenz in der Differenzenkette

$$\psi_1 - \varphi_1, \ \ldots, \ \psi_g - \varphi_g$$

positiv.

Dieser Satz umfaßt offenbar bereits den Hauptsatz II aus § 1. Er liefert aber zugleich noch zwei Zusätze, nämlich:

Satz 2. *Die Fehlzahlen eines gewöhnlichen Punktes sind gleich den um 1 vermehrten Ordnungen einer Wronskischen Determinante von W.*

Satz 3. *Alle und nur die in dem zusammengesetzten Verzweigungsdivisor von W aufgehenden Primdivisoren sind Weierstraßpunkte.*

Selbstverständlich kann man mit Hilfe von Satz 3 jedem Weierstraßpunkt $\mathfrak{P}$ ebenso wie im klassischen Fall ein Gewicht γ zuschreiben, indem man γ gleich dem genauen Exponenten setzt, mit dem $\mathfrak{P}$ in dem zusammengesetzten Verzweigungsdivisor $\mathfrak{B}$ aufgeht. Die Summe der Gewichte aller Weierstraßpunkte ist dann gleich der Ordnung $(2g-2)\left(g + \sum_{i=1}^{g-1} \mu_i\right)$ von $\mathfrak{B}$, also wegen $\mu_i \geqq i$ sicher mindestens gleich der klassischen Zahl,

$$\sum_{\mathfrak{P}} \gamma_{\mathfrak{P}} = (2g-2)\left(g + \sum_{i=1}^{g-1} \mu_i\right) \geqq (2g-2)\left(g + \sum_{i=1}^{g-1} i\right) = (g-1)\,g\,(g+1).$$

Die klassische Zahl wird offenbar übertroffen, sobald ein $\mu_i > i$ ist, oder, was nach Satz 1 und 2 dasselbe bedeutet, sobald die Fehlzahlen $\varphi_1, \ldots, \varphi_g$ der gewöhnlichen Punkte nicht mit den Zahlen $1, \ldots, g$ übereinstimmen.

Im klassischen Fall läßt sich das Gewicht γ eines Weierstraßpunktes $\mathfrak{P}$ auch durch die Fehlzahlen ψ_j von $\mathfrak{P}$ und die Fehlzahlen φ_j der gewöhnlichen Punkte ausdrücken ($j = 1, \ldots, g$). Im arithmetischen Fall erhält man jedoch auf diese Weise nur eine untere Schranke für γ. Offenbar ist nämlich die Wronskische Determinante $\Delta(z_0, \ldots, z_n)$ der Hermiteschen $\mathfrak{P}$-Basis (1) mindestens durch $\pi^{\sum (h_i - \mu_i)}$ teilbar, woraus sofort

$$\gamma \geqq \sum_i (h_i - \mu_i) = \sum_j (\psi_j - \varphi_j)$$

folgt. Hier steht im Fall der Charakteristik 0 das Gleichheitszeichen, weil dann $\Delta(z_0, \ldots, z_n)$, wie man unmittelbar sieht, genau durch $\pi^{\Sigma(h_i - \mu_i)}$ teilbar ist; dagegen kann im Fall der Charakteristik $p > 0$ durchaus das Ungleichheitszeichen auftreten.

Dieser Umstand bringt es mit sich, daß auch die Aussagen über die Mindestzahl der verschiedenen Weierstraßpunkte in Körpern vom Geschlecht $g > 1$ bei Charakteristik 0 und Charakteristik $p > 0$ voneinander abweichen. Die Summe $\Sigma(\psi_j - \varphi_j)$ kann zunächst ebenso wie in der klassischen Theorie nach oben abgeschätzt werden. Das geschieht bekanntlich mit Hilfe des folgenden, zuerst von Hurwitz benutzten zahlentheoretischen Satzes: Kommen in einem Halbmodul natürlicher Zahlen [7]) insgesamt g natürliche Zahlen nicht vor und ist jede dieser Fehlzahlen $< 2g$, so ist die Summe der g Fehlzahlen $\leqq g^2$; dabei gilt dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn die kleinste Zahl des Moduls gleich 2 ist [8]). Angewandt auf den Halbmodul der Polzahlen von $\mathfrak{P}$ und die g Fehlzahlen ψ_j liefert dieser Satz die Ungleichung $\Sigma \psi_j \leqq g^2$ und wegen $\Sigma \varphi_j \geqq \Sigma j = \frac{g(g+1)}{2}$ weiter die Ungleichung

$$\Sigma(\psi_j - \varphi_j) \leqq \frac{g(g-1)}{2},$$

wo nur im Falle hyperelliptischer Funktionen das Gleichheitszeichen steht. Insgesamt hat man also

$$\gamma \geqq \Sigma(\psi_j - \varphi_j) \leqq \frac{g(g-1)}{2}. \tag{2}$$

Besitzt K die Charakteristik 0 und steht mithin in (2) an erster Stelle das Gleichheitszeichen, so liegt in (2) für jeden Weierstraßpunkt eine Abschätzung des Gewichts nach oben vor. Da die Summe der Gewichte mindestens gleich $(g-1)\,g\,(g+1)$ ist, müssen dann mindestens $2g+2$ verschiedene Weierstraßpunkte existieren, und zwar wird die Mindestzahl $2g+2$ außer bei hyperelliptischen Funktionen stets übertroffen. Bei Körpern der Charakteristik $p > 0$ versagt aber diese klassische Schlußweise, und hyperelliptische Beispiele (vgl. § 4) zeigen, daß dann wirklich bei beliebig großem Geschlecht nur ein Weierstraßpunkt aufzutreten braucht. Damit ist auch Satz III des § 1 bewiesen, wenn zunächst von dem in § 4 ausführlich behandelten hyperelliptischen Fall abgesehen wird.

---

[7]) Unter einem Halbmodul natürlicher Zahlen versteht man eine Menge, die mit zwei natürlichen Zahlen stets auch deren Summe enthält. In der älteren Literatur ist statt dessen die Bezeichnung „additiver Modul" gebräuchlich.

[8]) Siehe l. c. [3]), S. 497.

§ 3.

Die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte.

Die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte eines algebraischen Funktionenkörpers K mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper sind offenbar Körperinvarianten. Im klassischen Fall sind diese Invarianten durch das Geschlecht eindeutig bestimmt, nämlich gleich $1, \ldots, g$. Im arithmetischen Fall können sie dagegen, wie schon erwähnt, von $1, \ldots, g$ verschieden sein. Es liegt daher nahe, ihre zahlentheoretischen Eigenschaften zu untersuchen und festzustellen, wieweit sie allgemein vom Geschlecht abhängen.

Ist $p \geqq 0$ die Charakteristik von K, so entwickle ich jede ganze Zahl in eine p-adische Reihe. Im Fall $p = 0$ schreitet diese Reihe nach Potenzen von 0 fort und reduziert sich mithin auf das Anfangsglied, das gleich der zu entwickelnden Zahl ist, während alle übrigen Entwicklungskoeffizienten gleich 0 gewählt werden können. Im Fall $p > 0$ entnehme ich die Entwicklungskoeffizienten dem reduzierten Restsystem $0, 1, \ldots, p-1$. In jedem Fall vergleiche ich zwei ganze Zahlen hinsichtlich ihrer entsprechenden p-adischen Koeffizienten.

Satz 4. *Sind $\varphi_j = \mu_{j-1} + 1$ die g Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte von K, so kommt unter den Zahlen μ_{j-1} zugleich mit μ auch jede nichtnegative ganze Zahl ν vor, deren p-adische Koeffizienten einzeln nicht größer als die von μ sind.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus der arithmetischen Kennzeichnung der Ordnungen einer Wronskischen Determinante [9]), da ja die Zahlen μ_{j-1} nach Satz 1 Ordnungen einer Wronskischen Determinante sind.

Aus Satz 4 schließt man in bekannter Weise, daß die gewöhnlichen Punkte im Fall der Charakteristik $p = 0$ stets die klassische Fehlzahlverteilung $1, \ldots, g$ besitzen. Im Fall der Charakteristik $p > 0$ können aber bei gegebenem Geschlecht außer der klassischen auch nichtklassische Fehlzahlverteilungen auftreten. Welche Bedingungen bestehen für eine solche nichtklassische Fehlzahlverteilung noch außer Satz 4? Zunächst ist klar, daß der Körper K dann weder rational noch (nach § 4) hyperelliptisch sein kann; mithin ist sein Geschlecht $g > 2$.

Satz 5. *Die $g\,(> 2)$ Fehlzahlen φ_j der gewöhnlichen Punkte unterliegen im Falle nichtklassischer Verteilung außer Satz 4 jedenfalls noch folgenden Bedingungen:*

a) $0 < \varphi_j < 2g; \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 2.$

b) *Die von den φ_j verschiedenen natürlichen Zahlen bilden einen Halbmodul.*

---

[9]) l. c. [2]), Satz 6.

c) *Es gibt g ganze Zahlen ψ_j, die in ihrer Gesamtheit von der Menge der φ_j verschieden sind, aber ebenfalls den Bedingungen* a) *und* b) *genügen und für die die erste nichtverschwindende Differenz in der Reihe*

$$\psi_1 - \varphi_1, \ldots, \psi_g - \varphi_g$$

positiv ist (dabei seien die ψ_j und die φ_j ihrer Größe nach angeordnet.

Hinsichtlich des Beweises bemerke ich: Zu a). Die Ungleichung $\varphi_j < 2g$ wurde schon in § 1 angegeben. — $\varphi_1 > 1$ oder $\varphi_2 > 2$ würde bedeuten, daß K rational oder hyperelliptisch ist.

Zu b). Folgt daraus, daß die von den Fehlzahlen φ_j verschiedenen natürlichen Zahlen die Polzahlen eines Punktes sind und daher selbstverständlich einen Halbmodul bilden.

Zu c). Folgt aus der Existenz mindestens eines Weierstraßpunktes (beachte $g > 2$!). Die g Fehlzahlen ψ_j eines Weierstraßpunktes genügen nämlich ebenfalls den Bedingungen a) und b), sind in ihrer Gesamtheit von der Menge der φ_j verschieden und erfüllen die angegebene Bedingung für die Differenzen $\psi_j - \varphi_j$.

Leider sind aber die Bedingungen der Sätze 4 und 5 noch nicht hinreichend in dem Sinne, daß eine Zahlenmenge, die diesen Bedingungen genügt, stets mit der Fehlzahlenmenge der gewöhnlichen Punkte aus einem geeigneten algebraischen Funktionenkörper übereinstimmte. Dafür wird § 6 ein Beispiel liefern. Berücksichtigt man andererseits, wie allgemeiner Natur die Fehlzahlenmenge der gewöhnlichen Punkte nach § 5 sein kann, so dürfte das Bemühen, die wirklich auftretenden Fehlzahlverteilungen der gewöhnlichen Punkte in einfacher Weise zahlentheoretisch zu kennzeichnen, ziemlich aussichtslos erscheinen.

Als Folgerung aus Satz 4 erwähne ich noch

Satz 6. *Besitzen die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte von K eine nichtklassische Verteilung, so gilt für die Charakteristik $\chi(K) = p > 0$ die Ungleichung*

$$p + 1 < 2g.$$

Beweis indirekt. Sei also $p + 1 \geqq 2g$, d. h. $g \leqq p$. Bedeutet ν die erste Polzahl für einen gewöhnlichen Punkt, so ist bei nichtklassischer Verteilung $\nu < g$, also gemäß der angenommenen Ungleichung $\nu < p$. Die sicher existierende, auf ν folgende Fehlzahl φ des betreffenden Punktes ist dann nach Satz 4 von der Form $p^r + 1$ mit $r \geqq 1$, und das ist nach der angenommenen Ungleichung $\geqq 2g$. Widerspruch, weil $\varphi < 2g$ sein muß!

Zum Schluß führe ich noch einen Hilfssatz an, der in § 6 die Bestimmung der wirklich auftretenden Fehlzahlverteilungen bei niedrigem Geschlecht erleichtern wird.

Hilfssatz 2. *Ist* $\mathfrak{g}$ *ein ganzer Divisor und* a^n *Multiplum von* $\mathfrak{g}^{-1}$, *so ist auch* a^m *für jedes* $0 \leqq m \leqq n$ *Multiplum von* $\mathfrak{g}^{-1}$.

Sei nämlich $a \sim \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}}$, wo $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}$ ganz und teilerfremd gewählt seien. Da a^n Multiplum von $\mathfrak{g}^{-1}$ sein soll, ist $a^n \sim \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}^{-1}}$ (mit ganzem $\mathfrak{g}_0$) oder $a^n \sim \frac{\mathfrak{g}_0'}{\mathfrak{g}'}$, wenn $\mathfrak{g}_0'$ und $\mathfrak{g}'$ die größten zueinander primen Bestandteile von $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}$ bedeuten. Daraus folgt $\frac{\mathfrak{a}_0^n}{\mathfrak{a}^n} = \frac{\mathfrak{g}_0'}{\mathfrak{g}'}$ und hieraus wegen der Teilerfremdheit $\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}^n$. Für jedes $0 \leqq n$ ist also $\mathfrak{a}^m$ ein Teiler von $\mathfrak{g}$ und daher $a^m \sim \frac{\mathfrak{a}_0^m}{\mathfrak{a}^m}$ tatsächlich Multiplum von $\mathfrak{g}^{-1}$.

Teil II. Spezialfälle.

§ 4.

Hyperelliptische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper.

In diesem Paragraphen sollen die Fehlzahlen der Primdivisoren eines hyperelliptischen Funktionenkörpers K mit beliebigem Konstantenkörper k bestimmt werden, ohne dabei separable Erzeugbarkeit von K/k vorauszusetzen. Für hyperelliptische Funktionen mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper haben schon H. Hasse und H. L. Schmid diese Frage behandelt [10]). Ihre Schlußweise versagt jedoch bei beliebigem Konstantenkörper. Sie wird daher im folgenden durch ein allgemeingültiges Verfahren ersetzt, das aber selbstverständlich von Teil I der vorliegenden Arbeit unabhängig ist.

Ich nenne den algebraischen Funktionenkörper K hyperelliptisch, wenn er nicht rational ist und mindestens eine Funktion x zweiten Grades enthält. K besitzt dann also den Grad 2 über dem rationalen Unterkörper $\mathsf{P} = k(x)$. Das Geschlecht von K bezeichne ich mit g und die kanonische Klasse mit W. Für einen beliebigen Primdivisor $\mathfrak{P}$ vom Grade f aus K ist die natürliche Zahl φ offenbar dann und nur dann Fehlzahl, wenn $\operatorname{Dim} \mathfrak{P}^{\varphi} - \operatorname{Dim} \mathfrak{P}^{\varphi-1} = 0$ ist, oder, was nach dem Riemann-Rochschen Satz das gleiche besagt, wenn

$$\operatorname{Dim} \frac{W}{\mathfrak{P}^{\varphi-1}} - \operatorname{Dim} \frac{W}{\mathfrak{P}^{\varphi}} = f \tag{3}$$

ist. Ich werde also bei einem hyperelliptischen K zunächst W und dann $\operatorname{Dim} \frac{W}{\mathfrak{C}}$ für einen beliebigen ganzen Divisor $\mathfrak{C}$ untersuchen.

---

[10]) H. Hasse und H. L. Schmid, Über die Ausnahmeklassen bei abstrakten hyperelliptischen Funktionenkörpern, Journ. f. reine u. angew. Math. **176**, S. 184.

A. *Ist $\mathfrak{N}$ der Nennerdivisor einer Funktion x zweiten Grades aus dem hyperelliptischen Körper K, so liegt $\mathfrak{N}^{g-1}$ in W. Für den Modul $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}}$ aller Multipla von $\mathfrak{N}^{-(g-1)}$ gilt*

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}} = 1 \cdot k + x \cdot k + \ldots + x^{g-1} \cdot k. \tag{4}$$

Offenbar ist nämlich

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}} \supseteq 1 \cdot k + x \cdot k + \ldots + x^{g-1} k. \tag{5}$$

mithin

$$\text{Dim } \mathfrak{N}^{g-1} \geqq g. \tag{6}$$

Sobald in (6) das Gleichheitszeichen bewiesen ist, gilt auch in (5) das Gleichheitszeichen.

Nun hat aber $\mathfrak{N}$ als Nenner von x den Grad 2, also $\mathfrak{N}^{g-1}$ den Grad $2g-2$. Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist ferner die Dimension eines Divisors von Grad $2g-2$ notwendig $\leqq g$. Zusammen mit (6) ergibt das die Gleichung

$$\text{Dim } \mathfrak{N}^{g-1} = g, \tag{7}$$

also (4).

Da die kanonische Klasse die einzige vom Grade $2g-2$ und der Dimension g ist, liegt $\mathfrak{N}^{g-1}$ nach (7) tatsächlich in W.

B. *Für einen beliebigen ganzen Divisor $\mathfrak{C}$ von K des hyperelliptischen Körpers ist* $\text{Dim } \frac{W}{\mathfrak{C}} = g - \mu$, *wo* $\mu = \text{Min } [\text{Grad}_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}), g]$ *ist.*

Dabei verstehe ich unter $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}$ den durch $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{P} = k(x)$ bestimmten Divisor von $\mathfrak{P}$, unter $\text{Grad}_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P})$ den Grad dieses Divisors innerhalb $\mathfrak{P}$.

Zum Beweis setze ich zunächst den Nennerdivisor $\mathfrak{N}$ von x prim zum $\mathfrak{C}$ voraus, was sich bei unendlichem k durch passende Wahl der erzeugenden Funktion x von $\mathfrak{P}/k$ stets erreichen läßt.

Die Dimension von $\frac{W}{\mathfrak{C}}$ ist gleich dem Range des Moduls $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}\mathfrak{N}^{-(g-1)}}$ aller Multipla von $\mathfrak{C}\mathfrak{N}^{-(g-1)}$. Dieser Modul stimmt wegen der Teilerfremdheit von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{C}$ mit allen Funktionen y aus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}}$ überein, für die $y \equiv 0 \bmod \mathfrak{C}$ gilt. Nun liegt aber $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}}$ nach Satz 1 ganz in $k[x]$, so daß für jedes y aus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}}$ die Kongruenz $y \equiv 0 \bmod \mathfrak{C}$ gleichbedeutend ist mit der Kongruenz $y \equiv 0 \bmod \mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}$ oder auch mit der Kongruenz $y \equiv 0 \bmod \gamma$, wenn γ ein Polynom aus $k[x]$ mit dem Zählerdivisor $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}$ bedeutet. Beachtet man noch, daß $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}}$ gerade aus den Polynomen aus $k[x]$ höchstens $(g-1)$-ten Grades besteht, so hat man

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}} = 0, \quad \text{falls Grad } \gamma = \text{Grad}_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}) \geqq g,$$

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^{-(g-1)}} = \gamma \cdot k + \gamma x \cdot k + \ldots + \gamma x^{g-1-\text{Grad } \gamma} \cdot k,$$

$$\text{falls} \quad \text{Grad } \gamma = \text{Grad}_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}) < g.$$

Das beweist aber gerade die Behauptung.

Die Voraussetzung, daß der Nennerdivisor $\mathfrak{N}$ von x zu $\mathfrak{C}$ prim sei, läßt sich nur bei endlichem Konstantenkörper k unter Umständen nicht verwirklichen. Dann ist k aber jedenfalls vollkommen und eine Konstantenerweiterung von K zu $\bar{K}$ läßt daher den Grad von $K/k\,(x)$, das Geschlecht und die Dimension eines beliebigen Divisors von K ungeändert.

Schließt man insbesondere den Konstantenkörper k algebraisch ab, so kommt man auf den schon behandelten Fall eines unendlichen Konstantenkörpers zurück und erhält wieder

$$\mathrm{Dim}\,\mathfrak{C}^{-1}\,\mathfrak{N}^{g-1} = g - \mu,$$

womit alles bestätigt ist.

Die Primdivisoren $\mathfrak{P}$ des hyperelliptischen Körpers K zerfallen bekanntlich entsprechend ihrem Verhalten gegenüber $\mathsf{P} = k\,(x)$ in drei Arten: die *regulären* Primdivisoren $\mathfrak{P}$, die über P vom Relativgrad 1 sind und den zugehörigen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von P genau in der ersten Potenz teilen, so daß $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ist; die *Trägheitsprimdivisoren* $\mathfrak{P}$, die über P vom Relativgrad 2 sind, so daß für den zugehörigen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von P die Gleichung $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$ gilt; die *Verzweigungsprimdivisoren* $\mathfrak{P}$, die vom Relativgrad 1 sind, aber den zugehörigen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von P in der zweiten Potenz teilen, so daß $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2$ ist. Der Grad von $\mathfrak{P}$ werde allgemein mit f bezeichnet.

Satz 7. *Die Fehlzahlen eines regulären Primdivisors sind gleich den ersten* $\left[\frac{g}{f}\right]$ *positiven ganzen Zahlen.*

Ein Trägheitsprimdivisor hat keine Fehlzahlen.

Die Fehlzahlen eines Verzweigungsprimdivisors sind gleich den ersten $\left[\frac{g}{f}\right]$ *positiven ungeraden Zahlen.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (3) und B., wenn man noch beachtet, daß offenbar für einen

$$\begin{aligned}
&\text{regulären Primdivisor } \mathfrak{P}: && \mathrm{Grad}_{\mathsf{P}}\,(\mathfrak{P}^{\varphi} \cap \mathsf{P}) = \varphi f,\\
&\text{Trägheitsprimdivisor } \mathfrak{P}: && \mathrm{Grad}_{\mathsf{P}}\,(\mathfrak{P}^{\varphi} \cap \mathsf{P}) = \varphi \frac{f}{2},\\
&\text{Verzweigungsprimdivisor } \mathfrak{P}: && \mathrm{Grad}_{\mathsf{P}}\,(\mathfrak{P}^{\varphi} \cap \mathsf{P}) = \left[\frac{\varphi+1}{2}\right] f
\end{aligned}$$

ist.

Aus Satz 7 entnimmt man, daß bei nicht algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper und beliebig großem Geschlecht selbst im Falle der Charakteristik 0 kein Weierstraßpunkt zu existieren braucht und daß die gewöhnlichen Punkte keineswegs notwendig alle die gleichen Fehlzahlen besitzen. Man betrachte nämlich etwa einen hyperelliptischen Körper, der unendlich viele reguläre Primdivisoren jeden Grades f, aber keinen Verzweigungsprimdivisor von einem Grad $\leqq g$ besitzt. Diese Verhältnisse liegen z. B. bei

dem Körper vor, der über dem Körper der p-adischen Zahlen als Konstantenkörper durch die Gleichung

$$y^2 = x^{2g+1} + p$$

definiert ist. Andererseits kann bei nicht algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper unter Umständen ein regulärer Primdivisor Weierstraßpunkt sein, was z. B. eintritt, wenn der hyperelliptische Körper endlich viele reguläre Primdivisoren ersten Grades, also die definierende Gleichung im Konstantenkörper nur endlich viele Lösungen hat. Man erkennt daraus, daß bei beliebigem Konstantenkörper bereits im hyperelliptischen Fall keine allgemeinen Aussagen möglich sind.

Dagegen erhält man aus Satz 7 bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper unmittelbar den folgenden, schon von H. Hasse und H. L. Schmid angegebenen [11])

Satz 8. *Die Weierstraßpunkte eines hyperelliptischen Funktionenkörpers mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper stimmen mit den Verzweigungsprimdivisoren überein. Die gewöhnlichen Punkte eines solchen Körpers haben die Feldzahlen* $1, \ldots, g$.

Da über einem gegebenen algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k leicht hyperelliptische Körper gegebenen Geschlechts gebildet werden können, ist damit zugleich gezeigt, daß die klassische Fehlzahlverteilung $1, \ldots, g$ stets für die gewöhnlichen Punkte eines geeigneten Funktionenkörpers über k realisiert ist.

Satz 8 liefert ferner im Falle der Charakteristik $p = 2$ Beispiele dafür, daß bei beliebig hohem Geschlecht nur ein Weierstraßpunkt zu existieren braucht. Man bilde über dem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik 2 den hyperelliptischen Körper $K = k\ (x, y)$ mit der definierenden Gleichung $y^2 - y = x^m\ (m \geqq 3)$ [12]). Dagegen besitzt ein hyperelliptischer Körper vom Geschlecht g mit algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper der Charakteristik $p \neq 2$ genau $2g + 2$ Weierstraßpunkte, weil die Zahl seiner Verzweigungspunkte gleich $2g + 2$ ist.

§ 5.

Allgemeines Beispiel für nichtklassische Fehlzahlverteilung der gewöhnlichen Punkte bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper.

Von nun an setze ich den Konstantenkörper der betrachteten algebraischen Funktionenkörper wieder als algebraisch abgeschlossen voraus. In diesem

[11]) Dieser Satz steht in der genannten Arbeit zwar nicht ausdrücklich, kann aber unmittelbar aus den dortigen Ergebnissen entnommen werden.

[12]) Dieser Körper hat nur einen Verzweigungsprimdivisor. Vgl. H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, Journ. f. reine u. angew. Math. **172** (1935), S. 37.

Paragraphen soll gezeigt werden, wie allgemeiner Natur die Fehlzahlverteilung der gewöhnlichen Punkte eines algebraischen Funktionenkörpers mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper von der Charakteristik $p > 0$ sein kann. Zugleich erhält man Beispiele dafür, daß die Fehlzahlen jedes Primdivisors von $1, 2, \ldots, g$ verschieden sind.

Satz 9. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von der Charakteristik $p > 0$ und $K = k(x, y)$ mit der definierenden Gleichung*

$$F(x, y) = y^q + y - x^m = 0, \tag{8}$$

wo $q > 1$ eine Potenz von p und $m > 1$ ein Teiler von $q + 1$ ist, $q + 1 = mn$. Dann hat K das Geschlecht $g = \frac{(m-1)(q-1)}{2}$ und die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte von K sind von der Form

$$rq + s + 1,$$

wo r und s alle nichtnegativen ganzen Zahlen durchlaufen, für die

$$(r + 1)n + (s + 1) \leqq q \tag{9}$$

ist.

Bevor ich die angeführten Behauptungen bestätige, will ich zunächst die nichtnegativen ganzen Zahlen r, s bestimmen, die der Bedingung (9) genügen. Bei festem r ist (9) mit

$$s \leqq q - (r + 1)n - 1$$

gleichbedeutend, und die Zahl S_r der nichtnegativen ganzen Zahlen s, die diese letzte Umgleichung befriedigen, ist offenbar

$$S_r = \mathrm{Max}\,[q - (r + 1)n, 0].$$

Damit es zu festem r ein (9) genügendes $s \geqq 0$ gibt, muß also jedenfalls

$$q - (r + 1)n \geqq 0,$$

d. h.

$$r \leqq \frac{q-n}{n} = m - 1 - \frac{1}{n}$$

oder

$$r \leqq m - 2$$

sein. Die Anzahl aller (2) entsprechenden Paare nichtnegativer ganzer r, s ist folglich

$$\sum_{r=0}^{m-1} S_r = \sum_{r=0}^{m-2} q - (r + 1)n = \frac{(m-1)(q-1)}{2}.$$

Damit ist zugleich bestätigt, daß die Anzahl der behaupteten Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte von K wirklich gleich dem angegebenen Geschlecht von K ist, wie es natürlich sein muß. Für die Fehlzahlen und Polzahlen der gewöhnlichen Punkte von K ergibt sich jetzt offenbar folgende Übersicht:

Fehlzahlen	Polzahlen
$1, \ldots, \quad q-n$	$q-n+1, \ldots, \quad q$
$q+1, \ldots, \quad 2q-2n$	$2q-2n+1, \ldots, 2q$
$2q+1, \ldots, \quad 3q-3n$	$3q-3n+1, \ldots, 3q$
. . . . .	. . . . .
$(m-3)\,q+1, \ldots, \quad (m-3)\,q+2n-1$	$(m-3)\,q+n, \ldots, \quad (m-2)\,q$
$(m-2)\,q+1, \ldots, \quad (m-2)\,q+n-1$	$(m-2)\,q+n$ und alle folgenden ganzen Zahlen

Dabei ist sinngemäß im Falle $n = 1$ die letzte Zeile auf Seiten der Fehlzahlen zu streichen. Für $q > 2$, $m > 2$ treten also zwischen den Fehlzahlen stets Lücken auf, deren Längen ganzzahlige Vielfache von n sind. Selbstverständlich sind dann die Fehlzahlen jedes Primdivisors von $1, \ldots, g$ verschieden, da ja für die der Größe nach geordneten Fehlzahlen ψ_j bzw. φ_j eines Weierstraßpunktes bzw. gewöhnlichen Punktes die erste nicht verschwindende Differenz in der Kette $\psi_j - \varphi_j$ positiv ist[13]).

Nun zum Beweis der aufgestellten Behauptungen über K! Infolge der Teilerfremdheit von q und m gilt in K mit einem Primdivisor $\mathfrak{P}_\infty$ die Zerlegung

$$x \sim \frac{\cdots}{\mathfrak{P}_\infty^{\,q}}, \qquad y \sim \frac{\cdots}{\mathfrak{P}_\infty^{\,m}}.$$

$= \frac{x}{y^n}$ ist also Primelement für den Primdivisor $\mathfrak{P}_\infty$. Da $F_y'(x, y) = 1$, ist die Differente $\mathfrak{D}_{K|k(x)}$ gleich der in der Differente $\delta(z)$ von z bzgl. $k(x)$ aufgehenden Potenz von $\mathfrak{P}_\infty$. Um $\delta(z)$ zu berechnen, hat man nur im Anschluß an Hasse[14]) zu beachten, daß die Konjugierten von y bzgl. $k(x)$ gleich $y + \varepsilon_i$ sind, wo die ε_i die von 0 verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$\varepsilon^q + \varepsilon = 0$$

aus dem algebraisch abgeschlossenen Körper k bedeuten. Nach leichter Rechnung findet man dann $\delta(z) = \mathfrak{P}_\infty^{(m+1)(q-1)}$ und folglich auch $\mathfrak{D}_{K\,k(x)} = \mathfrak{P}_\infty^{(m+1)(q-1)}$. Hiermit ergibt sich weiter

$$g = \frac{(m+1)(q-1)}{2} - q + 1 = \frac{(m-1)(q-1)}{2}$$

und

$$d\,x \sim \frac{\mathfrak{P}_\infty^{(m+1)(q-1)}}{\mathfrak{P}_\infty^{2q}} = \mathfrak{P}_\infty^{m(q-n-1)}.$$

[13]) Das einfachste Beispiel einer nichtklassischen Fehlzahlverteilung der gewöhnlichen Punkte erhält man für $\rho = q = 3$, $m = 4$. Die definierende Gleichung lautet dann also $y^3 + y - x^4 = 0$ und die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte sind: 1, 2, 4, was man auch unabhängig von Satz 8 unmittelbar bestätigen kann.

[14]) Siehe l. c. [12]), S. 42.

Die über k linear unabhängigen Funktionen

$$x^r y^s \text{ mit } r, s \geqq 0, \quad (r+1)n + (s+1) \leqq q \tag{10}$$

sind sämtlich Multipla von $(dx)^{-1}$, denn aus der Ungleichung folgt

$$rn + s \leqq q - n - 1,$$

d. h.

$$rq + sm \leqq r(q+1) + sm \leqq m(q-n-1).$$

Da die Anzahl dieser Funktionen mit dem Geschlecht $g = \frac{(m-1)(q-1)}{2}$ von K übereinstimmt, bilden sie eine Basis für den k-Modul aller Multipla von $(dx)^{-1}$. Die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte von K sind daher gleich den um 1 vermehrten Ordnungen der Wronskischen Determinante der Funktionen (10), wobei nach einer beliebigen separierenden Funktion aus K differenziert werden darf.

Bei der Bestimmung dieser Ordnungen stütze ich mich auf ihre modultheoretische Deutung[15]). Ich bilde K isomorph auf einen Unterkörper des Potenzreihenkörpers $T = K\{u\}$ so ab, daß jeder Funktion aus K eine Potenzreihe in u mit der betreffenden Funktion als Anfangsglied entspricht. Dabei ordne ich y die Reihe $Y = y + u$ zu, wodurch bereits der ganze Isomorphismus eindeutig festgelegt ist. Die einer Funktion entsprechende Reihe kann dann als u-Taylorentwicklung bei der Differentiation nach y aufgefaßt werden. Mit Hilfe der definierenden Gleichung

$$y^q + y = x^{\frac{q+1}{n}}$$

lassen sich leicht die ersten Glieder der zu x gehörigen Potenzreihe X berechnen. Offenbar ist nämlich

$$x = (y + y^q)^{\frac{n}{1-q}},$$

und daraus folgt wegen

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - \frac{q^3}{1+q},$$

weiter

$$x = (y + y^q)^{n(1-q+q^2)}\, x^{-q^3}.$$

Das gibt für X die Gleichung

$$X = (Y + Y^q)^{n(1-q+q^2)}\, X^{-q^3}$$

oder, da X mit dem Glied x beginnt, die Kongruenz

$$X \equiv (y + y^q + u + u^q)^{n(1-q+q^2)}\, x^{-q^3} \bmod (u^{q+1}).$$

---

[15]) l. c. [2]), Satz 4.

Beachtet man, daß

$$(y + y^q + u + u^q)^n \equiv (y + y^q + u)^n + n\,(y + y^q + u)^{n-1}\,u^q$$
$$\equiv (y + y^q + u)^n + n\,(y + y^q)^{n-1}\,u^q \mod (u^{q+1})$$

ist, so gewinnt man schließlich

$$X \equiv (y + y^q + u)^n\,a + u^q\,b \mod (u^{q+1}) \tag{11}$$

mit $a, b \neq 0$ aus K.

Neben den Modul

$$\mathfrak{m} = \sum x^r\,y^s \cdot k \quad \text{mit} \quad r, s \geqq 0,\ (r+1)\,n + (s+1) \leqq q$$

stelle ich nun den zugehörigen Potenzreihenmodul

$$\mathfrak{M} = \sum X^r\,Y^s \cdot K$$

und bestimme seine Hermiteschen Invarianten, indem ich eine Hermitesche Basis aufsuche. Offenbar ist

$$u^s = (Y - y)^s \equiv 0 \mod \Big(\sum_{\sigma'=0}^{s} Y^{\sigma'} \cdot K\Big).$$

Aus der Kongruenz (11) fließt daher weiter die Kongruenz

$$X \equiv u^q\,b \mod \Big(u^{q+1},\ \sum_{\sigma \leqq n} Y^\sigma \cdot K\Big)$$

oder

$$u^q \equiv 0 \mod \Big(u^{q+1},\ \sum_{\varrho + \frac{\sigma}{n} \leqq 1} X^\varrho\,Y^\sigma \cdot K\Big).$$

Der Modul $\sum\limits_{\varrho + \frac{\sigma}{n} \leqq 1} X^\varrho\,Y^\sigma \cdot K$ enthält daher eine Potenzreihe von der Form

$$P = u^q + u^{q+1}\,P_1,$$
$$P \equiv 0 \mod \Big(\sum_{\varrho + \frac{\sigma}{n} \leqq 1} X^\varrho\,Y^\sigma \cdot K\Big).$$

Diese letzte Kongruenz potenziere ich mit r,

$$P^r \equiv 0 \mod \Big(\sum_{\varrho + \frac{\sigma}{n} \leqq r} X^\varrho\,Y^\sigma \cdot K\Big),$$

und multipliziere danach mit u^s, wobei $(r+1)\,n + (s+1) \leqq q$ sein möge,

$$P^r\,u^s \equiv 0 \mod \Big(\sum_{\substack{\varrho + \frac{\sigma}{n} \leqq r \\ \sigma' \leqq s}} X^\varrho\,Y^{\sigma+\sigma'} \cdot K\Big).$$

Dann ist auf der rechten Seite

$$\varrho n + \sigma \leqq r n$$

also

$$(\varrho + 1)\,n + (\sigma + \sigma' + 1) \leqq (r+1)\,n + s + 1 \leqq q$$

und folglich

$$P^r u^s \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$$

für alle r und s, die der Beziehung (9) genügen.

Die soeben gewonnenen $g = \frac{(m-1)(q-1)}{2}$ Potenzreihen $P^r u^s$ aus M bilden offenbar eine Hermitesche Basis[15a]). Gemäß der modultheoretischen Deutung der Ordnungen einer Wronskischen Determinante stimmen also die Ordnungen der Wronskischen Determinante von (10) mit den Anfangsexponenten der Potenzreihen $P^r u^s$ überein. Die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte von K lauten daher wirklich

$$rq + s + 1,$$

wo r, s alle nichtnegativen ganzen Zahlen mit

$$(r+1)n + (s+1) \leqq g$$

durchlaufen.

§ 6.

Bestimmung der Fehlzahlverteilungen der gewöhnlichen Punkte im Falle des Geschlechts 3 und 4 bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper

Um die Fehlzahlverteilungen der gewöhnlichen Punkte zu gewinnen, die bei einem algebraischen Funktionenkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper und vorgegebenem Geschlecht g wirklich auftreten, hat man zunächst die Systeme von je g natürlichen Zahlen hinzuzuschreiben, die den Forderungen der Sätze 4 und 5 genügen. Unter ihnen sind dann noch diejenigen zu streichen, die zwar Satz 4 und 5 entsprechen, aber in Wahrheit bei keinem algebraischen Funktionenkörper realisiert sind, was in jedem Falle besonders untersucht werden muß. Da die klassische Verteilung $1, \ldots, g$ nach § 4 bei jedem beliebigen Geschlecht $g \geqq 1$ und jeder beliebigen Charakteristik p wirklich vorkommt, kann man sich von vornherein auf die nichtklassischen Verteilungen beschränken. Sie sollen in diesem Paragraphen für das Geschlecht $g = 1, 2, 3$ und 4 bestimmt werden.

Ein Körper vom Geschlecht 1 oder 2 ist hyperelliptisch; die Fehlzahlen seiner gewöhnlichen Punkte besitzen daher stets die klassische Verteilung.

Sei jetzt $g = 3$. Dann genügen nur die Primzahlen $p = 2, 3$ der Bedingung $p + 1 < 2g$. Nach Satz 6 können daher die gewöhnlichen Punkte nur bei Charakteristik 2 oder 3 eine nichtklassische Fehlzahlverteilung besitzen. Den Bedingungen des Satzes 4 genügen ferner nur die folgenden nichtklassischen Verteilungen

$$p = 2: \quad \text{keine};$$
$$p = 3: \quad 1, 2, 4.$$

15a) Denn ihre Anfangsexponenten sind gleich $rq + s$, also alle von einander verschieden.

Diese letzte Fehlzahlverteilung ist über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper k von der Charakteristik 3 durch die gewöhnlichen Punkte des Körpers $K = k(x, y)$ mit der definierenden Gleichung $y^3 + y - x^4 = 0$ realisiert, wie man aus Satz 9 durch die Spezialisierung $p = q = 3$, $m = q + 1 = 4$ entnimmt.

Sei nunmehr $g = 4$. Dann genügen nur die Primzahlen $p = 2, 3, 5$ der Bedingung $p + 1 < 2g$. Nach Satz 6 können daher die gewöhnlichen Punkte nur bei Charakteristik 2, 3 oder 5 eine nichtklassische Fehlzahlverteilung besitzen. Den Bedingungen des Satzes 4 und 5 genügen ferner nur die folgenden Verteilungen:

$$p = 2: \quad 1, 2, 3, 5;$$
$$p = 3: \quad 1, 2, 4, 5;$$
$$p = 5: \quad 1, 2, 3, 6.$$

Von diesen nach Satz 4 und 5 möglichen Fehlzahlverteilungen für die gewöhnlichen Punkte tritt die zweite aber in Wirklichkeit nicht auf.

Satz 10. *In einem Körper vom Geschlecht* 4 *und der Charakteristik* 3 *besitzen die gewöhnlichen Punkte die Fehlzahlen* 1, 2, 3, 4.

Zum Beweis greife ich aus der Differentialklasse einen ganzen Divisor $\mathfrak{W}$ heraus und bilde mit vier über k linear unabhängigen Multipla $x_i = \frac{\mathfrak{W}_i}{\mathfrak{W}}$ von $\mathfrak{W}^{-1}$ die Hauptkurve[16])

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \mathfrak{W}_0 : \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3$$

von K. Offenbar genügt es nach Satz 2 zu zeigen, daß die Wronskische Determinante von x_0, x_1, x_2, x_3 die Ordnungen 0, 1, 2 besitzt[17]). Nach den Sätzen über die Wronskische Determinante ist nun aber die Anzahl der Ordnungen μ_i mit $\mu_i < 3$ gleich dem Rang r des Moduls

$$\mathfrak{m} = x_0 \cdot K^3 + x_1 \cdot K^3 + x_2 \cdot K^3 + x_3 \cdot K^3$$

über K^3[18]). Ich brauche also nur $r = 3$ nachzuweisen. Sollte eine nicht-

[16]) Zur Theorie der Hauptkurve vgl. l. c. [3]), S. 484.

[17]) Weil im Fall $g = 4$, $p = 3$ die Fehlzahlen der gewöhnlichen Punkte entweder gleich 1, 2, 3, 4 oder gleich 1, 2, 4, 5 sind, folgt daraus wirklich Satz 10.

[18]) K^3 bedeutet den Körper aller dritten Potenzen von Elementen aus K. Die Anzahl der Ordnungen von $\Delta(x_0, \ldots, x_3)$, die < 3 sind, ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen $x_0^{(\nu)}, \ldots, x_3^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, 3$) und diese Anzahl ist — weil die Funktionen aus K^3 Differentiationskonstante dritter Ordnung sind — gleich der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen $z_1^{(\nu)}, \ldots, z_r^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, 3$) irgendeiner Basis $z_0, \ldots, z_r$ des Moduls $\mathfrak{m} = x_0 K^3 + \ldots + x_3 K^3$, also jedenfalls $\leqq r$. Nun ist $K = 1 \cdot K^3 + x \cdot K^3 + x^2 \cdot K^3$, so daß $\mathfrak{m}$ eine Basis von der Form $z_i = x^{h_i} + a^3 x^{h_i + 1} + \ldots$ mit $h_0 < \ldots < h_r < 3$ besitzt, für die unter den Zeilen $z_0^{(\nu)}, \ldots z_r^{(\nu)}$ die r Zeilen $z_1^{(h_i)}, \ldots, z_r^{(h_i)}$ mit $i = 1, \ldots, r$ linear unabhängig sind.

konstante Funktion aus $\mathfrak{m}$ in K^3 liegen, so ergibt bereits Hilfssatz 2: $r = 3$. Bei den weiteren Betrachtungen darf ich daher von vornherein voraussetzen, daß keine nichtkonstante Funktion aus $\mathfrak{m}$ zu K^3 gehört.

Durch die Hauptkurve von K geht eine eindeutig bestimmte Fläche zweiter Ordnung,

$$F_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

des projektiven dreidimensionalen Raumes über k hindurch[19]), die wegen der linearen Unabhängigkeit der x_i über k sicher keine Ebene enthält. Da $p = 3$ (also $p \neq 2$) ist, läßt sie sich auf Grund der klassischen Transformationstheorie der quadratischen Formen linear und homogen mit Koeffizienten aus k in eine der beiden Gestalten

$$x_0 x_3 = x_1^2 \quad \text{oder} \quad x_0 x_3 = x_1 x_2$$

transformieren, was in homogener Schreibweise ($x_0 = 1$) die Gleichungen

$$\text{a)} \quad x_3 = x_1^2 \quad \text{oder} \quad \text{b)} \quad x_3 = x_1 x_2$$

ergibt.

Die Funktionen x_1 und x_2 sind über k von $x_0 = 1$ linear unabhängig, also sicher nicht konstant und liegen daher nicht in K^3. Im Falle a) sind somit die drei Funktionen $x_0 = 1$, x_1, $x_3 = x_1^2$ linear unabhängig über K^3. Hängt x_2 im Falle b) von $x_0 = 1$, x_1 über K^3 linear ab, $x_2 = a^3 + b^3 x_1$ mit $b \neq 0$, so ist $x_3 = x_1 x_2 = a^3 x_1 + b^3 x_1^2$ wegen $b \neq 0$ sicher nicht linear abhängig von $x_0 = 1$, x_1 über K^3. In jedem Falle befinden sich also unter den Funktionen x_i drei über K^3 linear unabhängige, womit Satz 10 bewiesen ist.

Ob es im Falle $p = 2$ einen Körper gibt, dessen gewöhnliche Punkte die Fehlzahlen 1, 2, 3, 5 besitzen, habe ich bisher nicht entscheiden können. Dagegen wird im Falle $p = 5$ die Fehlzahlverteilung 1, 2, 3, 6 nach Satz 9 durch die gewöhnlichen Punkte des Körpers $K = k(x, y)$ mit der definierenden Gleichung $y^5 + y - x^3 = 0$ verwirklicht.

Jena, Abbeanum, den 1. Oktober 1937.

---

[19]) l. c. [3]), S. 515.

(Eingegangen am 29. September 1938.)

Sulla trasformazione di Laplace e su alcuni sviluppi in serie di polinomi di Laguerre.

Di

G. Palamà a Lecce (Italia).

In questa 2ª Nota[1]) applichiamo la trasformazione di Laplace quasi esclusivamente per stabilire degli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre.

Per il nostro scopo ci sono utili delle formule relative alla detta trasformazione riportate nell'ottimo libro del Doetsch[2]) già citato ed utilizzato nella Nota precedente e ci serve anche, ed in modo particolare, la[3])

$$1) \qquad L[t^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(t)] = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\, s^{\alpha+1}} \left(\frac{s-1}{s}\right)^n$$

[1]) In Math. Zeitschr. 44 (1938), pp. 347—353 vi è una Nota in cui è trattato argomento avente affinità con quello di questa Nota.

[2]) Cfr. G. Doetsch, Theorie un Anwendung der Laplace-Trasformation, Springer, Berlin 1937, ove, come si è detto, si trovano, nella tabella delle pp. 401—403 le trasformazioni di Laplace di alcune funzione utilizzate in questa Nota.

[3]) Che è stata stabilita da F. Tricomi in Trasformazioni di Laplace e polinomi di Laguerre. I. Inversione della trasf., Rend. Acc. dei Lincei, seduta 17 febbraio 1935. La (1) è stata da me generalizzata nella seguente

$$I) \qquad L[x^{\alpha+m} L_n^{(\alpha)}(x)]$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^{m+j}\, \Gamma(\alpha+m+1)\, \Gamma(\alpha+n+1) \binom{m}{j} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-m+j}}{\Gamma(\alpha+m-j+1)\,(n-m+j)!\, s^{\alpha-j+2m+1}},$$

$$\alpha > -1,$$

del mio lavoro: Sui polinomi di Laguerre, Boll. dell'Un. Mat. It. fasc. del febb. 1938. A mezzo di questo mio risultato si può subito ottenere la trasformazione di Laplace di $x^{\beta+r} L_n^{(\alpha)}(a\,x)\, L_m^{(\beta)}(b\,x)$, con r intero. Basta difatti moltiplicare

$$(-1)^n L_n^{(\alpha)}(a\,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j\, \Gamma(\alpha+n+1)\, x^{n-j}\, a^{n-j}}{j!\,(n-j)!\, \Gamma(\alpha+n-j+1)}$$

per $x^{\beta+r} L_m^{(\beta)}(b\,x)$, applicare poi l'operatore L ad ambo i membri, utilizzando per il secondo di essi la (I). Come si vede la funzione $x^{\beta+r} L_n^{(\alpha)}(a\,x)\, L_m^{(\beta)}(b\,x)$ è alquanto meno generale da quella studiata dal Mayr nel suo lavoro: *Integraleigenschaften der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome.* Math. Zeitschr. 39 (1935) ma la trasformata di Laplace, che nel modo anzidetto si trova di quella funzione, ha, in alcuni casi, una scrittura più concisa di quella che si ottiene con la formula trovata dal Mayr. Cfr. inoltre Erdélyi, *Über einige bestimmte Integrale* . . ., Math. Zeitschr. 40 (1936). — Qualche risultato

ove L è il simbolo della trasformazione di Laplace e $L_n^{(a)}(x)$ è il polinomio di Laguerre generalizzato.

1. Innanzi tutto però dimostriamo la

$$\int_0^t (t\,x - x^2)^m e^{2\,i\,x}\,d\,x = \frac{e^{i\,t}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{2^{m+\frac{1}{2}}}\,t^{m+\frac{1}{2}}\,J_{m+\frac{1}{2}}(t),$$

ove $J_{m+\frac{1}{2}}(t)$ è la funzione di Bessel di 1ª specie ed $m \geqq 0$, che nonostante si stabilisca semplicemente ed immediatamente, applicando il teor. di composizione, pure sembra non sia mai stata notata. Ricordiamo perciò che

$$L(x^m e^{i\,x}) = \frac{\Gamma(m+1)}{(s-i)^{m+1}}, \qquad m \geqq 0$$

e quindi

$$L(x^m e^{i\,x})\,L(x^m e^{-i\,x}) = \frac{\Gamma^2(m+1)}{(s^2+1)^{m+1}}, \tag{2}$$

ma è anche[4])

$$L[x^{m+\frac{1}{2}}\,J_{m+\frac{1}{2}}(x)] = \frac{2^{m+\frac{1}{2}}\,\Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(s^2+1)^{m+1}}, \tag{3}$$

---

analogo a quelli di questa Nota si trovano nei miei seguenti lavori: *La trasformazione di Laplace e i polinomi di Laguerre e di Hermite*, Rend. del R. Istituto Lombardo di Sc. e let. Vol. LXX, 1937. — *Sulla trasformazione di Laplace di alcune notevoli funzioni e su alcuni noti sviluppi in serie*, Math. Zeitschr. **44** (1938), pp. 347—353 già citato.

[4]) Questa è caso particolare, corrispondente al valore -1 di ϱ, della

$$L[x^{\nu-1}\,J_{\nu+\varrho}(x)] = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\,i^{\varrho+2\nu}}\,Q^{\nu,\varrho}(-i\,s), \tag{II}$$

stabilita da Hankel, come afferma il Nielsen nelle sue *Fonctions Métasphériques*, p. 206 (1911). Nella (II) $Q^{\nu,\varrho}(-is)$ è la funzione metasferica di 2ª specie, così detta da precedente Autore nel suo libro citato, ove nella suddetta pag. 206 vi è formula, la (10), che coincide con la (II). Ma si noti che la (II) può immediatamente stabilirsi applicando l'operatore L alla

$$x^{\nu-1}\,J_{\nu+\varrho}(i\,x) = i^{\varrho+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+\varrho+2n-1}}{n!\,\Gamma(\nu+\varrho+n+1)\,2^{\nu+\varrho+2n}}$$

e tenendo presente lo sviluppo di $Q^{\nu,\varrho}(-is)$. — Dalla stessa (II), o meglio dalla sua equivalente

$$L[x^{\nu-1}\,J_{\nu+\varrho}(i\,x)] = \frac{i^{\nu+\varrho}}{\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}}\,Q^{\nu,\varrho}(s),$$

facendo $\nu = \frac{1}{2}$, $\varrho = 0$, si trae

$$L\left(\frac{e^{-a\,x}\,\mathrm{sen}\,a\,i\,x}{x}\right) = \frac{i}{2}\log\frac{s+2a}{s},$$

da noi utilizzata al No. 5.

uindi, essendo verificate le condizioni di assoluta convergenza richieste per
validità del teor. di composizione („Faltungssatz"), e poichè, dal confronto
i (2) e (3), si trae

$$L(x^m e^{ix}) \cdot L(x^m e^{-ix}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{2^{m+\frac{1}{2}}} L[x^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(x)],$$

$$\int_0^t x^m e^{ix}(t-x)^m e^{-i(t-x)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{2^{m+\frac{1}{2}}} t^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(t),$$

ioè la formula cercata:

$$\int_0^t (tx - x^2)^m e^{2ix}\,dx = \frac{e^{it}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{2^{m+\frac{1}{2}}} t^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(t),$$

he permette di stabilire rapidamente le seguenti altre formule:

4) $$\int_0^t (tx - x^2)^m \cos 2x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)\cos t}{2^{m+\frac{1}{2}}} J_{m+\frac{1}{2}}(t),$$

5) $$\int_0^t (tx - x^2)^m \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)\operatorname{sen} t}{2^{m+\frac{1}{2}}} J_{m+\frac{1}{2}}(t),$$

6) $$\int_0^t (-tx + x^2)^m \operatorname{ch} 2x\,dx = \sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1) i^{m-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}} \operatorname{ch} t\, J_{m+\frac{1}{2}}(it),$$

7) $$\int_0^t (-tx + x^2)^m \operatorname{sh} 2x\,dx = \sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1) i^{m-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}} \operatorname{sh} t\, J_{m+\frac{1}{2}}(it).$$

2. Si sa che

8) $$\int_0^t x^{\nu_1-1}(t-x)^{\nu_2-1} J_{\nu_1-1}(x) J_{\nu_2-1}(t-x)\,dx = \frac{\Gamma(\nu_1-\frac{1}{2})\Gamma(\nu_2-\frac{1}{2})\, t^{\nu_1+\nu_2-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\nu_1+\nu_2-1)} J_{\nu_1+\nu_2-\frac{3}{2}}(t),$$

quindi se in quest'ultima si fa $\nu_1 = \frac{m}{2} + 1$, $\nu_2 = \frac{m}{2} + 1$ e si confronta poi
con la (4), si ricava

$$\int_0^t (tx - x^2)^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}}(x)\, J_{\frac{m}{2}}(t-x)\,dx = \frac{\int_0^t (tx - x^2)^m \cos 2x\,dx}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+1\right) 2^m \cos t}.$$

In modo analogo, a mezzo delle (5), (6), (7) e della (8) possono stabilirsi
altre identità del tipo della precedente.

3. Dalla

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt,$$

derivando rispetto ad α, si ha

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \log t\, dt,$$

se indichiamo con $\Psi(\alpha)$ la derivata logaritmica di $\Gamma(\alpha)$, cioè se poniamo

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \Psi(\alpha),$$

la precedente può scriversi

$$\Gamma(\alpha)\,\Psi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \log t\, dt,$$

da cui facendo il cambiamento di variabile $t = s\tau$, si ha

$$\Gamma(\alpha)\,\Psi(\alpha) = \Gamma(\alpha) \log s + s^\alpha L(\tau^{\alpha-1} \log \tau)$$

e quindi infine

$$L(t^\alpha \log t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} [\Psi(\alpha+1) - \log s], \tag{9}$$

con

$$-1 < \alpha < M, \quad Rs > 0. \tag{a}$$

La precedente, ripetendo il procedimento innanzi seguito, permette di ricavare altre formule analoghe, ma più generali. Così derivando rispetto ad α, per es. un'altra volta, abbiamo a calcoli eseguiti

$$L(t^\alpha \log^2 t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} [(\Psi(\alpha+1) - \log s)^2 + \Psi'(\alpha+1)]$$

e da questa per $\alpha = 0$, essendo $\Psi(1) = -c$, c = costante di Eulero, otteniamo

$$L(\log^2 t) = \frac{1}{s} [(c + \log s)^2 - \Psi'(1)].$$

4. Diamo in questo N° e nei successivi degli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre, utilizzando, come si è detto nella introduzione, la (1) e le trasformate di Laplace di alcune funzioni; però ci asteniamo, in questa Nota, dal leggittimare questi sviluppi.

Con la (9) si può ricavare uno sviluppo di $\log t$ in serie di polinomi di Laguerre che generalizza altro da me dato[5]).

---

[5]) Cfr. il mio lavoro già citato: La trasformazione di Laplace e i polinomi di Laguerre, già citato, p. 376. Si prega di cambiare nella formula (26) di p. 375 di questo lavoro $n!$ in $(n-1)!$ e di sopprimere il fattore $n+1$ del denominatore. In conseguenza va cambiato $n+1$ in n nel denominatore dello sviluppo di $\log \frac{1}{x} - c$.

Infalti si noti che, essendo

$$\log s = -\log\left(1 - \frac{s-1}{s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n+1}}{n+1},$$

si ha per la (1)

$$\Gamma(\alpha+1)\cdot\frac{\log s}{s^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,L[t^{\alpha}L_{n+1}^{(\alpha)}(t)]}{\Gamma(\alpha+n+2)};$$

ma è inoltre

$$L[\Psi(\alpha+1)\,t^{\alpha}] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\cdot\Psi(\alpha+1),$$

quindi la (9), può scriversi

$$L(t^{\alpha}\log t) = L[\Psi(\alpha+1)\,t^{\alpha}] - \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,L[t^{\alpha}L_{n+1}^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha+n+2)}$$

che dà lo sviluppo cercato

$$\log t = \Psi(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,L_{n+1}^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha+n+2)}.$$

Da questa, per $\alpha = 0$, si trae la seguente formula già da noi precedentemente stabilita[5]).

$$\log t = -c - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(t)}{n+1}, \quad \text{perchè è } \Psi(1) = -c.$$

Dallo penultima per $t = 1$, si trae

$$\Psi(\alpha+1) = \Gamma(\alpha+1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,L_{n+1}^{(\alpha)}(1)}{\Gamma(\alpha+n+2)}$$

e se è inoltre $\alpha = 0$

$$-c = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(1)}{n+1};$$

e infine $t = \alpha = m$, m intero, poichè

$$\Psi(m+1) = -c + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} = -c + s_m,$$

ponendo $s_m = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}$,

$$\log m = -c + s_m - m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,L_{n+1}^{(m)}(m)}{(m+n+1)!},$$

ossia se si fa $s_m - \log m = c_m$

$$c_m - c = m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,L_{n+1}^{(m)}(m)}{(m+n+1)!}$$

ove si noti, per le (a), m può assumere valori limitati.

5. Analogamente dalla identità

$$\frac{1}{s}\log\frac{2s-1}{s} = \frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s-1}{s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n+1}}{s\cdot(n+1)},$$

si ha, per la (1),

$$\log\frac{2s-1}{s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n s\,L[L_{n+1}(x)]}{n+1}. \tag{10}$$

Ma

$$s\,L[L_n(x)] = L\left[\frac{d\,L_n(x)}{dx}\right] + 1 = -L[L_{n-1}^{(1)}(x)] + 1,$$

quindi la (10), può scriversi

$$\log\frac{2s-1}{s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}L[L_n^{(1)}(x)]}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}L[L_n^{(1)}(x)]}{n+1} = \log\frac{2s-1}{2s}. \tag{11}$$

Si tenga ora presente la nota formula[6]):

$$L\left[\frac{e^{-ax}}{x}\operatorname{sen}(a\,i\,x)\right] = \frac{i}{2}\log\frac{s+2a}{s},$$

da cui per $a = -\frac{1}{4}$

$$L\left[\frac{e^{\frac{1}{4}x}}{x}\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{4}\,i\,x\right)\right] = \frac{i}{2}\log\frac{2s-1}{2s}$$

Dal confronto della precedente e della (11) si ottiene lo sviluppo cercato

$$\frac{2\,e^{\frac{1}{4}x}}{i\,x}\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{4}\,i\,x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}L_n^{(1)}(x)}{n+1},$$

che può anche scriversi

$$\frac{2^{\frac{1}{4}x}}{x}\operatorname{sh}\frac{x}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n L_n^{(1)}(x)}{n+1}$$

6. Altri sviluppi, credo non privi d'interesse, possono stabilirsi subit utilizzando le

$$L(e^{bt}\operatorname{sh} p\,t) = \frac{p}{(s-b)^2-p^2}, \tag{12}$$

$$L(e^{bt}\operatorname{ch} p\,t) = \frac{s-b}{(s-b)^2-p^2}. \tag{13}$$

---

[6]) Cfr. l'ultima parte della nota [4]).

Difatti, poichè

$$\frac{\sqrt{2}}{s^2}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{s-1}{s}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{2}}{(s-2)^2-2}, \tag{14}$$

sviluppando il 1° membro secondo le potenze crescenti di $\frac{s-1}{s}$, si ricava

$$\frac{\sqrt{2}}{s^2}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{s-1}{s}\right)^2-1}=-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{s^2}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{2n}$$

che, a mezzo della (1), dà

$$\frac{\sqrt{2}}{s^2}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{s-1}{s}\right)^2-1}=-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}L\left[t\,L_{2n}^{(1)}(t)\right], \tag{15}$$

ma d'altra parte dalla (12), si trae

$$L\left[e^{2t}\,\mathrm{sh}\,(t\sqrt{2})\right]=\frac{\sqrt{2}}{(s-2)^2-2}, \tag{16}$$

quindi dalla (14), per la (15) e la (16), segue la seguente formula cui si voleva pervenire:

$$e^{2t}\,\mathrm{sh}\,(t\sqrt{2})=-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n t}{2n+1}\,L_{2n}^{(1)}(t). \tag{17}$$

In modo perfettamente analogo, dalla identità

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{s-1}{s}\right)^2-1}=\frac{s}{(s-2)^2-2}, \tag{18}$$

sviluppando il suo primo membro secondo le potenze crescenti di $\frac{s-1}{s}$ e tenendo poi presente la (1), si trae

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{s-1}{s}\right)^2-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n L\left[L_{2n}(t)\right]; \tag{19}$$

ma

$$\frac{s}{(s-2)^2-2}=\frac{s-2}{(s-2)^2-2}+\frac{2}{(s-2)^2-2}$$

che per le (12) e (13), può scriversi

$$\frac{s}{(s-2)^2-2}=L\left[e^{2t}\,\mathrm{ch}\,(t\sqrt{2})\right]+L\left[\sqrt{2}\,e^{2t}\,\mathrm{sh}\,(t\sqrt{2})\right],$$

quindi dalla (18), per la (19), la precedente e la (17), si ottiene

$$e^{2t}\,\mathrm{ch}\,(t\sqrt{2})=\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left[\frac{2}{2n+1}\,t\,L_{2n}^{(1)}(t)-L_{2n}(t)\right]. \tag{20}$$

Lo sviluppo di $e^{2t}\,\mathrm{ch}\,(t\sqrt{2})$, in serie di polinomi di Laguerre, si può ottenere anche a mezzo die questa altra identità:

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{2\cdot\frac{s-1}{s}-1}{2\left(\frac{s-1}{s}\right)^2-1}=\frac{s-2}{(s-2)^2-2},$$

diffatti il 1° membro di essa, sviluppato secondo le potenze di $\frac{s-1}{s}$, dà

$$\frac{1}{s}\left(2\frac{s-1}{s}-1\right)\cdot\frac{1}{2\left(\frac{s-1}{s}\right)^2-1}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{2n+1}$$

e quindi si ha infine

$$e^{2t}\,\mathrm{ch}\,(t\sqrt{2})=\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left[L_{2n}(t)-2L_{2n+1}(t)\right] \tag{21}$$

ma è facile verificare, a mezzo di note formule relative ai polinomi di Laguerre, l'identità delle due espressioni fra parentesi quadra dei secondi membri delle (20) e (21).

7. In questo N° otteniamo alcuni sviluppi in serie traendo profitto della

$$\frac{k^\nu}{2^\nu s^{\nu+1}}e^{\frac{k^2}{4}\cdot\frac{s-1}{s}}=e^{\frac{k^2}{4}}L\left[t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(k\sqrt{t})\right] \tag{22}$$

che cambiando k in ik, dà

$$\frac{k^\nu}{2^\nu s^{\nu+1}}e^{-\frac{k^2}{4}\cdot\frac{s-1}{s}}=\frac{e^{-\frac{k^2}{4}}}{i^\nu}L\left[t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(ki\sqrt{t})\right]. \tag{23}$$

Sommando infatti membro a membro la (22) con la (23), risulta

$$L\left[t^{\frac{\nu}{2}}\left(e^{\frac{k^2}{4}}J_\nu(k\sqrt{t})+\frac{e^{-\frac{k^2}{4}}}{i^\nu}J_\nu(ki\sqrt{t})\right)\right]=\frac{k^\nu}{2^{\nu-1}s^{\nu+1}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{k^2}{4}\frac{s-1}{s}\right); \tag{24}$$

ma

$$\frac{1}{s^{\nu+1}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{k^2}{4}\cdot\frac{s-1}{s}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^{4n}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{2n}}{2^{4n}s^{\nu+1}(2n)!},$$

ossia per la (1)

$$\frac{1}{s^{\nu+1}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{k^2}{4}\frac{s-1}{s}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^{4n}L\left[t^\nu L_{2n}^{(\nu)}(t)\right]}{2^{4n}\Gamma(\nu+2n+1)},$$

quindi dal confronto di quest'ultima con la (24), si ottiene

$$\frac{2^{\nu-1}}{k^\nu}t^{\frac{\nu}{2}}\left[e^{\frac{k^2}{4}}J_\nu(k\sqrt{t})+\frac{e^{-\frac{k^2}{4}}}{i^\nu}J_\nu(ki\sqrt{t})\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^{4n}t^\nu L_{2n}^{(\nu)}(t)}{2^{4n}\Gamma(\nu+2n+1)}.$$

La precedente per $k=2$, diventa

$$\frac{t^{-\frac{\nu}{2}}}{2}\left[eJ_\nu(2\sqrt{t})+\frac{1}{ei^\nu}J_\nu(2i\sqrt{t})\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{2n}^{(\nu)}(t)}{\Gamma(\nu+2n+1)}$$

che inoltre per $\nu = \frac{1}{2}$, essendo

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x,$$

dà

$$\frac{e \operatorname{sen} 2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} - \frac{i}{2} \frac{\operatorname{sen} 2i\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} L_{2n}^{(\frac{1}{2})}(t)}{(4n+1)!!},$$

od anche

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} \left(e \operatorname{sen} 2\sqrt{t} + \frac{1}{e} \operatorname{sh} 2\sqrt{t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} L_{2n}^{(\frac{1}{2})}(t)}{(4n+1)!!}, \tag{25}$$

ove

$$(4n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n+1).$$

Poichè, per una delle due formule di Szegö, è

$$L_{2n}^{(\frac{1}{2})}(t) = \frac{H_{4n+1}(\sqrt{2t})}{\sqrt{2t}\, 2^{2n} (2n)!},$$

dalla (25), si ricava anche il seguente sviluppo

$$e \operatorname{sen} t\sqrt{2} + \frac{1}{e} \operatorname{sh} t\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{4n+1}(t)}{(4n+1)!!(2n)!},$$

di $e \operatorname{sen} t\sqrt{2} + \frac{1}{e} \operatorname{sh} t\sqrt{2}$, mediante polinomi di Hermite.

Se invece di sommare la (22) e la (23) le sottraiamo, otteniamo

$$L\left[\frac{2^{\nu-1}}{k^{\nu}} t^{\frac{\nu}{2}} \left(e^{\frac{k^2}{4}} J_{\nu}(k\sqrt{t}) - \frac{e^{-\frac{k^2}{4}}}{i^{\nu}} J_{\nu}(ki\sqrt{t}) \right) \right] = \frac{1}{s^{\nu+1}} \operatorname{sh}\left(\frac{k^2}{4} \cdot \frac{s-1}{s} \right),$$

da cui, se si sviluppa il 2° membro secondo le potenze di $\frac{s-1}{s}$ e si tien presente la (1), si trae

$$\frac{2^{\nu-1}}{k^{\nu}} t^{-\frac{\nu}{2}} \left[e^{\frac{k^2}{4}} J_{\nu}(k\sqrt{t}) - \frac{e^{-\frac{k^2}{4}}}{i^{\nu}} J_{\nu}(ki\sqrt{t}) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{4n+2} L_{2n+1}^{(\nu)}(t)}{2^{4n+2} \Gamma(\nu+2n+2)}$$

e da questa, se $k = 2$, si ha

$$\frac{1}{2} t^{-\frac{\nu}{2}} \left[e J_{\nu}(2\sqrt{t}) - \frac{1}{e\, i^{\nu}} J_{\nu}(2i\sqrt{t}) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n+1}^{(\nu)}(t)}{\Gamma(\nu+2n+2)}$$

che facendo inoltre $\nu = \frac{1}{2}$, dà

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} \left(e \operatorname{sen} 2\sqrt{t} + \frac{i}{e} \operatorname{sen} 2i\sqrt{t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} L_{2n+1}^{(\frac{1}{2})}(t)}{(4n+3)!!}$$

od anche

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} \left(e \operatorname{sen} 2\sqrt{t} - \frac{1}{e} \operatorname{sh} 2\sqrt{t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} L_{2n+1}^{(\frac{1}{2})}(t)}{(4n+3)!!},$$

da quest'ultima per la su riferita formula di Szegö si ottiene quest'altro sviluppo in serie di polinomi di Hermite

$$\frac{1}{e}\operatorname{sh} t\sqrt{2} - e\operatorname{sen} t\sqrt{2} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{4n+3}(t)}{(2n+1)!\,(4n+3)!!}.$$

8. Infine notiamo che dalla nota formula

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{k}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{t^{\frac{\nu}{2}}L_n^{(\nu)}(t)}{\Gamma(\nu+n+1)} = e^{\frac{k^2}{4}}J_\nu(k\sqrt{t})$$

possono determinarsi in modo offatto semplice due notevoli sviluppi, infatti, se vi si fa successivamente $\nu = -\frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$, si ha rispettivamente

$$e^{\frac{k^2}{4}}\cos k\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2}\right)^n\frac{L_n^{(-\frac{1}{2})}(x)}{(2n-1)!!},$$

$$\frac{e^{\frac{k^2}{4}}}{k\sqrt{x}}\operatorname{sen} k\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2}\right)^n\frac{L_n^{(\frac{1}{2})}(x)}{(2n+1)!!},$$

quest'ultima, a mezzo delle formule di Szegö, danno i due seguenti sviluppi stabiliti da F. Tricomi[7]) per altra via, senza conoscere che erano stati però precedentemente stabiliti, come è doveroso far presente, dal Dusl nel suo lavoro: *Quelques remarques sur les polynomes d'Hermite*, inserito negli atti del Congresso Intermazionale dei Matem. di Bologna (1928), t. III, p. 315

$$(26)\qquad e^{\frac{k^2}{2}}\cos kx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n k^{2n}H_{2n}(x)}{(2n)!},$$

$$e^{\frac{k^2}{2}}\operatorname{sen} kx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n k^{2n+1}H_{2n+1}(x)}{(2n+1!)}.$$

---

[7]) Cfr. F. Tricomi, *Sulle trasformazioni funzionali commutabili con la derivazione*, Commentarii Math. Helvetici Vol. 8⁰, fasc. 1⁰, p. 82 (1936). Le (26) sono state da me utilizzate per determinare un gran numero di formule relative ai polinomi di Hermite, nel lavoro: *Due formule di Tricomi e i polinomi di Hermite*, Rend. del R. Istituto Lombardo di Sc. e let. Vol. LXXI, fasc 1⁰ (1938); in cui però non sièfatto cenno che le dette formule erano state precedentemente trovate dal Dusl.

(Eingegangen am 15. 9. 1938.)

Theorie der Gewebe*).

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 107
§ 1. Teilweise geordnete Mengen 108
§ 2. Gewebe 111
§ 3. Linear geordnete Mengen 113
§ 4. Längenendliche Gewebe 116
§ 5. Beispiele 118
§ 6. Ausgeglichene Gewebe 121
Literaturverzeichnis 125

Einleitung.

Von einer *verbandtheoretischen* Forschungsrichtung in der Mathematik kann man, wenn von einigen früheren, nicht zur Entfaltung gekommenen Ansätzen abgesehen wird, seit etwa zehn Jahren reden[1]). Die seitdem von G. Birkhoff, O. Ore, M. Ward, Th. Skolem, V. Glivenko u. a. erzielten Ergebnisse[2]) zwingen den Unvoreingenommenen anzuerkennen, daß es sich bei der Idee des Verbandes um einen der grundlegendsten Begriffe der Mathematik und Logik handelt, um einen Begriff, der dem der Menge, Gruppe oder Funktion durchaus ebenbürtig ist[3]).

Es ist nun an der Zeit, eine Tieferlegung der axiomatischen Fundamente der Theorie der Verbände vorzunehmen. Der Begriff des Verbandes kann in mannigfacher Weise verallgemeinert werden, so z. B. zum Begriff des *Halbverbandes*, wie ich kürzlich gezeigt habe[4]). In der vorliegenden Arbeit wird der Verallgemeinerungsprozeß fortgesetzt: Indem wir weitere axiomatische Fesseln abstreifen, gelangen wir nacheinander zum Begriff des *Gewebes* und zu dem der *teilweise geordneten Menge*.

*) Herrn Geheimrat Professor Dr. Robert Haußner zu seinem goldenen Doktorjubiläum am 29. Oktober 1938.

[1]) Seit dem Erscheinen von [D. S.]. (Siehe Literaturverzeichnis.)

[2]) In das Literaturverzeichnis sind nur die seit 1936 erschienenen Arbeiten der genannten Forscher aufgenommen.

[3]) Einen Überblick über den Stand der Theorie der Verbände geben die Berichte von G. Köthe [1] und O. Ore [7]. — Eine Einführung in die Theorie der Verbände enthalten [Verb. 2] und [Verb. 8].

[4]) Vgl. [H. 1].

Im folgenden gehen wir aber nicht den eben geschilderten, durch den Abbau der Axiome gekennzeichneten Weg; wir schlagen vielmehr den in umgekehrter Richtung verlaufenden Weg des axiomatischen Auf- und Ausbaues ein. Dieser Weg beginnt beim Allgemeinen und endet beim Besonderen. Demgemäß stellen wir die im Sinne Hausdorffs teilweise geordneten Mengen, die von der Mengenlehre her wohlbekannt sind, an den Anfang der Untersuchung. Durch Hinzunahme eines Zusammenhangsaxioms — eine knappe Formulierung desselben wird durch Verwendung des Begriffs der *Brücke* erreicht — wird die teilweise geordnete Menge zum Gewebe; wir kommen damit zum eigentlichen Gegenstand der Arbeit. In einer ersten Spezialisierung werden die *Tief-* und *Hochgewebe* erzeugt, die etwa den Birkhoffschen Verbänden erster und zweiter Art entsprechen[5]). Sodann gehen wir auf die *linear geordneten* Mengen als einen weiteren wichtigen Sonderfall ein. Anschließend bilden wir den Begriff des *längenendlichen* Gewebes, der ein Analogon zum Begriff des längenendlichen Verbandes ist[6]). Es folgen einige Beispiele, die verschiedenen mathematischen Disziplinen und einem außermathematischen Sachgebiet entnommen sind. Die Arbeit schließt mit einer Untersuchung der *kettenausgeglichenen* und *brückenausgeglichenen* Gewebe, die nach dem Vorbild der ausgeglichenen Verbände konstruiert sind[7]); einen Einblick in die Strukturverhältnisse dieser Gewebe, insbesondere der brückenausgeglichenen Gewebe, vermittelt eine von zwei Argumenten abhängende *Niveaufunktion*.

Noch eine Bemerkung, die den logischen Zusammenhang der Begriffe *Verband*, *Halbverband* und *Gewebe* von einer anderen Seite aus beleuchtet. Versteht man unter einer *Verknüpfung* in einem Operationsbereich M eine dreigliedrige Elementbeziehung von der Beschaffenheit, daß je zwei Elemente aus M eindeutig wieder ein Element aus M bestimmen, so können die Elemente des allgemeinen *Verbandes* auf *zwei* Arten, die des allgemeinen *Halbverbandes* auf *eine* Art und die des allgemeinen *Gewebes* auf *keine* Art miteinander verknüpft werden.

Die vorliegende Arbeit setzt keine besonderen Vorkenntnisse voraus.

§ 1.

Teilweise geordnete Mengen.

Grundgegebenheit sei eine von der Nullmenge verschiedene Menge M. Es sei R eine zweigliedrige *Beziehung* in M. Diese Beziehung sei durch die folgenden *Axiome* näher bestimmt:

---

[5]) Vgl. [Verb. 7], S. 64ff.
[6]) Vgl. [Verb. 8], S. 220.
[7]) Vgl. [Verb. 3], S. 413.

I. Sind a, b, c Elemente aus M und gilt

$$aRb, \quad bRc,$$

so gilt auch

$$aRc.$$

II. Ist a ein beliebiges Element aus M, so gilt

$$aRa.$$

III. Sind a, b Elemente aus M und gilt

$$aRb, \quad bRa,$$

so ist

$$a = b.$$

Erklärung 1. Eine Menge M mit einer den Axiomen I, II und III genügenden Elementbeziehung R heiße eine *in bezug auf R teilweise geordnete Menge*, kürzer eine *$\mathfrak{T}$-Menge* in bezug auf R. Unter der *Ordnung* einer $\mathfrak{T}$-Menge werde die Anzahl der verschiedenen Elemente derselben verstanden; je nachdem die Ordnung endlich oder unendlich ist, werde die $\mathfrak{T}$-Menge als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet.

Jede von der Nullmenge verschiedene Teilmenge einer in bezug auf eine Beziehung R teilweise geordneten Menge ist ebenfalls eine $\mathfrak{T}$-Menge in bezug auf R.

Um größeren Spielraum in der Ausdrucksweise zu haben, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

Erklärung 2. Gilt aRb, so heiße a ein *Vorelement* oder ein *Oberelement* von b und entsprechend b ein *Nachelement* oder ein *Unterelement* von a; ist überdies $a \neq b$, so werde a ein *eigentliches* Vorelement von b und entsprechend b ein *eigentliches* Nachelement von a genannt. Daß aRb stattfindet, werde auch durch die Wendungen ausgedrückt: a liegt vor b; a liegt über b; a liegt oberhalb von b. Gilt

$$aRb, \quad bRc,$$

so werde auch

$$aRbRc$$

geschrieben. Gilt

$$aRbRc \quad \text{oder} \quad cRbRa$$

und außerdem

$$a \neq b, \quad b \neq c,$$

so werde b als *zwischen* a und c befindlich bezeichnet.

In den folgenden Erklärungen sei M eine $\mathfrak{T}$-Menge von beliebiger Ordnung.

Erklärung 3. Ein Element a aus M von der Beschaffenheit, daß es in M kein von a verschiedenes Element x gibt derart, daß

$$xRa$$

ist, heiße eine *obere Spitze* von M. Entsprechend heiße ein Element a aus M von der Beschaffenheit, daß es in M kein von a verschiedenes Element x gibt derart, daß

$$aRx$$

ist, eine *untere Spitze* von M. Ein von einer Spitze verschiedenes Element von M heiße ein *inneres* Element von M.

Eine $\mathfrak{T}$-Menge kann keine, eine, mehrere, ja sogar unendlich viele obere bzw. untere Spitzen aufweisen. Insbesondere hat jede endliche $\mathfrak{T}$-Menge mindestens eine obere und mindestens eine untere Spitze.

Erklärung 4. Zwei nicht notwendigerweise verschiedene Elemente a, b aus M, für die

$$aRb \quad \text{oder} \quad bRa$$

gilt, mögen als voneinander *abhängig*, andernfalls als voneinander *unabhängig* bezeichnet werden.

Jedes Element ist von sich selbst abhängig.

Erklärung 5. Eine Folge

$$(1) \qquad a_1, \ldots, a_m$$

von Elementen aus M heiße eine *Brücke* in M, wenn je zwei in (1) unmittelbar aufeinander folgende Elemente voneinander abhängig sind[8]). Die Elemente (1) mögen als die *Pfeiler* der Brücke bezeichnet werden. Insbesondere mögen a_1, a_m *Endpfeiler* und $a_2, \ldots, a_{m-1}$ *innere* Pfeiler genannt werden. Ein innerer Pfeiler a_μ heiße ein *eigentlicher* Pfeiler, wenn $a_{\mu-1}$ und $a_{\mu+1}$ voneinander unabhängig sind; andernfalls heiße a_μ ein *uneigentlicher* Pfeiler. Ein innerer Pfeiler a_μ heiße ein *oberer* oder *unterer* Pfeiler, je nachdem

$$a_\mu R a_{\mu-1}, \quad a_\mu R a_{\mu+1}$$

oder

$$a_{\mu-1} R a_\mu, \quad a_{\mu+1} R a_\mu$$

ist. Eine Brücke werde als *offen* oder *geschlossen* bezeichnet, je nachdem die Endpfeiler verschieden sind oder nicht. Daß B eine Brücke mit den Endpfeilern a und b ist, werde auch durch die Wendung ausgedrückt: Die Brücke B verbindet a mit b. Zwei Brücken mit denselben Endpfeilern mögen als *gleichendig* bezeichnet werden. Eine Brücke heiße eine *Hochbrücke* bzw. *Tiefbrücke*, wenn sich unter den inneren Pfeilern genau ein eigentlicher oberer bzw. unterer Pfeiler befindet, während die übrigen inneren Pfeiler weder obere noch untere Pfeiler sind.

Zwei voneinander abhängige Elemente aus M können stets durch mindestens eine Brücke in M verbunden werden; für zwei voneinander unab-

---

[8]) Wir schließen den Fall aus, daß die Anzahl der Elemente (1), die übrigens nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen, unendlich ist.

hängige Elemente trifft dies so ohne weiteres nicht zu. Wenn jedoch zwei Elemente aus M überhaupt durch eine Brücke in M verbunden werden können, so können sie auch durch eine Brücke in M verbunden werden, die keine uneigentlichen Pfeiler enthält; ist nämlich (1) mit

$$a_1 = a, \quad a_m = b$$

eine a mit b verbindende Brücke, so ist auch die nach Unterdrückung etwaiger uneigentlicher Pfeiler verbleibende Teilmenge von (1) eine a mit b verbindende Brücke.

Erklärung 6. Zwei voneinander abhängige, aber verschiedene Elemente a, b aus M mögen *Nachbarn* in M heißen oder als *benachbart* in M bezeichnet werden, wenn es in M kein Element gibt, das sich zwischen a und b befindet. Sind a und b Nachbarn in M, so heiße das Paar (a, b) eine *Rotte* in M.

Ist M eine endliche $\mathfrak{T}$-Menge, so hat jedes Element aus M, das von einer oberen bzw. unteren Spitze von M verschieden ist, mindestens einen oberen bzw. unteren Nachbarn in M.

§ 2.

Gewebe.

Es liegt nahe — vgl. die Bemerkung im Anschluß an die Erklärung 5 — aus der Gesamtheit der $\mathfrak{T}$-Mengen diejenigen herauszuheben, für die das folgende *Axiom* in Kraft ist:

IV. Sind a und b zwei voneinander unabhängige Elemente der $\mathfrak{T}$-Menge M, so gibt es in M mindestens eine a mit b verbindende Brücke.

Erklärung 7. Eine in bezug auf eine Beziehung R teilweise geordnete Menge M, die überdies dem Axiom IV genügt, heiße *zusammenhängend*, eine $\mathfrak{Z}$-*Menge* oder ein *Gewebe* in bezug auf R. Eine Untermenge N von M, die ebenfalls ein Gewebe in bezug auf R ist, heiße ein *Untergewebe* von M; umgekehrt werde M als ein *Obergewebe* von N bezeichnet. Insbesondere werde, wenn M und N verschieden sind, N ein *eigentliches* Untergewebe von M und M ein *eigentliches* Obergewebe von N genannt.

Offenbar läßt sich jede $\mathfrak{T}$-Menge als ein System von endlich oder unendlich vielen Geweben auffassen derart, daß zwei Elemente, die verschiedenen Geweben angehören, nicht durch eine Brücke miteinander verbunden werden können.

Es sei M ein Gewebe. Wir betrachten die beiden folgenden *Axiome*:

V. Sind a und b zwei voneinander unabhängige Elemente aus M und gibt es in M eine a mit b verbindende

Hochbrücke,	Tiefbrücke,

so gibt es in M auch eine a mit b verbindende

Tiefbrücke.	Hochbrücke.

Das erste dieser einander dual entsprechenden Axiome möge mit V′ und das zweite mit V″ bezeichnet werden. Hinsichtlich der *Verträglichkeit* und *Unabhängigkeit* dieser Axiome stellt man leicht fest, daß es Gewebe gibt, die keinem, genau einem oder beiden Axiomen genügen.

Erklärung 8. Ein dem Axiom V′ bzw. V″ genügendes Gewebe heiße ein V′- oder *Tiefgewebe* bzw. ein V″- oder *Hochgewebe*. Ein Gewebe, das beiden Axiomen genügt, heiße ein V-*Gewebe*.

Satz 1′. *Je zwei voneinander unabhängige Elemente eines Tiefgewebes M lassen sich durch mindestens eine Tiefbrücke in M verbinden.*

Ein entsprechender Satz gilt für Hochgewebe.

Beweis. Es seien a und b zwei voneinander unabhängige Elemente aus M; es sei

$$a_1, \ldots, a_m \qquad (a_1 = a,\ a_m = b) \tag{2}$$

eine a mit b verbindende Brücke in M. Nach der Bemerkung im Anschluß an die Erklärung 5 dürfen wir annehmen, daß (2) keine uneigentlichen Pfeiler aufweist. Da aber a und b voneinander unabhängig sind, enthält (2) mindestens einen eigentlichen Pfeiler. Insbesondere dürfen wir annehmen, daß (2) mindestens einen eigentlichen oberen Pfeiler enthält, da der Satz sonst trivial wäre. Folgendermaßen zeigen wir, daß die Brücke (2) in eine solche verwandelt werden kann, die einen oberen Pfeiler weniger hat als die ursprüngliche Brücke. Es sei a_k ein eigentlicher oberer Pfeiler von (2), so daß also die Elemente

$$a_{k-1}, \quad a_k, \quad a_{k+1}$$

eine Hochbrücke bilden. Nach V′ gibt es in M ein Element a_k' derart, daß die Elemente

$$a_{k-1}, \quad a_k', \quad a_{k+1}$$

eine Tiefbrücke bilden. Dann stellt aber die Folge

$$a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k', a_{k+1}, \ldots, a_m \tag{3}$$

eine Brücke in M dar, die genau einen oberen Pfeiler weniger hat als (2). In derselben Weise wie (2) formen wir nunmehr (3) um, nachdem wir zuvor in (3) etwa hinzugekommene uneigentliche Pfeiler unterdrückt haben, wofür aber nur a_{k-1} und a_{k+1} in Frage kommen, und zwar sind a_{k-1} und a_{k+1} dann und nur dann uneigentliche Pfeiler von (3), wenn sie nicht Endpfeiler von (3) sind. Das hiermit eingeleitete Verfahren bricht nach einer endlichen Anzahl von Schritten mit einer Brücke ab, die keinen einzigen oberen Pfeiler mehr hat und somit eine Tiefbrücke ist.

Folgerung. In der Erklärung 8 kann das Axiom V′ durch den Satz 1′ ersetzt werden und entsprechend V″ durch 1″.

Satz 2′. *Ein Tiefgewebe hat höchstens eine untere Spitze.*

Ein entsprechender Satz gilt für Hochgewebe.

Beweis. Wären zwei untere Spitzen vorhanden, etwa a und b, so müßten a und b voneinander unabhängig sein. Folglich gäbe es nach dem vorhergehenden Satz eine a mit b verbindende Tiefbrücke, was aber nicht möglich ist, da M kein Element enthält, das sowohl unterhalb von a als auch von b liegt.

Folgerung. Ein endliches Tiefgewebe hat genau eine untere Spitze. Entsprechend hat ein endliches Hochgewebe genau eine obere Spitze.

§ 3.

Linear geordnete Mengen.

1. Grundgegebenheit sei eine von der Nullmenge verschiedene Menge M. Es sei R eine zweigliedrige *Beziehung* in M. Diese Beziehung genüge den Axiomen I und II sowie dem folgenden *Axiom*:

VI. Sind a und b zwei verschiedene Elemente aus M, so gilt entweder aRb oder bRa.

Erklärung 9. Eine Menge M mit einer den Axiomen I, II und VI genügenden Elementbeziehung R heiße eine *in bezug auf R linear geordnete Menge*, kürzer eine $\mathfrak{L}$-*Menge* in bezug auf R.

Wie man sich leicht überzeugt, sind für eine $\mathfrak{L}$-Menge die Axiome III und IV sowie V′ und V″ in Kraft. Infolgedessen ist jede $\mathfrak{L}$-Menge auch ein V-Gewebe [9]).

Eine $\mathfrak{T}$-Menge M ist dann und nur dann eine $\mathfrak{L}$-Menge, wenn die Elemente von M zu je zweien voneinander abhängig sind. Jede von der Nullmenge verschiedene Teilmenge einer in bezug auf eine Beziehung R linear geordneten Menge ist ebenfalls eine $\mathfrak{L}$-Menge in bezug auf R.

Es sei M eine $\mathfrak{L}$-Menge. Wir betrachten die beiden folgenden *Axiome*:

VII. Jedes Element von M, das von einer etwa vorhandenen

oberen | unteren

Spitze von M verschieden ist, hat einen

oberen | unteren

Nachbarn in M.

Das erste dieser einander dual entsprechenden Axiome möge mit VII′ und das zweite mit VII″ bezeichnet werden. Hinsichtlich der *Verträglichkeit* und *Unabhängigkeit* dieser Axiome gilt folgendes:

[9]) Darüber hinaus ist jede $\mathfrak{L}$-Menge ein Verband.

Jede endliche $\mathfrak{L}$-Menge genügt beiden Axiomen. Dagegen gibt es unendliche $\mathfrak{L}$-Mengen, die keinem, genau einem oder beiden Axiomen genügen. So ist für die nachstehend beschriebene $\mathfrak{L}$-Menge M das Axiom VII′ in Kraft, aber nicht VII″. Es sei M die Menge aller rationalen Zahlen von der Gestalt

$$r + \frac{s}{s+1},$$

wo r alle ganzen Zahlen und unabhängig davon s alle positiven ganzen Zahlen einschließlich 0 durchläuft; dabei habe aRb den Sinn von $a \geqq b$. Jedes Element von M hat einen oberen Nachbarn in M; dagegen haben die Zahlen r keinen unteren Nachbarn in M. Entsprechend ist für die Menge aller rationalen Zahlen von der Gestalt

$$r - \frac{s}{s+1}$$

zwar VII″ in Kraft, aber nicht VII′.

Erklärung 10. Eine dem Axiom VII′ bzw. VII″ genügende $\mathfrak{L}$-Menge heiße eine $\mathfrak{L}$ (VII′)- bzw. $\mathfrak{L}$ (VII″)-*Menge*. Eine $\mathfrak{L}$-Menge, die beiden Axiomen genügt, heiße eine $\mathfrak{L}$ (VII)-*Menge*.

Wir kommen zu einem weiteren wichtigen Begriff.

Erklärung 11. Eine $\mathfrak{L}$-Menge M heiße eine *Kette*, wenn sich zwischen je zwei Elementen von M nur endlich viele Elemente von M befinden. Die Elemente, aus denen eine Kette besteht, mögen als die *Glieder* derselben bezeichnet werden; insbesondere mögen etwa vorhandene Spitzen *Endglieder* genannt werden. Unter der *Länge* einer endlichen Kette werde deren um 1 verminderte Gliederanzahl verstanden[10]).

Eine Kette ist dann und nur dann endlich, wenn beide Endglieder vorhanden sind. Jede Kette ist zugleich eine $\mathfrak{L}$ (VII)-Menge, und jede endliche $\mathfrak{L}$ (VII)-Menge, d. h. jede endliche $\mathfrak{L}$-Menge, ist auch eine Kette; andererseits ist aber nicht jede unendliche $\mathfrak{L}$ (VII)-Menge eine Kette, wie das folgende Beispiel zeigt[11]). Es sei M die Menge aller rationalen Zahlen von der Gestalt

$$r \pm \frac{s}{s+1},$$

wo r alle *geraden* Zahlen und unabhängig davon s alle positiven ganzen Zahlen einschließlich 0 durchläuft; wie soeben habe aRb den Sinn von $a \geqq b$. Jedes Element von M hat sowohl einen oberen als auch einen unteren Nachbarn in M; dagegen liegen zwischen irgend zwei ganzzahligen Elementen von M immer unendlich viele Elemente von M.

---

[10]) Eine Kette von der Länge 1 ist dasselbe wie eine Rotte (vgl. Erklärung 6).

[11]) Hiernach ist der in [Verb. 8], S. 220 angegebene Satz 13 dahin zu berichtigen, daß die dortigen Bedingungen zwar notwendig, aber nicht hinreichend dafür sind, daß N eine Kette in M ist.

2. Auf den Begriffen der $\mathfrak{L}$-Menge und der Kette bauen sich die in den folgenden Erklärungen beschriebenen *Relativbegriffe* auf.

Erklärung 12. Ist M ein Gewebe in bezug auf eine Beziehung R, so heiße eine in bezug auf R linear geordnete Teilmenge von M eine *$\mathfrak{L}$-Menge in M*. Daß eine $\mathfrak{L}$-Menge N in M die Spitzen a und b hat, werde auch durch die Wendung ausgedrückt: Die $\mathfrak{L}$-Menge N in M verbindet a mit b. Zwei $\mathfrak{L}$-Mengen in M heißen *gleichendig*, wenn die obere bzw. untere Spitze der einen mit der oberen bzw. unteren Spitze der anderen $\mathfrak{L}$-Menge zusammenfällt.

Jede endliche $\mathfrak{L}$-Menge in M ist zugleich eine Brücke in M, und zwar eine solche ohne eigentliche Pfeiler.

Erklärung 13. Ist M ein Gewebe und N eine $\mathfrak{L}$-Menge in M, so heiße N *lückenlos* in bezug auf M oder eine *lückenlose* $\mathfrak{L}$-Menge in M, wenn für je zwei Elemente a und b aus N jedes Element x aus M, das sich zwischen a und b befindet und kein Element von N ist, unabhängig von mindestens einem Element von N ist.

Die Bezeichnung „lückenlos" besagt natürlich nicht, daß N im Sinn der Mengenlehre „dicht" ist; eine lückenlose $\mathfrak{L}$-Menge braucht z. B. nicht unendlich zu sein. Ist eine $\mathfrak{L}$-Menge N lückenlos in bezug auf ein Gewebe M, so sind je zwei in N benachbarte Elemente auch in M benachbart, was für eine beliebige $\mathfrak{L}$-Menge in M keineswegs der Fall ist.

Jede $\mathfrak{L}$-Menge in M kann, wenn sie nicht schon lückenlos in bezug auf M ist, durch Einschalten geeigneter Elemente von M zu einer in bezug auf M lückenlosen $\mathfrak{L}$-Menge ausgebaut werden. Je zwei voneinander abhängige Elemente eines Gewebes M können durch mindestens eine in bezug auf M lückenlose $\mathfrak{L}$-Menge verbunden werden. Jede $\mathfrak{L}$-Menge ist lückenlos in bezug auf sich selbst.

Eine lückenlose $\mathfrak{L}$-Menge wird durch ein beliebiges ihrer inneren Elemente in zwei lückenlose $\mathfrak{L}$-Mengen zerlegt. Umgekehrt können zwei lückenlose $\mathfrak{L}$-Mengen von der Beschaffenheit, daß die untere Spitze einer derselben zugleich die obere Spitze der anderen ist, zu einer einzigen lückenlosen $\mathfrak{L}$-Menge zusammengefaßt werden.

3. Anknüpfend an den Begriff der lückenlosen $\mathfrak{L}$-Menge gelangen wir zu einem weiteren wichtigen Begriff.

Erklärung 14. Ein Element a eines Gewebes M heiße *s-fach nach unten* bzw. *oben gespalten* in M, wenn es in M mindestens einmal s, aber niemals $s+1$ verschiedene Elemente

$$x, y, \ldots \tag{4}$$

von der folgenden Beschaffenheit gibt:

α) Es ist

$$x \neq a, \; y \neq a, \ldots$$

und

$$aRx,\ aRy,\ \ldots$$

bzw.

$$xRa,\ yRa,\ \ldots$$

β) Jedes der Elemente (4) läßt sich mit a durch genau eine lückenlose $\mathfrak{L}$-Menge in M verbinden.

γ) Je zwei dieser lückenlosen $\mathfrak{L}$-Mengen haben außer a kein weiteres Element gemeinsam[12]).

Ein Element, das einfach nach unten und einfach nach oben gespalten ist, werde kurz als *einfach* bezeichnet.

Die Erklärung 14 hat zunächst nur einen Sinn für den Fall, daß s eine natürliche Zahl ist. Wir ergänzen sie durch eine die Fälle

$$s = 0,\quad s = \infty$$

umfassende *Zusatzerklärung*:

Ein Element a aus M heiße *nullfach nach unten* bzw. *oben gespalten* in M, wenn es in M kein von a verschiedenes Element gibt, das unterhalb bzw. oberhalb von a liegt.

Ein Element a aus M heiße ∞*-fach nach unten* bzw. *oben gespalten* in M, wenn es in M mindestens einmal unendlich viele Elemente (4) gibt derart, daß die Bedingungen α, β und γ in Kraft sind.

Offenbar ist a dann und nur dann nullfach nach unten bzw. oben gespalten in M, wenn a eine untere bzw. obere Spitze von M ist.

Erklärung 15. Ist das Element a eines Gewebes s-fach nach unten bzw. oben gespalten, so heiße die eindeutig bestimmte Zahl s die untere bzw. obere *Spaltungszahl* von a. Die untere bzw. obere Spaltungszahl von a werde auch mit $\psi_u(a)$ bzw. $\psi^0(a)$ bezeichnet.

Ist M ein endliches Gewebe und bedeutet $\mathfrak{r}$ die Anzahl der in M vorhandenen Rotten, so gilt

$$\Sigma\, \psi_u(x) = \Sigma\, \psi^0(x) = \mathfrak{r},$$

wobei über alle Elemente x aus M zu summieren ist.

§ 4.

Längenendliche Gewebe.

Erklärung 16. Ein Gewebe M heiße *längenendlich* oder ein $\mathfrak{Lg}$*-Gewebe*, wenn alle lückenlosen $\mathfrak{L}$-Mengen in M Ketten in M sind.

Ein Gewebe M ist dann und nur dann längenendlich, wenn alle $\mathfrak{L}$-Mengen in M, die zwei Elemente von M miteinander verbinden, endlich sind. Jedes endliche Gewebe ist ein $\mathfrak{Lg}$-Gewebe.

---

[12]) Die Elemente (4) sind danach zu je zweien voneinander unabhängig.

Satz 3'. *Ist M ein $\mathfrak{Lg}$-Gewebe von der Beschaffenheit, daß erstens in M nur endlich viele obere Spitzen vorhanden sind, daß zweitens jedes Element von M nur endlich viele untere Nachbarn hat, und daß es drittens eine positive ganze Zahl m gibt derart, daß alle Ketten in M eine m nicht übersteigende Länge haben, so ist M ein endliches Gewebe*[13]).

Ein entsprechender Satz gilt für den Fall, daß in M nur endlich viele *untere* Spitzen vorhanden sind und jedes Element von M nur endlich viele *obere* Nachbarn hat.

Beweis. Eine Teilmenge T von M heiße ein *unterer Abschnitt* von M, wenn mit jedem Element a aus T alle Elemente x aus M, für die aRx gilt, Elemente von T sind[14]). Jedem Abschnitt T von M läßt sich eindeutig eine nichtnegative ganze Zahl $\lambda = \lambda(T)$ zuordnen derart, daß es in T mindestens eine Kette gibt, deren Länge gleich λ ist, aber keine Kette, deren Länge größer als λ ist. Eine notwendige, aber im allgemeinen nicht hinreichende Bedingung dafür, daß K eine derartige Maximalkette ist, besteht darin, daß das obere Endglied von K eine obere Spitze von T und das untere Endglied von K eine untere Spitze von T ist.

Wir bilden nun eine bestimmte Folge

$$T_1, T_2, \ldots \tag{5}$$

von unteren Abschnitten von M. Das Bildungsgesetz laute: Es sei $T_1 = M$; ist T_ν einer der Abschnitte (5), so sei $T_{\nu+1}$ derjenige untere Abschnitt von T_ν oder, was dasselbe ist, von M, der aus den Elementen von T_ν besteht, die nicht obere Spitzen von T_ν sind. Setzt man zur Abkürzung

$$\lambda_\nu = \lambda(T_\nu),$$

so entspricht der Folge (5) die Folge

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \tag{6}$$

Beachtet man, daß jede obere Spitze von $T_{\nu+1}$ unterer Nachbar von mindestens einer oberen Spitze von T_ν ist, so erkennt man, daß

$$\lambda_{\nu+1} = \lambda_\nu - 1$$

ist. Daraus und aus $\lambda_1 \leqq m$ ergibt sich, daß die Anzahl der λ_ν in (6) endlich, und zwar gleich $\lambda_1 + 1$ ist. Offenbar ist $\lambda_1 + 1$ auch die Anzahl der T_ν in (5).

Da nach dem ersten Teil der Voraussetzung der Abschnitt T_1 nur endlich viele obere Spitzen hat, folgt nach dem zweiten Teil, daß auch alle folgenden Abschnitte nur endlich viele obere Spitzen haben, insbesondere also der letzte Abschnitt T_{λ_1+1}. Berücksichtigt man nun, daß jedes Element dieses Abschnittes zugleich obere Spitze desselben, somit die Anzahl der Elemente

---

[13]) Vgl. auch [Verb. 6], S. 624, Satz 21.

[14]) Im allgemeinen ist T kein Gewebe, sondern nur eine $\mathfrak{T}$-Menge.

dieses Abschnittes endlich ist, so ergibt sich, daß überhaupt alle Abschnitte (5) endliche Mengen sind, insbesondere also der erste Abschnitt T_1, d. h. das Gewebe M.

Ohne weiteres sieht man die Richtigkeit des folgenden Satzes ein.

Satz 4. *Ist a ein Element eines $\mathfrak{Lg}$-Gewebes M, so ist dann und nur dann*

$$\psi_u(a) = s \quad bzw. \quad \psi^0(a) = s,$$

wenn a genau s untere bzw. obere Nachbarn in M hat.

Hiernach ist für ein $\mathfrak{Lg}$-Gewebe die obere bzw. untere Spaltungszahl eines Elementes a (vgl. Erklärung 15) dasselbe wie die Anzahl der oberen bzw. unteren Nachbarn von a.

§ 5.

Beispiele.

1. Die *endlichen* Gewebe lassen sich in einfacher Weise *graphisch* veranschaulichen. Wir stellen die Elemente eines derartigen Gewebes durch Punkte der Ebene oder des Raumes dar. Sind zwei Elemente benachbart, so verbinden wir die entsprechenden Bildpunkte durch eine Strecke. Die Anordnung der Bildpunkte soll derart sein, daß der Bildpunkt von a oberhalb

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

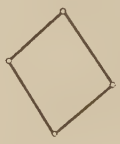


Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

des Bildpunktes von b liegt, wenn a ein oberer Nachbar von b ist. Es können also keine waagerecht verlaufenden Verbindungsstrecken auftreten. Bei dieser Deutung wird die Theorie der Gewebe gewissermaßen zu einer Geometrie des Oben und Unten. Das Bild eines Gewebes erster Ordnung ist ein einzelner Punkt. Ebenfalls gibt es nur einen einzigen Typ von Geweben zweiter Ordnung (Fig. 1), dagegen drei Typen von Geweben dritter Ordnung (Fig. 2 bis 4) und elf Typen von Geweben vierter Ordnung (Fig. 5 bis 15). Wie man sieht, nimmt die Anzahl der Typen mit wachsender Ordnung sehr schnell zu. Zu den Figuren bemerken wir, daß bei einer Vertauschung von rechts mit links der Typ erhalten bleibt, was bei einer Vertauschung von oben mit unten im allgemeinen nicht der Fall ist. Wir weisen noch darauf hin, daß das Dreieck der Fig. 16 niemals Bestandteil eines Gewebebildes sein kann; a und c müßten nämlich zugleich benachbart und nicht benachbart sein.

Setzt man weiter fest, daß ein gestrichelt gezeichnetes Linienstück eine *kontinuierliche* $\mathfrak{L}$-Menge bedeuten soll, so lassen sich auch *unendliche* Gewebe veranschaulichen (Fig. 17).

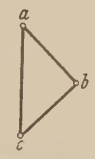


Fig. 16.

Fig. 17.

2. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, ist der Begriff des Gewebes aus dem des Verbandes bzw. Halbverbandes erwachsen. Daß die *Halbverbände* zu den Geweben gehören, ergibt sich folgendermaßen. Ein Halbverband M ist eine dem nachstehenden *Axiom* genügende $\mathfrak{T}$-Menge[15]):

Sind a und b zwei beliebige Elemente aus M, so gilt:

α) Es gibt in M mindestens ein Element x derart, daß

$$xRa, \quad xRb \tag{7}$$

ist.

β) Es gibt unter den (7) genügenden Elementen x ein Element c derart, daß

$$xRc$$

für alle x ist.

Die Forderung α besagt aber, daß zwei voneinander unabhängige Elemente a und b durch mindestens eine Hochbrücke in M verbunden werden können; somit ist M ein Gewebe, genauer ein Hochgewebe in bezug auf die Beziehung R.

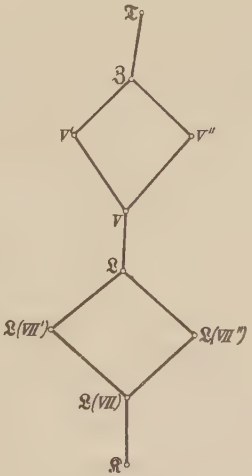


Fig. 18.

Fig. 19.

[15]) Vgl. [H. 1], § 1, Erklärung 5.

3. Ein Beispiel aus der *Logik*. Es sei M eine Menge von *Begriffen*. Dann kann M als eine $\mathfrak{T}$-Menge in bezug auf die dadurch erklärte Beziehung R aufgefaßt werden, daß dann und nur dann aRb sein soll, wenn a ein *Oberbegriff* von b ist. So wird in den Fig. 18 und 19 der begriffliche Zusammenhang der in der vorliegenden Arbeit eingeführten *Operationsbereiche* — diese sind durch die entsprechenden Buchstaben bezeichnet — graphisch wiedergegeben. Zur Bequemlichkeit für den Leser ist eine Tafel der in Frage kommenden Bereiche beigefügt. Fig. 18 stellt einen Verband zehnter Ordnung und Fig. 19 eine Kette von der Länge 4 dar. Diese beiden Gewebe können dadurch, daß sie in den Elementen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{K}$ zusammengeheftet werden, zu einem einzigen Gewebe vereinigt werden[16]).

Bezeichnung	Bedeutung	Erklärung
$\mathfrak{T}$	Teilweise geordnete Menge	1
$\mathfrak{Z}$	Gewebe	7
$\mathfrak{V}'$	Tiefgewebe	8
$\mathfrak{V}''$	Hochgewebe	8
$\mathfrak{V}$	V-Gewebe	8
$\mathfrak{L}$	Linear geordnete Menge	9
$\mathfrak{L}(\mathrm{VII}')$	$\mathfrak{L}$ (VII')-Menge	10
$\mathfrak{L}(\mathrm{VII}'')$	$\mathfrak{L}$ (VII'')-Menge	10
$\mathfrak{L}(\mathrm{VII})$	$\mathfrak{L}$ (VII)-Menge	10
$\mathfrak{K}$	Kette	11
$\mathfrak{L}_g$	Längenendliches Gewebe	16
$\mathfrak{K}\mathfrak{A}$	Kettenausgeglichenes Gewebe	17
$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$	Brückenausgeglichenes Gewebe	19

4. Außerhalb der Mathematik sind es vor allem die zwischen verschiedenen *Individuen* bestehenden *verwandtschaftlichen* Beziehungen, die geradezu eine gewebetheoretische Betrachtungsweise herausfordern[17]). Eine *Familie* oder eine *Sippe* kann ja als ein Gewebe in bezug auf die dadurch erklärte Beziehung R angesehen werden, daß dann und nur dann aRb sein soll, wenn a ein *Vorfahr* von b ist; dabei ist angenommen, daß ein Individuum ein uneigentlicher Vorfahr von sich selbst ist. Bei dieser Deutung geht die abstrakte Nachbarbeziehung in die zwischen einem Individuum und jedem seiner Elternteile bestehende Verwandtschaftsbeziehung über. Wir werden so zu längenendlichen Geweben geführt, die den beiden folgenden *Axiomen* genügen:

α) Jedes Element des Gewebes M hat genau zwei obere Nachbarn in M.

---

[16]) Wir weisen auch auf die Veranschaulichung des logischen Zusammenhangs der verschiedenen Verbandsarten in [Verb. 7], S. 59 und [Verb. 8], S. 223 hin.

[17]) Vgl. auch [H. 1], § 1.

β) Die Elemente des Gewebes M verteilen sich auf zwei zueinander komplementäre Klassen derart, daß für jedes Element a aus M die beiden oberen Nachbarn von a verschiedenen Klassen angehören.

Eine eingehende Untersuchung dieser Gewebe fällt jedoch nicht mehr in den Rahmen der vorliegenden Arbeit.

§ 6.

Ausgeglichene Gewebe.

1. Es sei M ein $\mathfrak{L}\mathfrak{g}$-Gewebe. Auf M wirke das folgende *Axiom* ein:

VIII. Sind a und b zwei voneinander abhängige Elemente aus M, so haben alle a mit b verbindenden Ketten in M dieselbe Länge.

Erklärung 17. Ein dem Axiom VIII genügendes $\mathfrak{L}\mathfrak{g}$-Gewebe heiße *kettenausgeglichen* oder ein $\mathfrak{R}\mathfrak{A}$-*Gewebe*.

Alle Gewebe von der ersten bis zur vierten Ordnung sind $\mathfrak{R}\mathfrak{A}$-Gewebe. Fig. 20 stellt ein Gewebe fünfter Ordnung dar, das nicht kettenausgeglichen ist.

Erklärung 18. Sind a und b zwei voneinander *abhängige* Elemente eines $\mathfrak{R}\mathfrak{A}$-Gewebes M, so werde, wenn λ die Länge der a mit b verbindenden Ketten in M ist,

$$[a, b] = \pm \lambda$$

gesetzt, wobei das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem

$$aRb \quad \text{oder} \quad bRa$$

ist.

Ersichtlich ist für jedes Element a

$$[a, a] = 0. \tag{8}$$

Ferner ist, sobald $[a, b]$ einen Sinn hat,

$$[a, b] = -[b, a]. \tag{9}$$

Fig. 20.

Schließlich ist, wenn die Elemente a, b, c zu je zweien voneinander abhängig sind,

$$[a, b] + [b, c] + [c, a] = 0. \tag{10}$$

Es sei M ein $\mathfrak{R}\mathfrak{A}$-Gewebe. Verwandelt man eine Brücke

$$a_1, \ldots, a_m$$

in M dadurch, daß man, wenn dies möglich ist, *uneigentliche* Pfeiler einschaltet oder unterdrückt, in eine gleichendige Brücke

$$b_1, \ldots, b_n \qquad (a_1 = b_1, \quad a_m = b_n),$$

so ist

$$\sum_{\mu=1}^{m-1} [a_\mu, a_{\mu+1}] = \sum_{\nu=1}^{n-1} [b_\nu, b_{\nu+1}].$$

Wir bemerken dabei ausdrücklich, daß diese Beziehung für zwei gleichendige Brücken in M, die nicht in der angegebenen Weise auseinander hervorgehen, im allgemeinen nicht gilt, wie das in Fig. 21 wiedergegebene Gewebe fünfter Ordnung zeigt. Dieses Gewebe ist kettenausgeglichen, denn irgend zwei Elemente desselben lassen sich durch höchstens eine Kette verbinden; für die beiden Brücken, die a mit b verbinden, gilt jedoch

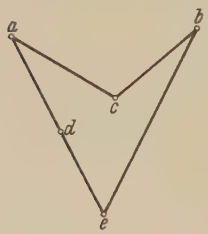


Fig. 21.

$$[a, c] + [c, b] = 0,$$

$$[a, d] + [d, e] + [e, b] = 1.$$

2. Die letzte Bemerkung führt dazu, auf ein $\mathfrak{RA}$-Gewebe M das folgende *Axiom* einwirken zu lassen:

IX. Sind

$$a_1, \ldots, a_m; \quad b_1, \ldots, b_n \quad (a_1 = b_1,\ a_m = b_n)$$

zwei gleichendige, im übrigen aber beliebige Brücken in M, so gilt

$$\sum_{\mu=1}^{m-1} [a_\mu, a_{\mu+1}] = \sum_{\nu=1}^{n-1} [b_\nu, b_{\nu+1}].$$

Erklärung 19. Ein dem Axiom IX genügendes $\mathfrak{RA}$-Gewebe heiße *brückenausgeglichen* oder ein $\mathfrak{BA}$-*Gewebe*.

Alle Gewebe von der ersten bis zur vierten Ordnung sind $\mathfrak{BA}$-Gewebe. Dagegen liegt, wie soeben festgestellt, in Fig. 21 ein $\mathfrak{RA}$-Gewebe vor, das nicht brückenausgeglichen ist. Übrigens stellt auch Fig. 20 ein derartiges Gewebe dar.

In einem $\mathfrak{BA}$-Gewebe kann dem Symbol $[a, b]$ für *beliebige* Elemente a und b ein Sinn beigelegt werden, nämlich so:

Erklärung 20. Sind a und b zwei beliebige Elemente eines $\mathfrak{BA}$-Gewebes M, so werde gesetzt

$$[a, b] = \sum_{\mu=1}^{m-1} [a_\mu, a_{\mu+1}],$$

wobei

$$a_1, \ldots, a_m \qquad (a_1 = a, \quad a_m = b)$$

irgendeine a mit b verbindende Kette in M ist.

Für das verallgemeinerte Symbol $[a, b]$ gelten die Gleichungen (9) und (10) uneingeschränkt, d. h. für ganz beliebige Elemente aus M.

Erklärung 21. Sind a und b zwei beliebige Elemente eines $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$-Gewebes M, so heiße a vom *Rang* ϱ *in bezug auf* b, wenn

$$[a, b] = \varrho$$

ist. Der positive Höchstwert, den $[a, b]$ für zwei Elemente aus M erreichen kann, heiße der *Rang* von M.

Man beachte, daß der relative Rang eines Elementes positiv, negativ oder 0 sein kann.

Erklärung 22. Ist a ein Element eines $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$-Gewebes M, so bezeichne $S(a)$ die Menge derjenigen Elemente x aus M, die vom Rang 0 in bezug auf a sind, für die somit

$$[x, a] = [a, x] = 0$$

ist.

Satz 5. *Zwei Mengen $S(a)$ und $S(b)$ sind entweder identisch oder elementfremd; sie sind dann und nur dann identisch, wenn*

$$[a, b] = 0$$

ist[18]).

Die Funktion $[x, y]$ liefert eine Aufspaltung von M in eine endliche oder unendliche Anzahl von *Stufen*

$$S(a), \quad S(b), \quad \ldots$$

derart, daß jedes Element von M einer und nur einer dieser Stufen angehört. Ist dabei x ein beliebiges Element aus $S(a)$ und y ein beliebiges Element aus $S(b)$, so ist

$$[x, y] = [a, b].$$

Ist der Rang von M endlich, so ist die Anzahl der Stufen in M um 1 größer als der Rang von M. Die am Schluß von § 3 angegebene Relation läßt sich folgendermaßen verschärfen:

Satz 6. *Es sei M ein endliches $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$-Gewebe; es seien $S(a)$ und $S(b)$ zwei benachbarte, etwa durch*

$$[a, b] = 1$$

bestimmte Stufen in M. Bedeutet dann $\mathfrak{r}(a, b)$ die Anzahl derjenigen Rotten in M, deren oberes Endglied zu $S(a)$ und deren unteres Endglied zu $S(b)$ gehört, so gilt

$$\sum_{(x)} \psi_u(x) = \sum_{(y)} \psi^0(y) = \mathfrak{r}(a, b),$$

wobei die erste Summe über alle Elemente x von $S(a)$ und die zweite über alle Elemente y von $S(b)$ zu erstrecken ist[19]).

---

[18]) Wegen des Beweises vgl. [Verb. 3], S. 417, Satz 9 und 10.

[19]) Vgl. [Verb. 6], S. 620, Satz 7.

3. Wir teilen noch einen Satz mit, der eine zwischen den Axiomen VIII, IX und V′ bzw. V″ bestehende logische Abhängigkeit zum Ausdruck bringt.

Satz 7′. *Ein Tiefgewebe M, das überdies kettenausgeglichen ist, ist auch brückenausgeglichen*[20]).

Ein entsprechender Satz gilt für Hochgewebe.

Beweis. Es seien a und b zwei Elemente aus M; es sei

$$a_1, \ldots, a_m \qquad (a_1 = a, \quad a_m = b) \tag{11}$$

eine a mit b verbindende Brücke in M.

Wir zeigen zunächst: Es gibt in M mindestens ein sowohl unter a als auch unter b liegendes Element c derart, daß

$$\sum_{\mu=1}^{m-1} [a_\mu, a_{\mu+1}] = [a, c] + [c, b] \tag{12}$$

ist.

Es bezeichne i die Anzahl der inneren, i_u die Anzahl der unteren und i^0 die Anzahl der oberen Pfeiler von (11), so daß also

$$\begin{aligned} i + 2 &= m, \\ i_u + i^0 &= i, \\ i_u - i^0 &= \varepsilon \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon = -1, 0, +1$$

ist. Wir nehmen an, daß in (11) keine uneigentlichen Pfeiler vorkommen; auf die Zulässigkeit dieser Annahme haben wir im Anschluß an die Erklärung 18 hingewiesen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Ist $i^0 = 0$ und somit $i_u = 0$ oder $i_u = 1$, so ist (12) trivial erfüllbar. Ist aber $i^0 \geqq 1$, so schließen wir folgendermaßen. Es sei a_k ein oberer Pfeiler von (11). Da die Elemente a_{k-1} und a_{k+1} voneinander unabhängig sind, gibt es in M nach Satz 1′ ein unter a_{k-1} und a_{k+1} liegendes Element a'_k, so daß also die Folge

$$a_1, \ldots, a_{k-1}, a'_k, a_{k+1}, \ldots, a_m \tag{13}$$

eine Brücke in M ist, die genau einen oberen Pfeiler weniger hat als (11). Berücksichtigt man, daß

$$a_k \; R \; a_{k-1} \; R \; a'_k$$

und

$$a_k \; R \; a_{k+1} \; R \; a'_k$$

ist, so erkennt man, daß

$$[a'_k, a_{k-1}] + [a_{k-1}, a_k] = [a'_k, a_{k+1}] + [a_{k+1}, a_k]$$

ist, woraus

$$[a_{k-1}, a_k] + [a_k, a_{k+1}] = [a_{k-1}, a'_k] + [a'_k, a_{k+1}]$$

[20]) Vgl. den Brückensatz in [Verb. 3], S. 414ff.

folgt. Demnach ist die über (11) erstreckte Summe Σ gleich der über (13) erstreckten Summe Σ.

Wie mit der Brücke (11) verfahren wir mit der Brücke (13), nachdem wir zuvor etwaige uneigentliche Pfeiler von (13) unterdrückt haben[21]). Das hiermit eingeleitete Reduktionsverfahren liefert nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein unter a und b liegendes Element c aus M, das die Gleichung (12) befriedigt.

Nunmehr zeigen wir: Sind c und c' zwei Elemente aus M, die sowohl unter a als auch unter b liegen, so gilt

$$[a, c] + [c, b] = [a, c'] + [c', b]. \tag{14}$$

Die Elemente c und c' sind entweder voneinander abhängig oder unabhängig. Im ersten Falle darf $c' R c$ angenommen werden. Dann ist

$$[a, c] = [a, c'] + [c', c],$$
$$[c, b] = [c, c'] + [c', b],$$

woraus durch Addition (14) folgt.

Im zweiten Falle gibt es in M nach Satz 1′ ein unter c und c' liegendes Element d. Dafür ist

$$[a, c] + [c, d] = [a, c'] + [c', d],$$
$$[b, c] + [c, d] = [b, c'] + [c', d],$$

woraus durch Subtraktion (14) folgt.

Damit ist der Satz 7′ in vollem Umfange bewiesen. Denn wenn, wie im ersten Teil des Beweises gezeigt, jede a mit b verbindende Brücke einer a mit b verbindenden Tiefbrücke gleichwertig ist und wenn, wie im zweiten Teil gezeigt, alle diese Tiefbrücken einander gleichwertig sind, so sind auch alle a mit b verbindenden Brücken einander gleichwertig.

Literaturverzeichnis.

(Die bis 1936 erschienenen Arbeiten sind in [Verb. 8] zusammengestellt.)

Birkhoff, G.

[7] On the combination of topologies. Fundamenta Math. **26** (1936), S. 156—166.

[9] Rings of sets. Duke math. J. **3** (1937), S. 443—454.

Birkhoff, G. und von Neumann, J.

[8] The logic of quantum mechanics. Ann. Math. **37** (1936), S. 823—843.

Glivenko, V.

[1] Géométrie des systèmes de choses normées. Amer. J. Math. **58** (1936), S. 799 bis 828.

Hausmann, B. A. und Ore, O.

[6] Theory of quasi-groups. Amer. J. Math. **59** (1937), S. 983—1004.

Klein-Barmen, F.

[21]) Wie beim Beweis von Satz 1′ bemerkt, können höchstens die Elemente a_{k-1} und a_{k+1} uneigentliche Pfeiler von (13) sein.

[D. S.] Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik. Jber. dtsch. Math. Ver. **38** (1929), S. 35—40.

[Verb. 2] Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen **111** (1935), S. 596 bis 621.

[Verb. 3] Über ausgeglichene Verbände. Math. Annalen **112** (1936), S. 411—418

[Verb. 6] Weitere Untersuchungen über Boole-Schrödersche Verbände. Deutsche Math. **1** (1936), S. 618—632.

[Verb. 7] Birkhoffsche und harmonische Verbände. Math. Zeitschr. **42** (1936) S. 58—81.

[Verb. 8] Über die ausgezeichneten Darstellungen der Elemente verzahnter harmonischer Verbände. Deutsche Math. **2** (1937), S. 216—241.

[Verb. 9] Ein weiterer Beitrag zum Problem der Zerlegung der Elemente gewisser harmonischer Verbände. Deutsche Math. **3** (1938), S. 46—64.

[Verb. 10] Zur Geometrie des Verbindens und Schneidens. Deutsche Math. **3** (1938), S. 403—407.

[H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände. Deutsche Math. **4** (1939), im Druck.

Köthe, G.

[1] Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie. Jber. dtsch. Math.-Ver. **47** (1937), S. 125—144

Ore, O.

[2] On the foundation of abstract algebra II. Ann. Math. **37** (1936), S. 265—292

[3] Direct decompositions. Duke math. J. **2** (1936), S. 581—596.

[4] On the theorem of Jordan-Hölder. Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), S. 266 bis 275.

[5] Structures and group theory I. Duke math. J. **3** (1937), S. 149—174.

[7] On the decomposition theorems of algebra. Comptes rendus du congrès international des mathématiciens, Oslo 1936, S. 297—307.

[8] Structures and group theory II. Duke math. J. **4** (1938), S. 247—269.

Skolem, Th.

[1] Über gewisse „Verbände" oder „lattices". Vid.-Akad., Avh. I, math.-naturwiss Kl. **7** (1936), S. 1—16.

Ward, M.

[2] Arithmetic functions on rings. Ann. Math. **38** (1937), S. 725—732.

[3] Residuation in structures over which a multiplication is defined. Duke math J. **3** (1937), S. 627—636.

[5] Structure residuation. Ann. Math. **39** (1938), S. 558—568.

Ward, M. und Dilworth, R. P.

[4] Residuated lattices. Proc. Nat. Acad. USA **24** (1938), S. 162—164.

(Eingegangen am 17. November 1938.)

Über Bruwiersche Reihen.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Ziele der Untersuchung.

Als Bruwiersche Reihe soll im folgenden jede Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} (x + n c)^n \qquad (c \neq 0) \tag{1}$$

bezeichnet werden. Dabei ist x eine komplexe Variable, c eine von Null verschiedene Konstante, und die A_n sind konstante Koeffizienten. Herr Bruwier hat solche Reihen untersucht und sie insbesondere zur Lösung der beiden Funktionalgleichungen

$$y'(x) = \gamma\, y(x + c), \tag{2}$$

$$y^{(k)}(x) + a_1 y^{(k-1)}(x + c) + a_2 y^{(k-2)}(x + 2c) + \ldots + a_k y(x + k c) = 0 \tag{3}$$

benutzt, deren erste natürlich ein Spezialfall der zweiten ist[1]). Als Lösung von (2) ergibt sich zunächst formal, wie man leicht verifiziert,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} (x + n c)^n, \tag{4}$$

und als Lösung von (3) formal jede Reihe der Form (1), deren Koeffizienten A_n der Differenzengleichung

$$A_{n+k} + a_1 A_{n+k-1} + a_2 A_{n+k-2} + \ldots + a_k A_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

genügen. Eine Reihe der Form (4) oder allgemeiner der Form (1) mit der Nebenbedingung (5) soll als „spezielle" Bruwiersche Reihe bezeichnet werden.

Herr Bruwier hat a. a. O. bewiesen, daß die Reihe (1) im Falle

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < \frac{1}{e\,|c|} \tag{6}$$

---

[1]) Sur l'équation fonctionnelle $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x + c) + \ldots + a_{n-1} y'(x + \overline{n-1}\, c) + a_n y(x + n c) = 0$. Comptes rendus du congrès national des sciences, Bruxelles 1930, S. 91—97. — Sur une équation aux dérivées et aux différences mêlées, Mathesis 47 (1933), S. 96—105.

in der ganzen komplexen x-Ebene konvergiert, und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich, so daß sie eine ganze Funktion von x darstellt und auch beliebig oft gliedweise differenziert werden darf. Mit „$>$“ an Stelle von „$<$“ in (6) ist die Reihe dagegen für alle x divergent, während bei „$=$“ verschiedene Fälle eintreten können. Die spezielle Reihe (4) ist hiernach im Falle $e|c\gamma| < 1$ eine ganze Funktion von x und, da sie die Funktionalgleichung (2) formal befriedigt, auch wirklich eine Lösung dieser Gleichung. Dagegen ist sie im Falle $e|c\gamma| > 1$ für alle x divergent. Darüber hinaus sieht man leicht, daß sie im Falle $e|c\gamma| = 1$ ebenfalls eine ganze Funktion von x ist und eine Lösung von (2) darstellt, außer wenn dabei $ec\gamma = 1$ ist; in diesem Falle ist sie wieder für alle x divergent.

Weiter hat dann Herr Bruwier noch den Satz aufgestellt, daß die Reihe (1) auch *nur dann* eine Lösung der Gleichung (3) ist, wenn die Koeffizienten A_ν der Gleichung (5) genügen. Beim Beweis wurde aber stillschweigend angenommen, daß eine Bruwiersche Reihe nicht identisch verschwinden kann, ohne daß alle Koeffizienten verschwinden, oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß eine Funktion sich nur auf *eine* Weise (wenn überhaupt) als Bruwiersche Reihe darstellen läßt. Daß diese Annahme zutrifft, bedarf natürlich eines Beweises; er wird unten in § 3 erbracht (Satz 1).

Nun ist die Gleichung (3) ein Spezialfall einer schon viel früher von Herrn Erhard Schmidt behandelten Funktionalgleichung[2]), und den Spezialfall (2) hat außerdem Herr F. Schürer zum Gegenstand einer eingehenden Untersuchung gemacht[3]). Bei keinem dieser Autoren tritt aber eine Bruwiersche Reihe auf; vielmehr finden sie die Lösung durch den Ansatz $y(x) = e^{\varrho x}$. Für ϱ ergibt sich im Falle (2) die transzendente Gleichung

$$\varrho = \gamma e^{\varrho c} \tag{7}$$

und im Falle (3) allgemeiner:

$$\varrho^k + a_1 \varrho^{k-1} e^{\varrho c} + a_2 \varrho^{k-2} e^{2\varrho c} + \ldots + a_k e^{k\varrho c} = 0. \tag{8}$$

Für eine g-fache Wurzel ϱ hat man dann die Lösung $y(x) = e^{\varrho x} P(x)$, wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom höchstens vom Grade $g - 1$ ist. Die transzendenten Gleichungen (7) und (8) haben unendlich viele Lösungen, so daß man auf diese Art auch unendlich viele Partikulärlösungen von (2) bzw. (3) erhält. Die Herren Schmidt und Schürer zeigen, daß die allgemeinste Lösung, die noch gewissen Nebenbedingungen genügt, eine Linearkombination von diesen Partikulärlösungen ist, und unter etwas anderen Nebenbedingungen

---

[2]) Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen, Math. Annalen 70 (1911), S. 499—524.

[3]) Über die Funktional-Differentialgleichung $f'(x+1) = af(x)$. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse 64 (1912), S. 167—236, 65 (1913), S. 239—246.

ergibt sich dasselbe aus einer Arbeit des Verfassers[4]), da man (2) und (3) als lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten ansehen kann. Hiernach ist zu vermuten, daß die Bruwiersche Lösung, obwohl man es ihr formal nicht ansieht, unter den Lösungen von Schmidt-Schürer enthalten ist. In § 2 wird gezeigt, daß das in der Tat zutrifft, und zwar stellt sich heraus, daß die Reihe (4) gleich

$$\frac{1}{1-\varrho c}\, e^{\varrho \overset{\bullet}{x}}$$

ist, wo ϱ die absolut kleinste Wurzel der Gleichung (7) bedeutet.

In § 3 wird untersucht, welche ganzen Funktionen sich überhaupt durch Bruwiersche Reihen darstellen lassen. Insbesondere enthält Satz 3 eine für die Darstellbarkeit notwendige und hinreichende Bedingung. Schließlich werden in § 4 gewisse Verallgemeinerungen (r-fache Bruwiersche Reihen) betrachtet, wobei sich insbesondere auch wieder ein Zusammenhang mit Exponentialfunktionen ergibt. Im Gegensatz zu den einfachen Reihen können aber mehrfache sehr wohl identisch verschwinden, ohne daß alle Koeffizienten verschwinden.

§ 2.

Die spezielle Bruwiersche Reihe.

Unter den unendlich vielen Auflösungen der Gleichung (7) ist genau *eine*, die sich nach Potenzen von γ entwickeln läßt:

$$\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma^n.$$

Die Koeffizienten α_n findet man mit Hilfe der Lagrangeschen Reihenumkehrformel oder bequemer durch direkte Ausrechnung in folgender Weise, wobei die Integrationswege einfache Umläufe um den Nullpunkt der γ- bzw. ϱ-Ebene sind:

$$2\pi i \alpha_n = \int \frac{\varrho}{\gamma^{n+1}}\, d\gamma = -\frac{1}{n}\int \varrho\, d(\gamma^{-n}) = \frac{1}{n}\int \gamma^{-n}\, d\varrho$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{e^{n\varrho c}}{\varrho^n}\, d\varrho = \frac{2\pi i}{n}\,\frac{(nc)^{n-1}}{(n-1)!} = 2\pi i\,\frac{(nc)^{n-1}}{n!}.$$

Die obige Potenzreihe wird also die folgende:

9) $$\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nc)^{n-1}}{n!}\, \gamma^n.$$

[4]) Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten, Math. Annalen 84 (1921), S. 31—42.

Sie konvergiert für

$$|\gamma| \leqq \frac{1}{e\,|c|} \tag{10}$$

mit Einschluß der Gleichheit, also noch auf dem ganzen Rande des Kon vergenzkreises.

Man sieht leicht, daß durch die Reihe (9) stets (d. h. wenn sie konvergiert wenn also die Ungleichung (10) besteht) die absolut kleinste Lösung de Gleichung (7) dargestellt wird. Denn schreibt man die Gleichung (7) i der Form

$$c\gamma = c\varrho \cdot e^{-c\varrho} \tag{7a}$$

und betrachtet die hierdurch vermittelte konforme Abbildung der $c\gamma$-Eben auf die $c\varrho$-Ebene, so geht zunächst die Kreislinie $|c\gamma| = \frac{1}{e}$, wenn ma $c\varrho = \xi + i\eta$ setzt, über in die Kurve

$$\xi^2 + \eta^2 = e^{2\xi - 2},$$

die in der Figur gezeichnet ist. Der Doppelpunkt $c\varrho = 1$ entspricht den Punkte $c\gamma = \frac{1}{e}$. Im übrigen liegt das Gebiet I ganz im Einheitskreis de $c\varrho$-Ebene, das Gebiet III ganz außerhalb. In de Gebieten I und III ist $|c\gamma| < \frac{1}{e}$, in II ist $|c\gamma| > \frac{1}{e}$ Das Gebiet I ist daher die konforme Abbildung de Kreises $|c\gamma| < \frac{1}{e}$. Für $|c\gamma| < \frac{1}{e}$ hat also die Glei chung (7a) genau eine Lösung $c\varrho$, die im Gebiet I liegt und diese wird durch die mit c multiplizierte Umkehr reihe (9) dargestellt; alle anderen Lösungen liegen in Gebiet III, sind also absolut größer.

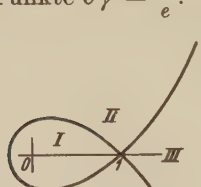


Fig. 1.

Nun kann man außer ϱ selbst auch jede analytische Funktion von nach Potenzen von γ entwickeln, z. B. die Funktion

$$\frac{1}{1-\varrho c}\, e^{\varrho x} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \gamma^n,$$

wo x als Parameter auftritt. Die Koeffizienten β_n ergeben sich aus der allge meinen Bürmannschen Formel oder bequemer durch direkte Ausrechnung

$$2\pi i \beta_n = \int \frac{1}{1-\varrho c}\, e^{\varrho x} \frac{d\gamma}{\gamma^{n+1}} = \int \frac{1}{1-\varrho c}\, e^{\varrho x} \frac{d(\varrho e^{-\varrho c})}{\varrho^{n+1} e^{-(n+1)\varrho c}}$$

$$= \int e^{(x+nc)\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^{n+1}} = 2\pi i \frac{(x+nc)^n}{n!}.$$

Daher erhält man

$$\frac{1}{1-\varrho c}\, e^{\varrho x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+nc)^n}{n!}\, \gamma^n, \tag{11}$$

womit die Reihe (4) berechnet ist. Die Formel (11) gilt im ganzen abgeschlossenen Bereich (10) mit Ausnahme des Wertes $\gamma = \frac{1}{ec}$; für diesen Wert divergiert die Reihe, wie in § 1 festgestellt wurde, und die linke Seite von (11) bekommt einen verschwindenden Nenner.

Nun wenden wir uns allgemeiner der Reihe (1) zu, deren Koeffizienten der Differenzengleichung (5) genügen sollen. Sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\gamma^k + a_1 \gamma^{k-1} + a_2 \gamma^{k-2} + \ldots + a_k = 0,$$

und ist γ_μ eine g_μ-fache Wurzel, so hat das allgemeine Integral der Differenzengleichung (5) bekanntlich die Form

$$A_n = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{g_\mu - 1} C_{\mu\lambda} \binom{n}{\lambda} \gamma_\mu^{n-\lambda}$$

mit willkürlichen Konstanten $C_{\mu\lambda}$. Die betreffende Bruwiersche Reihe ist also eine Linearkombination von k Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{\lambda} \gamma^{n-\lambda}}{n!} (x + nc)^n. \tag{12}$$

Den Wert dieser Reihe können wir aber nach dem Vorigen bereits angeben. Zunächst ist (12) nämlich gleich

$$\frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda}{\partial \gamma^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} (x + nc)^n,$$

also nach dem bereits Bewiesenen gleich

$$\frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda}{\partial \gamma^\lambda} \left(\frac{1}{1 - \varrho c} e^{\varrho x} \right). \tag{13}$$

Dabei ist ϱ als Funktion von γ durch (9) definiert, und umgekehrt γ als Funktion von ϱ durch (7). Aus (7) folgt aber

$$\frac{d\varrho}{d\gamma} = \frac{e^{\varrho c}}{1 - \varrho c},$$

so daß die Differentiation in (13) leicht ausführbar ist. Als Resultat ergibt sich $e^{\varrho x} P(x)$, wo $P(x)$ ein Polynom vom Grade λ ist.

§ 3.

Ganze Funktionen, die sich durch Bruwiersche Reihen darstellen lassen.

Satz 1. *Wenn die ganze Funktion $f(x)$ sich durch eine Bruwiersche Reihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} (x + nc)^n \qquad \text{mit} \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < \frac{1}{e|c|}$$

darstellen läßt, so sind die Koeffizienten A_n eindeutig bestimmt durch die Formel

$$A_n = f^{(n)}(-nc) - c f^{(n+1)}(-nc).$$

Beweis. Durch wiederholte gliedweise Differentiation erhält man

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+\nu}}{n!}(x + nc + \nu c)^n,$$

$$f^{(\nu+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+\nu+1}}{n!}(x + nc + \nu c + c)^n.$$

Daher speziell für $x = -\nu c$:

$$f^{(\nu)}(-\nu c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+\nu}}{n!}(nc)^n,$$

$$c f^{(\nu+1)}(-\nu c) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+\nu+1}}{n!}(nc + c)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n+\nu}}{n!}(nc)^n,$$

und durch Subtraktion

$$f^{(\nu)}(-\nu c) - c f^{(\nu+1)}(-\nu c) = A_\nu.$$

W. z. b. w.

Satz 2. *Wenn die ganze Funktion $f(x)$ sich durch eine Bruwiersche Reihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}(x + nc)^n \qquad \text{mit} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < \frac{1}{e|c|}$$

darstellen läßt, so gibt es positive Zahlen C, ε, δ derart, daß für alle x die Ungleichungen gelten:

$$|f^{(\nu)}(cx)| \leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{\nu} e^{(1-\delta)|x+\nu|} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es jedenfalls positive Zahlen C_1, ε, so daß

$$|A_n| \leqq C_1\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^n$$

ist. Daraus folgt

$$|f^{(\nu)}(cx)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+\nu}}{n!}(cx + nc + \nu c)^n\right|$$

$$\leqq C_1\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^n \frac{(|cx + c\nu| + n|c|)^n}{n!}$$

$$= C_1\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{\nu} \frac{1}{1-\varrho|c|}\, e^{\varrho|cx+c\nu|},$$

wobei ϱ nach § 2 die absolut kleinste Wurzel der Gleichung

$$\varrho = \frac{1-\varepsilon}{e\,|c|}\, e^{\varrho\,|c|}$$

ist. Hiernach ist gewiß $0 < \varrho\,|c| < 1$, also wenn man $\varrho\,|c| = 1 - \delta$ und $C_1\,\delta^{-1} = C$ setzt:

$$|f^{(\nu)}(c\,x)| \leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e\,|c|}\right)^{\nu} e^{(1-\delta)\,|x+\nu|}.$$

W. z. b. w.

Aus Satz 2 folgt insbesondere, wenn man x durch $-\nu x$ ersetzt und das neue x auf das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ beschränkt:

$$|f^{(\nu)}(-\nu c\,x)| \leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e\,|c|}\right)^{\nu} e^{\nu(1-x)} = C\left(\frac{1-\varepsilon}{|c|}\, e^{-x}\right)^{\nu}.$$

Wir zeigen jetzt, daß diese für die Darstellbarkeit durch eine Bruwiersche Reihe als notwendig erkannte Bedingung auch bereits hinreicht, so daß die viel weiter gehende Bedingung von Satz 2 dann von selbst erfüllt ist. Es gilt nämlich der

Satz 3. *Dafür, daß die ganze Funktion*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!}\, x^k$$

durch eine Bruwiersche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}\,(x + nc)^n \qquad \textit{mit} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < \frac{1}{e\,|c|}$$

dargestellt werden kann, ist notwendig und hinreichend die Existenz von zwei positiven Zahlen C und ε derart, daß die Ungleichungen

$$|f^{(\nu)}(-\nu c\,x)| \leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{|c|}\, e^{-x}\right)^{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

für alle x des Intervalles $0 \leqq x \leqq 1$ gelten.

Daß die Bedingung notwendig ist, wurde bereits bewiesen. Um zu zeigen, daß sie auch hinreicht, wollen wir aus ihrem Erfülltsein zunächst eine weitere Ungleichung folgern. Ist $0 \leqq n \leqq \nu$, so ergibt sich aus der Bedingung von Satz 3 für $x = \frac{n}{\nu}$ speziell

$$|f^{(\nu)}(-nc)| \leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{|c|}\right)^{\nu} e^{-n}.$$

Aus der für alle x gültigen Taylorschen Entwicklung

$$f^{(n)}(-nc\,x) = \sum_{\nu=n}^{\infty} f^{(\nu)}(-nc)\,\frac{[-nc\,x-(-nc)]^{\nu-n}}{(\nu-n)!}$$

folgt daher

$$|f^{(n)}(-ncx)| \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} C\left(\frac{1-\varepsilon}{|c|}\right)^{\nu} e^{-n}\frac{|nc(1-x)|^{\nu-n}}{(\nu-n)!}$$
$$= C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{n} e^{(1-\varepsilon)n|1-x|} \leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}e^{|1-x|}\right)^{n}.$$

Ersetzt man hier n durch $n+1$ und x durch $\frac{nx}{n+1}$, so kommt weiter

$$|f^{(n+1)}(-ncx) \leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{n+1} e^{|n+1-nx|}$$
$$\leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{n+1} e^{1+n|1-x|} \leqq \frac{1}{|c|}\,C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{n} e^{n|1-x|}.$$

Zusammen mit der vorigen Ungleichung ergibt das

$$|f^{(n)}(-ncx)| + |cf^{(n+1)}(-ncx)| \leqq 2C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}e^{|1-x|}\right)^{n} \tag{14}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nach diesen Vorbereitungen setzen wir versuchsweise $f(x)$ in der gewünschten Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}(x+nc)^n$$

an und erhalten durch formale Umrechnung nach Potenzen von x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(nc)^{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{A_n}{(n-k)!}(nc)^{n-k}.$$

Für die unbekannten Koeffizienten A_n ergibt sich also das Gleichungssystem

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{A_n}{(n-k)!}(nc)^{n-k} = b_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

und wir haben nur zu zeigen, daß dieses eine Lösung hat, die der Nebenbedingung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|} < \frac{1}{e|c|} \tag{16}$$

genügt; wegen (16) ist dann nämlich die vorgenommene formale Umrechnung erlaubt. Nach Satz 1 kann die Lösung, falls es eine gibt, nur die folgende sein:

$$A_n = f^{(n)}(-nc) - cf^{(n+1)}(-nc) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_{\nu+n} - cb_{\nu+n+1}}{\nu!}(-nc)^{\nu}. \tag{17}$$

Es ist also zu zeigen, daß diese Ausdrücke eine Lösung von (15) mit der Nebenbedingung (16) darstellen. Nun ist zunächst wegen (14)

$$|A_n| = |f^{(n)}(-nc) - cf^{(n+1)}(-nc)| \leqq 2C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{n},$$

so daß gewiß die Nebenbedingung (16) erfüllt ist. Weiter ist zu zeigen, daß durch Einsetzen von (17) in (15) eine richtige Gleichung entsteht, daß also die folgende Formel gilt:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_{\nu+n} - c\, b_{\nu+n+1}}{\nu!} (-nc)^{\nu} \frac{(nc)^{n-k}}{(n-k)!} = b_k$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Formel wäre nun leicht zu verifizieren, wenn die iterierte Reihe auf der linken Seite als Doppelreihe absolut konvergent wäre; das ist aber keineswegs der Fall. Wir betrachten daher statt ihrer die allgemeinere Reihe

$$\Phi_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_{\nu+n} - c\, b_{\nu+n+1}}{\nu!} (-ncx)^{\nu} \frac{(ncx)^{n-k}}{(n-k)!}, \tag{18}$$

welche für $x = 1$ in die vorige übergeht, so daß die zu beweisende Formel lautet:

$$\Phi_k(1) = b_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

In (18) kann man nun die innere Summe auswerten und erhält

$$\Phi_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} [f^{(n)}(-ncx) - c f^{(n+1)}(-ncx)] \frac{(ncx)^{n-k}}{(n-k)!}. \tag{18a}$$

Diese Reihe hat wegen (14) die Majorante

$$\sum_{n=k}^{\infty} 2C \left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|} e^{|1-x|}\right)^n \frac{|ncx|^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= 2C \left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|} e^{|1-x|}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|} e^{|1-x|}\right)^n \frac{|ncx+kcx|^n}{n!}.$$

Nunmehr beschränken wir x auf ein das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ enthaltendes beschränktes Gebiet G, etwa eine schmale Ellipse mit den Brennpunkten 0 und 1. Dann ist der Ausdruck vor der letzten Summe in G beschränkt und die Summe selbst hat die Majorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|} e^{|1-x|}\right)^n \frac{(n+k)^n |cx|^n}{n^n e^{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} [(1-\varepsilon) e^{|1-x|} |x|]^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n.$$

Nun ist aber $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < e^k$ und die eckige Klammer bleibt im Gebiet G, wenn dieses nur als genügend schmale Ellipse mit den Brennpunkten 0 und 1 angenommen wird, unter einer Schranke, die kleiner als 1 ist. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der letzten Reihe und also auch der Reihe (18a) im Gebiet G. Daher ist $\Phi_k(x)$ in G regulär, und nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz darf man, da das Gebiet G den Nullpunkt enthält,

die Reihe (18) in der Umgebung des Nullpunktes nach Potenzen von x umordnen, wodurch sich ergibt:

$$\Phi_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{b_{m+k} - c\, b_{m+k+1}}{(m-n)!} (-1)^{m-n} \frac{(n+k)^m c^m x^m}{n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (b_{m+k} - c\, b_{m+k+1}) \frac{c^m x^m}{m!} \sum_{n=0}^{m} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} (n+k)^m.$$

Nun ist die innere Summe der bekannte Ausdruck für die m-te Differenz der arithmetischen Reihe m-ter Ordnung

$$k^m, \quad (1+k)^m, \quad (2+k)^m, \quad \ldots,$$

also gleich $m!$. Daher ist in der Umgebung des Nullpunktes

$$\Phi_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (b_{m+k} - c\, b_{m+k+1})\, c^m x^m. \tag{19}$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf (14)

$$|b_{m+k}| + |c\, b_{m+k+1}| = |f^{(m+k)}(0)| + |c\, f^{(m+k+1)}(0)| \leqq 2C \left(\frac{1-\varepsilon}{|c|}\right)^{m+k}, \tag{20}$$

so daß die vorige Reihe einen Konvergenzradius größer als 1 hat. Da $\Phi_k(x)$ in G regulär ist, gilt also (19) auch für $x = 1$ und man erhält mit nochmaliger Berücksichtigung von (20):

$$\Phi_k(1) = \sum_{m=0}^{\infty} (b_{m+k} - c\, b_{m+k+1}) c^m = b_k - \lim_{m \to \infty} b_{m+k+1} c^{m+1} = b_k.$$

Das ist aber die zu beweisende Formel, womit Satz 3 bewiesen ist.

Ist $f(x)$ irgendeine ganze Funktion, so sieht man leicht, daß der obere Limes

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|} = q$$

von x unabhängig ist. Bei früherer Gelegenheit habe ich q als die *Stufe* von $f(x)$ bezeichnet[5]). Für endliches von 0 verschiedenes q sind die Funktionen der Stufe q in der Ausdrucksweise von Pringsheim die Funktionen vom Normaltypus q der Ordnung 1, während die Stufe 0 den Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1 und den Funktionen, deren Ordnung kleiner als 1 ist, zukommt[6]).

---

[5]) Vgl. die in Fußnote [4]) zitierte Arbeit.

[6]) A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre II, 2: Eindeutige analytische Funktionen. Leipzig und Berlin 1932, § 86.

Satz 4. *Die Stufe q einer Bruwierschen Reihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} (x+nc)^n \qquad \text{mit} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = \gamma < \frac{1}{e|c|}$$

genügt der Ungleichung $q \leqq \sigma < \frac{1}{|c|}$, wo σ die absolut kleinste Wurzel der Gleichung $\sigma = \gamma e^{\sigma|c|}$ ist.

Beweis. Für beliebig kleines positives ε gibt es eine Konstante C derart, daß

$$|A_n| \leqq C(\gamma+\varepsilon)^n$$

ist. Dann ist aber

$$|f^{(\nu)}(x)| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+\nu}}{n!}(x+nc+\nu c)^n\Big| \leqq C(\gamma+\varepsilon)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma+\varepsilon)^n}{n!}(|x+\nu c|+n|c|)^n,$$

also nach § 2

$$|f^{(\nu)}(0)| \leqq C_1(\gamma+\varepsilon)^{\nu} e^{\varrho\nu|c|},$$

wobei ϱ die absolut kleinste Wurzel der Gleichung

$$\varrho = (\gamma+\varepsilon)e^{\varrho|c|}$$

ist. Daraus folgt sofort der Satz.

Satz 5. *Dann und nur dann ist jede Funktion $f(x)$ der Stufe q durch eine Bruwiersche Reihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}(x+nc)^n \qquad \text{mit} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < \frac{1}{e|c|}$$

darstellbar, wenn q der Ungleichung $qe^{q|c|} < \frac{1}{e|c|}$ genügt.

Beweis. Setzt man

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n,$$

so gibt es zu einem beliebig kleinen positiven ε ein C derart, daß

$$|b_n| = |f^{(n)}(0)| \leqq C(q+\varepsilon)^n;$$

also ist

$$|f^{(\nu)}(-\nu cx)| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+\nu}}{n!}(-\nu cx)^n\Big|$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} C\frac{(q+\varepsilon)^{n+\nu}}{n!}|\nu cx|^n = C(q+\varepsilon)^{\nu} e^{(q+\varepsilon)\nu|cx|}.$$

Für genügend kleines ε ist nun, wenn q der Ungleichung von Satz 5 genügt,

$$q + \varepsilon < \frac{1-\varepsilon}{e|c|} e^{-(q+\varepsilon)|c|} < \frac{1}{e|c|} < \frac{1}{|c|};$$

daher nach vorigem

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(-\nu c x)| &\leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|} e^{-(q+\varepsilon)|c|}\right)^{\nu} e^{(q+\varepsilon)\nu|cx|} \\ &= C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{\nu} e^{(q+\varepsilon)|c|\nu(|x|-1)} \\ &\leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{\nu} e^{(q+\varepsilon)|c|\nu|x-1|} \\ &\leqq C\left(\frac{1-\varepsilon}{e|c|}\right)^{\nu} e^{\nu|x-1|} \end{aligned}$$

Die Bedingung von Satz 3 ist also erfüllt.

Wenn umgekehrt q der Ungleichung von Satz 5 nicht genügt, so ist die Funktion

$$f(x) = e^{-q\frac{|c|}{c}x}$$

ein Gegenbeispiel. Denn die Stufe dieser Funktion ist gleich q und es ist

$$|f^{(\nu)}(-\nu c)| = q^{\nu} e^{q|c|\nu} = (q e^{q|c|})^{\nu} \geqq \left(\frac{1}{e|c|}\right)^{\nu},$$

so daß die Bedingung von Satz 3 für $x = 1$ verletzt ist.

§ 4.

Mehrfache Bruwiersche Reihen.

Unter einer r-fachen Bruwierschen Reihe verstehen wir eine Reihe der Form

$$\sum_{n_1 \dots n_r}^{0,\infty} \frac{A_{n_1 \dots n_r}}{n_1! \dots n_r!} (x + n_1 c_1 + \dots + n_r c_r)^{n_1 + \dots + n_r}, \tag{21}$$

wobei die c_ν nicht alle verschwinden. Insbesondere soll

$$\sum_{n_1 \dots n_r}^{0,\infty} \frac{\gamma_1^{n_1} \dots \gamma_r^{n_r}}{n_1! \dots n_r!} (x + n_1 c_1 + \dots + n_r c_r)^{n_1 + \dots + n_r} \tag{22}$$

eine „spezielle" r-fache Bruwiersche Reihe genannt werden.

Die Reihe (21) ist in der ganzen komplexen x-Ebene absolut konvergent, und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich, wenn

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \left[\sum_{n_1 + \dots + n_r = m} \frac{|A_{n_1 \dots n_r}|}{n_1! \dots n_r!} (n_1|c_1| + \dots + n_r|c_r|)^m \right]^{\frac{1}{m}} < 1. \tag{23}$$

Unter dieser Voraussetzung stellt sie daher eine ganze Funktion von x dar und darf gliedweise differenziert werden. Bei der speziellen Reihe (22) nimmt die Bedingung (23) die Gestalt an:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left[\sum_{n_1+\ldots+n_r=m}\frac{|\gamma_1|^{n_1}\ldots|\gamma_r|^{n_r}}{n_1!\ldots n_r!}(n_1|c_1|+\ldots+n_r|c_r|)^m\right]^{\frac{1}{m}}<1, \tag{24}$$

und der hierdurch charakterisierte Bereich für $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ umfaßt offenbar den übersichtlicheren Bereich

$$|\gamma_1|+|\gamma_2|+\ldots+|\gamma_r|<\frac{1}{ec}, \tag{25}$$

wobei

$$c=\operatorname{Max}(|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_r|). \tag{26}$$

Die spezielle Reihe (22) ist, wie man sofort verifiziert, eine Lösung der Funktionalgleichung

$$y'(x)=\gamma_1 y(x+c_1)+\gamma_2 y(x+c_2)+\ldots+\gamma_r y(x+c_r). \tag{27}$$

Andererseits hat diese Funktionalgleichung auch die Lösung

$$y(x)=e^{\varrho x}, \tag{28}$$

wobei ϱ eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\varrho=\gamma_1 e^{\varrho c_1}+\gamma_2 e^{\varrho c_2}+\ldots+\gamma_r e^{\varrho c_r} \tag{29}$$

ist. Um den Zusammenhang mit der Reihe (22) zu erkennen, bemerken wir, daß unter den unendlich vielen Lösungen ϱ der Gleichung (29) *eine* ist, die sich nach Potenzen von $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ entwickeln läßt. Man findet sie, indem man $\gamma_\nu=\delta_\nu t$ setzt, also statt (29) die Gleichung

$$\varrho=(\delta_1 e^{\varrho c_1}+\delta_2 e^{\varrho c_2}+\ldots+\delta_r e^{\varrho c_r})t \tag{29a}$$

betrachtet und ϱ nach Potenzen von t entwickelt:

$$\varrho=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m t^m. \tag{30}$$

Die Berechnung der Koeffizienten α_m gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
2\pi i\alpha_m &= \int\frac{\varrho}{t^{m+1}}dt=-\frac{1}{m}\int\varrho\, d(t^{-m})\\
&=\frac{1}{m}\int t^{-m}d\varrho=\frac{1}{m}\int(\delta_1 e^{\varrho c_1}+\ldots+\delta_r e^{\varrho c_r})^m\frac{d\varrho}{\varrho^m}\\
&=\frac{1}{m}\sum_{n_1+\ldots+n_r=m}\int\frac{m!}{n_1!\ldots n_r!}\delta_1^{n_1}\ldots\delta_r^{n_r}e^{(n_1c_1+\ldots+n_rc_r)\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^m}\\
&=2\pi i\sum_{n_1+\ldots+n_r=m}\frac{\delta_1^{n_1}\ldots\delta_r^{n_r}}{n_1!\ldots n_r!}(n_1c_1+\ldots+n_rc_r)^{m-1}.
\end{aligned}$$

Setzt man das in (30) ein und schreibt dann wieder γ_ν statt $\delta_\nu t$, so erhält man als Lösung von (29)

$$(31) \qquad \varrho = \sum_{n_1 \dots n_r}^{0,\infty\,\prime} \frac{\gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_r^{n_r}}{n_1! \dots n_r!} (n_1 c_1 + \dots + n_r c_r)^{n_1 + \dots + n_r - 1},$$

wo der Akzent am Summenzeichen andeuten soll, daß das Wertesystem $n_1 = \dots = n_r = 0$ auszulassen ist. Die Reihe (31) ist absolut konvergent im Bereich (24) und daher erst recht im Teilbereich (25).

Nun kann man außer ϱ selbst auch jede analytische Funktion von ϱ nach Potenzen von $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ entwickeln; oder zunächst, wenn wieder $\gamma_\nu = \delta_\nu t$ gesetzt wird, nach Potenzen von t. Speziell für die Funktion

$$(32) \qquad \frac{e^{\varrho x}}{1 - (c_1 \delta_1 e^{\varrho c_1} + \dots + c_r \delta_r e^{\varrho c_r}) t} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m t^m$$

berechnen sich die Koeffizienten β_m aus der Formel

$$2\pi i \beta_m = \int \frac{e^{\varrho x}}{1 - (c_1 \delta_1 e^{\varrho c_1} + \dots + c_r \delta_r e^{\varrho c_r}) t} \frac{dt}{t^{m+1}}.$$

Da nach (29a)

$$[1 - (c_1 \delta_1 e^{\varrho c_1} + \dots + c_r \delta_r e^{\varrho c_r}) t]\, d\varrho = (\delta_1 e^{\varrho c_1} + \dots + \delta_r e^{\varrho c_r})\, dt$$

ist, geht diese Formel über in

$$\begin{aligned} 2\pi i \beta_m &= \int e^{\varrho x} (\delta_1 e^{\varrho c_1} + \dots + \delta_r e^{\varrho c_r})^m \frac{d\varrho}{\varrho^{m+1}} \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_r = m} \int \frac{m!}{n_1! \dots n_r!} \delta_1^{n_1} \dots \delta_r^{n_r} e^{(x + n_1 c_1 + \dots + n_r c_r)\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^{m+1}} \\ &= 2\pi i \sum_{n_1 + \dots + n_r = m} \frac{\delta_1^{n_1} \dots \delta_r^{n_r}}{n_1! \dots n_r!} (x + n_1 c_1 + \dots + n_r c_r)^m. \end{aligned}$$

Setzt man das in (32) ein und setzt dann wieder γ_ν statt $\delta_\nu t$, so kommt:

$$(33) \qquad \frac{e^{\varrho x}}{1 - (c_1 \gamma_1 e^{\varrho c_1} + \dots + c_r \gamma_r e^{\varrho c_r})} = \sum_{n_1 \dots n_r}^{0,\infty} \frac{\gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_r^{n_r}}{n_1! \dots n_r!} (x + n_1 c_1 + \dots + n_r c_r)^{n_1 + \dots + n_r},$$

also gerade die Reihe (22), deren Wert damit berechnet ist.

Nun soll noch gezeigt werden, daß eine mehrfache Bruwiersche Reihe sehr wohl identisch in x verschwinden kann, ohne daß alle Koeffizienten verschwinden. Ist m irgendeine positive ganze Zahl, so ist die Anzahl derjenigen Glieder einer r-fachen Bruwierschen Reihe, die Polynome von einem

Grad $\leqq m$ sind, gleich $\binom{r+m}{m}$, also $> m+1$. Man kann also die Summe dieser Glieder zum identischen Verschwinden bringen, ohne daß alle Koeffizienten verschwinden. Wählt man dann die Koeffizienten, deren Indexsumme $> m$ ist, alle gleich Null, so hat man eine identisch verschwindende Bruwiersche Reihe, deren Koeffizienten nicht alle verschwinden.

Aber auch auf weniger triviale Art lassen sich solche Reihen herstellen. Wenn man in Formel (33) die Koeffizienten $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ so variiert, daß die durch (31) definierte Größe ϱ unverändert bleibt, was nach (29) möglich ist, so unterscheidet sich der Wert der variierten Reihe von dem der Reihe (33), wie die linke Seite in (33) lehrt, nur um einen konstanten Faktor. Dividiert man sie durch diesen Faktor und zieht sie dann von der Reihe (33) ab, so entsteht wieder eine identisch verschwindende Bruwiersche Reihe, deren Koeffizienten nicht alle verschwinden.

Eine dritte Art zur Gewinnung solcher Reihen ist folgende. Wählt man die Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ innerhalb des Konvergenzbereiches (24) oder spezieller (25) so, daß ihre Summe verschwindet, so hat die Gleichung (29) augenscheinlich die Lösung $\varrho = 0$, und diese ist es, die durch die Reihe (31) dargestellt wird[7]). Aus (33) folgt daher speziell[7])

$$(34)\qquad \sum_{n_1 \ldots n_r}^{0,\infty} \frac{\gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_r^{n_r}}{n_1! \ldots n_r!} (x + n_1 c_1 + \ldots + n_r c_r)^{n_1 + \cdots + n_r} = \frac{1}{1 - (c_1\gamma_1 + \ldots + c_r\gamma_r)}$$

$$\text{für } \gamma_1 + \ldots + \gamma_r = 0.$$

Bringt man in dieser Formel die rechte Seite nach links und vereinigt sie mit dem konstanten Glied 1, so erhält man abermals eine identisch verschwindende Bruwiersche Reihe mit nicht verschwindenden Koeffizienten.

---

[7]) Im Falle $\gamma_1 + \ldots + \gamma_r = 0$ versagt allerdings unser Beweis der Formeln (31) und (33), weil er bei der Transformation der Randintegrale die durch (29a) vermittelte konforme Abbildung der t-Ebene auf die ϱ-Ebene benutzt, und eine solche Abbildung liegt nur im Falle $\delta_1 + \ldots + \delta_r \neq 0$, also $\gamma_1 + \ldots + \gamma_r \neq 0$ vor. Nachträglich ergibt sich aber die Gültigkeit der Formeln (31) und (33) auch für $\gamma_1 + \ldots + \gamma_r = 0$ ohne weiteres aus Stetigkeitsgründen.

(Eingegangen am 8. Dezember 1938.)

On the expansion of a function in a series of Legendre functions of the second kind.

By

D. P. Banerjee, Mymensingh (India).

Nicholson[1]) published a paper which contained the relation

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(t)\, Q_n(t)\, dt = 0,$$

where $Q_m(t)$ is the Legendre function of the second kind, m and n positive integers. But G. Prasad[2]) and N. G. Shabde[3]) proved that this result is incorrect. Hence the ordinary method of expansion of functions into a series with Legendre functions of the second kind fails owing to the non orthogonality of $Q_m(t)$. The object of this note is to give a method of expanding functions in such series. These functions are frequently used in hydrodynamical and electrostatical problems.

The Legendre differential equation is

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + m(m+1)\,y = 0.$$

The second solution of this differential equation is for $|t| > 1$

$$y = Q_m(t) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(m+1)}{2^{m+1}\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)t^{m+1}} F\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m}{2}+1, m+\frac{3}{2}, \frac{1}{t^2}\right).$$

$Q_m(t)$ vanishes at $t = \infty$. The integral expression[4]) for $Q_m(t)$ is

$$Q_m(t) = \int_0^{t-(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} h^m (1 - 2ht + t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Let $\varphi(h)$ be an integral function and

$$\int_0^{t-(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} \varphi(h)\,(1 - 2ht + h^2)^{-\frac{1}{2}}\, dh = f(t).$$

---

[1]) J. W. Nicholson, Zonal Harmonies of the 2 nd kind. Phil. Mag. (6) **43** (1922), S. 1—29.

[2]) G. Prasad, Proc. Benares **12** (1930), S. 33—42.

[3]) N. G. Shabde, On the value of $\int_{-1}^{1} Q_m(\mu)\, Q_n(\mu)\, d\mu$. Proc. Benares. Math. Soc. **13** (1931), S. 36.

[4]) G. Prasad, Spherical Harmonics **2** (1932), S. 36.

Let

$$h_1 = \frac{2h}{1+h^2}, \quad \text{then } dh_1 = \frac{2(1-h^2)}{(1+h^2)^2}\,dh$$

and therefore

$$\int_0^{1/t} (1+h^2)^2\, 2^{-1}(1-h^2)^{-1}\,\varphi(h)\,(2h)^{-\frac{1}{2}}\,h_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}-h_1\right)^{-\frac{1}{2}}dh_1 = t^{\frac{1}{2}} f(t).$$

Let

$$t_1 = t^{-1} \text{ and } \frac{(1+h^2)^2}{2(1-h^2)}\,\frac{\varphi(h)}{(2h)^{\frac{1}{2}}}\,(h_1)^{\frac{1}{2}} = u(h_1).$$

Then

$$t_1^{-\frac{1}{2}} f(t_1^{-1}) = \int_0^{t_1} u(h_1)\,(t_1-h_1)^{-\frac{1}{2}}\,dh_1, \quad |t_1| < 1.$$

We know [5]) that the Abel integral equation is

$$\int_a^x u(\xi)\,(x-\xi)^{-\mu}\,d\xi = f(x).$$

If $f(a) = 0$, $f'(x)$ continuous and $0 < \mu < 1$ $a \leqq x \leqq b$, then the solution of this integral equation is

$$u(t) = \frac{\operatorname{Sin}\mu\pi}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t f(x)\,(t-x)^{\mu-1}\,dx.$$

Hence if

$$\lim_{t_1 \to 0} f(t_1^{-1})\,t_1^{-\frac{1}{2}} = 0$$

or if

$$\lim_{t \to \infty} f(t)\,t^{\frac{1}{2}} = 0$$

and if $\frac{\partial}{\partial t_1} f(t_1^{-1})\,t_1^{-\frac{1}{2}}$ continuous, then

$$u(h_1) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial h_1}\int_0^{h_1} t_1^{-\frac{1}{2}} f(t_1^{-1})\,(h_1-t_1)^{-\frac{1}{2}}\,dt_1,$$

$$\varphi(h) = \frac{(1+h^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial h}\int_0^{\frac{2h}{1+h^2}} f(t_1^{-1})\,t_1^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2h}{1+h^2}-t_1\right)^{-\frac{1}{2}}dt_1.$$

Therefore we have

$$\sum_0^\infty \frac{\varphi^n(0)}{n!}\int_0^{t-(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} h^n\,(1-2ht+h^2)^{-\frac{1}{2}}\,dh = \sum_0^\infty \frac{\varphi^n(0)}{n!}\,Q_n(t) = f(t).$$

---

[5]) Whittaker and Watson, Modern Analysis, 3. Edition. Cambridge 1920, S. 220.

The expansion will be convergent if

(1) $\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}} f(t) = 0$, differential coefficients of $f(t_1^{-1})\, t_1^{-\frac{1}{2}}$ is continuous

and

(2) $f(t)$ such that $\varphi(h)$ can be expanded in convergent power series.

Example. $f(t) = t^{-1}$

$$\varphi(h) = \frac{(1+h^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \frac{\partial}{\partial h} \int_0^{\frac{2h}{1+h^2}} t_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2h}{1+h^2} - t_1\right)^{-\frac{1}{2}} dt_1$$

$$= \frac{2(1+h^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \frac{\partial}{\partial h} \frac{2h}{1+h^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}^2\theta\, d\theta = (1-h^2)(1+h^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 1 - \tfrac{5}{2}h^2 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{9}{4}h^4 - \ldots,$$

h being less than 1.

Therefore we have

$$t^{-1} = Q_0(t) - \frac{5}{2}Q_2(t) + \frac{3\cdot 9}{2\cdot 4}Q_4(t) - \ldots$$

The associated Legendre function of the second kind is defined as

$$Q_n^m(t) = (t^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} Q_n(t)$$

$$= \frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(n+m+1)\sqrt{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{(t^2-1)^{\frac{m}{2}}}{t^{n+m+1}} F\left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n+\frac{3}{2}, \frac{1}{t^2}\right)$$

$$= (t^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^{t-(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} h^n (1-2ht+h^2)^{-\frac{1}{2}} dh.$$

Let

$$F(t) = (t^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} f(t)$$

$$= (t^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^{t-(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} \varphi(h)(1-2ht+h^2)^{-\frac{1}{2}} dh,$$

$$f(t) = \int_0^t dt \int_0^t dt \ldots \int_0^t F(t)\,(t^2-1)^{-\frac{m}{2}}\, dt.$$

And also

$$f(t) = \int_0^{t-(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} \varphi(h)(1-2ht+h^2)^{-\frac{1}{2}} dh.$$

As before

$$\varphi(h) = \frac{(1+h^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \frac{\partial}{\partial h} \int_0^{\frac{2h}{1+h^2}} f(t_1^{-1})\, t_1^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2h}{1+h^2} - t_1\right)^{-\frac{1}{2}} dt_1 .$$

Example. Let $F(t) = (-1)^m L^m (t^2-1)^{\frac{m}{2}} t^{-(m+1)}$, then $f(t) = t^{-1}$,

$$F(t) = (t^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} [Q_0(t) - \tfrac{5}{2} Q_2(t) + \ldots] = Q_0^m(t) - \tfrac{5}{2} Q_2^m(t) + \ldots$$

The test of convergency is the same as before.

(Eingegangen am 6. März 1938.)

Zur Approximation analytischer Funktionen durch Polynome.

Von

Paul Heuser in Darmstadt.

Nach dem Rungeschen Approximationssatz läßt sich jede in einem endlichen, schlichten, einfachzusammenhängenden Gebiet G der komplexen z-Ebene reguläre, analytische Funktion $F(z)$ nach Polynomen in eine Reihe entwickeln, die in jedem echten Teilbereich von G gleichmäßig konvergiert. Ist der Rand C von G eine Jordan-Kurve, und ist $F(z)$ auf C noch stetig, so kann die Polynomreihe so gewählt werden, daß sie im abgeschlossenen Gebiet $(G + C)$ gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergiert[1]). Setzt man den Rand C überdies noch als konvexe Kurve voraus, so kann man, wie im folgenden gezeigt werden soll, den Approximationspolynomen stets die Form

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\alpha^\nu} p_\nu(z)$$

geben. Hierin ist $p_\nu(z)$ ein Polynom ν-ten Grades in z, das nur von C abhängt, während die Zahlen a_ν für die darzustellende Funktion $F(z)$ charakteristisch sind. Der Beweis hierfür ergibt sich daraus, daß der Funktion $F(z)$ eindeutig eine Faber-Reihe[2]) zugeordnet werden kann, die gleichmäßig für alle z in $\overline{J(C)}$[3]) zur Summe $F(z)$ A-summierbar ist.

---

[1]) J. L. Walsh, Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen, Math. Annalen **96** (1926), S. 430—436; Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Am. Math. Soc. New York 1935, S. 36.

[2]) G. Faber, Über polynomische Entwicklungen, Math. Annalen **57** (1903), S. 389—408; Über Tschebyscheffsche Polynome, Crelles Journal **150** (1919), S. 79—106. Im folgenden schließen wir uns der von Faber in der zuletzt zitierten Arbeit gewählten Normierung der Polynome $p_\nu(z)$ an.

[3]) In der Folge bezeichnen wir das offene Innengebiet von C mit $J(C)$, das offene Außengebiet mit $A(C)$, die durch Hinzunahme von C abgeschlossenen Gebiete sind $\overline{J(C)}$ und $\overline{A(C)}$.

§ 1.

Eine Limesdarstellung für $F(z)$.

Es sei C eine geschlossene, konvexe Kurve der komplexen z-Ebene. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $z = 0$ in $J(C)$ liegt. Die Funktion

$$z = \chi(t) = t + b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \dots \tag{1}$$

bilde das Gebiet $A(C)$ der z-Ebene konform auf das Gebiet $|t| > r_0$ der t-Ebene ab. Die Zahlen $b_0, b_1, \dots$ und r_0 sind hierdurch eindeutig bestimmt. Den Kreisen $|t| = r$, $(r > r_0)$, der t-Ebene entsprechen in der z-Ebene geschlossene, durchweg reguläre, analytische Kurven, die *Kreisbilder* der Abbildung (1). Jede dieser Kurven enthält die Punkte von $\overline{J(C)}$ in ihrem Inneren.

$F(z)$ sei eine in $J(C)$ reguläre und in $\overline{J(C)}$ noch stetige, analytische Funktion.

Wir wählen nunmehr aus den Kreisbildern der Abbildung (1) eine Folge

$$\{C_n\}, \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

aus, die sich gegen C häuft, d. h. für die Radien r_n der ihnen vermöge (1) entsprechenden Kreise K_n der t-Ebene gelte

$$\lim_{n \to \infty} r_n = r_0. \tag{2}$$

Die Funktion

$$z = \varphi_n(\mathfrak{z}) \tag{3}$$

bilde das Gebiet $A(C_n)$ der $\mathfrak{z}$-Ebene konform auf das Gebiet $A(C)$ der z-Ebene ab, so daß die Punkte $z = \infty$ und $\mathfrak{z} = \infty$ sich entsprechen und $\varphi_n'(\infty) > 0$ ist. Bilden wir

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(\varphi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z}\ ^4), \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{4}$$

so sind alle diese Funktionen $F_n(z)$ in $\overline{J(C)}$ regulär. Wir wollen zeigen, daß sie daselbst gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergieren.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $F(z)$ ein Polynom ist. Bedeutet C_0 eine alle Kurven C_n einschließende, geschlossene, rektifizierbare Kurve der z-Ebene, so dürfen, da jetzt die Funktionen $F(\varphi_n(\mathfrak{z}))$ abgesehen vom Punkt $\mathfrak{z} = \infty$ in $A(C_n)$, also auch in $\overline{A(C_0)}$, regulär sind, die Integrale (4) für alle n über C_0 erstreckt werden. Auf C_0 konvergiert aber die Folge der Abbildungsfunktionen $\varphi_n(\mathfrak{z})$ gleichmäßig gegen $\mathfrak{z}$, woraus die Behauptung folgt.

---

[4]) Integrationen über eine geschlossene Kurve sind stets im positiven Sinne gemeint.

Nach einem Satz von J. L. Walsh[5]) kann man nunmehr eine Folge von Polynomen

$$P_m(z), \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

finden, so daß für alle z von $\overline{J(C)}$

$$|F(z) - P_m(z)| < \varepsilon_m \tag{5}$$

ist, wobei $\{\varepsilon_m\}$ eine Nullfolge positiver Zahlen ist. Da nun nach unserer obigen Überlegung die Polynome

$$P_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{P_m(\varphi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z} \tag{6}$$

bei unbegrenzt wachsendem n in $\overline{J(C)}$ gleichmäßig gegen $P_m(z)$ konvergieren, kann man einen Index n_m bestimmen, so daß für $n \geqq n_m$

$$\left| P_m(z) - P_m^{(n_m)}(z) \right| \leqq \varepsilon_m \tag{7}$$

ist für alle z von $\overline{J(C)}$. Die Folge

$$P_m^{(n_m)}(z), \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

konvergiert also wegen (5) ebenfalls gleichmäßig gegen $F(z)$. Bilden wir nun die Differenz

$$F_{n_m}(z) - P_m^{(n_m)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{n_m}} \frac{F(\varphi_{n_m}(\mathfrak{z})) - P_m(\varphi_{n_m}(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z}, \tag{8}$$

so ist wegen (5) für alle z von $\overline{J(C)}$ und für alle m

$$|F_{n_m}(z) - P_m^{(n_m)}(z)| \leqq \frac{L \cdot \varepsilon_m}{\delta_{n_m}}, \tag{9}$$

wenn man mit L eine, wegen der vorausgesetzten Konvexität von C für alle Indizes n_m angebbare, endliche Schranke für die Länge der Integrationskurve bezeichnet, und δ_{n_m} den Abstand der Kurven C und C_{n_m} bedeutet, das ist das Minimum der Entfernung zweier ihrer Punkte. Es kann nun sein, daß bei unbegrenzt wachsendem m die rechte Seite von (9) gegen Null konvergiert, wenn nämlich der Zähler stärker gegen Null strebt als der Nenner. In diesem Falle ist unsere Behauptung schon bewiesen. Einmal liefert nämlich (9) und die bereits erwiesene Konvergenz der Folge $P_m^{(n_m)}(z)$, daß die Teilfolge $F_{n_m}(z)$ der Folge $F_n(z)$ für alle z von $\overline{J(C)}$ gleichmäßig gegen $F(z)$ geht. Andererseits ergibt sich aus der Willkür bei der Wahl der C_n, daß sich die Auswahl der Teilfolge erübrigte. Im anderen Falle sei $C_{n_m}^*$ eine zu C_{n_m} ähnliche Kurve, die aus C_{n_m} durch eine Streckung vom Nullpunkt aus hervor-

---

[5]) Siehe Fußnote [1]).

geht. Bezeichnen wir mit $\delta^*_{n_m}$ den Abstand der Kurve $C^*_{n_m}$ von C, so können wir die Streckung so einrichten, daß nicht nur

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\varepsilon_m}{\delta^*_{n_m}} = 0 \tag{10}$$

ist, sondern auch

$$\lim_{m \to \infty} \delta^*_{n_m} = 0 \tag{10a}$$

wird. Bezeichnet man den Faktor einer solchen Streckung mit α_{nm}, so wird

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_{n_m} = 1 \tag{10b}$$

sein. Beachtet man nun, daß

$$z = \varphi_{n_m}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\alpha_{n_m}}\right)$$

die Abbildung des Gebietes $A\,(C^*_{n_m})$ der $\mathfrak{z}$-Ebene auf das Gebiet $A\,(C)$ der z-Ebene leistet, so wird

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^*_{n_m}} \frac{F\left(\varphi_{n_m}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\alpha_{n_m}}\right)\right)}{\mathfrak{z} - z}\, d\mathfrak{z} = F_{n_m}\left(\frac{z}{\alpha_{n_m}}\right), \tag{11}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^*_{n_m}} \frac{P_m\left(\varphi_{n_m}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\alpha_{n_m}}\right)\right)}{\mathfrak{z} - z}\, d\mathfrak{z} = P_m^{(n_m)}\left(\frac{z}{\alpha_{n_m}}\right)\ ^{6}). \tag{11a}$$

Wegen der Konvexität von C gilt für alle m

$$\overline{J\,(C)} < J\,(C^*_{n_m}),$$

und wegen (5) ist nunmehr für alle z auf C

$$\left| F_{n_m}\left(\frac{z}{\alpha_{n_m}}\right) - P_m^{(n_m)}\left(\frac{z}{\alpha_{n_m}}\right)\right| \leqq \frac{L_1 \cdot \varepsilon_m}{\delta^*_{n_m}}, \tag{12}$$

wo L_1 eine analoge Bedeutung hat wie oben die Konstante L. Aus der bekannten Konvergenz der Folge $P_m^{(n_m)}(z)$ und aus (10) ergibt sich jetzt unsere Behauptung, wenn man noch beachtet, daß gleichmäßige Konvergenz in

---

[6]) Die Richtigkeit von (11) und (11a) sieht man ohne Rechnung ein, wenn man beachtet, daß die durch die Abbildung des Außengebietes $A\,(C)$ auf ein anderes Außengebiet $A\,(C^*)$ und die darauffolgende Integration vermittelte Übertragung der Funktion $F\,(z)$ von $J\,(C)$ auf $J\,(C^*)$ *transitiv* ist, d. h. Übertragung von $F\,(z)$ auf $J\,(C^*)$ und darauffolgende Übertragung des Ergebnisses etwa auf $J\,(C^{**})$ führt zum selben Ziel wie direkte Übertragung der Funktion $F\,(z)$ von $J\,(C)$ auf $J\,(C^{**})$.

einem abgeschlossenen Gebiet zugleich stetige Konvergenz[7]) bedeutet und umgekehrt. Zusammengefaßt lautet unser Ergebnis:

Ist C eine geschlossene, konvexe Kurve der z-Ebene, $\{C_n\}$ eine beliebige, gegen C konvergente Folge von Kreisbildern des Gebietes $A(C)$ zum Aufpunkt ∞, und ist $z = \varphi_n(\mathfrak{z})$ diejenige Funktion, die das Gebiet $A(C_n)$ der $\mathfrak{z}$-Ebene konform auf das Gebiet $A(C)$ der z-Ebene abbildet, so gilt für jede in $J(C)$ reguläre und in $\overline{J(C)}$ stetige, analytische Funktion $F(z)$ die Darstellung

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} F_n(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(\varphi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z} \tag{13}$$

gleichmäßig für alle z in $\overline{J(C)}$.

§ 2.

Die zu $F(z)$ gehörige Faber-Reihe.

Die in $J(C_1)$ reguläre Funktion $F_1(z)$ gestattet, da C_1 eine durchweg reguläre, analytische Kurve ist, eine in jedem echten Teilbereich von $J(C_1)$, speziell also in $\overline{J(C)}$ gleichmäßig konvergente Entwicklung nach den zu C_1 gehörigen Faberschen Polynomen. Wie aus deren Definition hervorgeht, gehört zu C sowie zu allen C_n *dasselbe* Polynomsystem, das wir mit $p_\nu(z)$, $(\nu = 0, 1, \ldots)$, bezeichnen. Es sei

$$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu p_\nu(z). \tag{14}$$

Die Funktion $F_n(z)$, die aus $F(z)$ hervorging, kann man in einfacher Weise auch aus $F_1(z)$ erhalten. Bedeutet $z = \psi_n(\mathfrak{z})$ die wie oben normierte Abbildungsfunktion des Gebietes $A(C_n)$ der $\mathfrak{z}$-Ebene auf das Gebiet $A(C_1)$ der z-Ebene, so ist nämlich, wie wir jetzt zeigen wollen

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F_1(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z}. \tag{15}$$

Wir beweisen zunächst die analoge Formel für das Polynom $P_m(z)$.

Die auf C_n stetige Funktion $P_m(\varphi_n(\mathfrak{z}))$ gestattet nach dem Satz von Laurent eine Zerlegung in zwei Bestandteile, von denen der eine, das Polynom $P_m^{(n)}(\mathfrak{z})$ in $\overline{J(C_n)}$ regulär ist, weswegen der andere, er heiße $Q_m^{(n)}(\mathfrak{z})$, nicht

[7]) Eine in dem Gebiet G definierte Folge von Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots$ heißt in G *stetig konvergent* gegen eine Funktion $f(z)$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist z ein beliebiger Punkt von G und $z_1, z_2, \ldots$ irgendeine Folge von Punkten, die gleichfalls zu G gehören und überdies gegen z konvergieren, so konvergiert $f_n(z_n)$ gegen $f(z)$, unabhängig von der speziellen Wahl der Punkte z_n.

nur in $A(C_n)$ regulär, sondern auf C_n selbst noch stetig ist. Mithin gilt für alle $\mathfrak{z}$ auf C_n

$$P_m(\varphi_n(\mathfrak{z})) = P_m^{(n)}(\mathfrak{z}) + Q_m^{(n)}(\mathfrak{z}), \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Da die Funktionen

$$z = \varphi_n(\mathfrak{z}),$$
$$z = \varphi_1(\psi_n(\mathfrak{z}))$$

beide das Gebiet $A(C_n)$ der $\mathfrak{z}$-Ebene in derselben Weise auf das Gebiet $A(C)$ der z-Ebene abbilden, sind sie miteinander identisch und es ist für $\mathfrak{z}$ in $\overline{A(C_n)}$ unter Berücksichtigung von (16)

$$P_m(\varphi_n(\mathfrak{z})) \equiv P_m(\varphi_1(\psi_n(\mathfrak{z}))) = P_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z})) + Q_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z})). \tag{17}$$

Daraus folgt aber

$$\left\{\begin{aligned} P_m^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{P_m(\varphi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{P_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{Q_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Da auf C_n die Werte $Q_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z}))$ Randwerte einer in $A(C_n)$ regulären Funktion sind, hat das zweite Integral in (18) den Wert Null, sobald z in $J(C_n)$ liegt. Es ist also tatsächlich, wie wir beweisen wollten,

$$P_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{P_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}. \tag{19}$$

Nunmehr kann man leicht das Bestehen der analogen Formel für $F(z)$ beweisen. Wegen (5) ist für ein festes n

$$\lim_{m\to\infty} P_m^{(n)}(z) = F_n(z) \tag{20}$$

gleichmäßig zu jedem echten Teilbereich von $J(C_n)$. Also folgt aus (19)

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{m\to\infty}\int_{C_n} \frac{P_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}. \tag{21}$$

Wegen der Regularität von $P_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z}))$ auf C_n darf die Integration auch über eine ganz in $J(C_n)$, jedoch genügend nahe bei C_n verlaufende Kurve C_n' erstreckt werden. Da die $P_m^{(1)}(\mathfrak{z})$ Polynome sind, kann man für alle Indizes m dasselbe C_n' wählen. Auf C_n' gilt wegen (20), wenn man hierin $n = 1$ wählt:

$$\lim_{m\to\infty} P_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z})) = F_1(\psi_n(\mathfrak{z})). \tag{22}$$

Neben (21) existiert also auch

$$(23)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n'} \frac{\lim\limits_{m\to\infty} P_m^{(1)}(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n'} \frac{F_1(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z},$$

und folglich ist, wenn man wieder zur Integrationskurve C_n übergeht:

$$(24)\qquad F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{F_1(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}.$$

Hieraus und aus (14) ergibt sich nun leicht die Faber-Reihe von $F_n(z)$. Es ist

$$(25)\qquad F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n'} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu p_\nu(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}.$$

Da die im Integranden auftretende Reihe auf C_n' gleichmäßig konvergiert, darf man gliedweise integrieren:

$$(26)\qquad F_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n'} \frac{p_\nu(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{p_\nu(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}.$$

Das rechtsstehende Integral läßt sich auswerten, wenn man von einer Transformationseigenschaft der Faberschen Polynome[8]) Gebrauch macht. Hiernach wird

$$(27)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{p_\nu(\psi_n(\mathfrak{z}))}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z} = \beta_n^\nu p_\nu(z).$$

Dabei ist die Konstante β_n gleich dem Radienverhältnis $\frac{r_1}{r_n}$ der Kreise K_1 und K_n, in die C_1 und C_n vermöge (1) übergehen. Setzt man nun noch

$$(28)\qquad \begin{cases} c_\nu\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^\nu = a_\nu, & (\nu = 0, 1, \ldots), \\ \frac{r_0}{r_n} = \frac{1}{\alpha_n}, & (\alpha_n > 1), \end{cases}$$

so wird $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, und die Faber-Reihe der Funktion $F_n(z)$ erhält die Form

$$(29)\qquad F_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\alpha_n^\nu} p_\nu(z).$$

---

[8]) Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen, Math. Zeitschr. **38** (1934), S. 777—782, bes. Formel (10) und (10a).

Nunmehr folgt aus (13) und (29)

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\alpha_n^\nu} p_\nu(z).$$

Wegen der Willkür in der Wahl der gegen C konvergierenden Folge $\{C_n\}$ können wir auch so schreiben

$$F(z) = \lim_{\alpha\to 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\alpha^\nu} p_\nu(z), \qquad (\alpha > 1). \tag{30}$$

§ 3.

Eindeutigkeit.

Zum Schluß wollen wir noch nachweisen, daß die Entwicklung (30) nur auf eine Weise möglich ist. Gäbe es neben (30) noch eine zweite, derartige Darstellung der Funktion $F(z)$, etwa

$$F(z) = \lim_{\alpha\to 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{\alpha^\nu} p_\nu(z),$$

so konvergierten die Funktionen

$$H_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu - b_\nu}{\alpha_n^\nu} p_\nu(z), \tag{31}$$

die als Summen konvergenter Faber-Reihen in $\overline{J(C)}$ regulär sind, daselbst gleichmäßig gegen Null. Nach Vorgabe von ε können wir also einen Index $N(\varepsilon)$ bestimmen, so daß für alle z auf C und $n \geqq N(\varepsilon)$

$$|H_n(z)| \leqq \varepsilon \tag{32}$$

wird.

Bildet die Funktion

$$z = \psi(\tau) = \frac{1}{\tau} + c_0 + c_1\tau + \dots \tag{33}$$

das Gebiet $\overline{A(C)}$ der z-Ebene auf das Gebiet $|\tau| \leqq \varrho = \frac{1}{r_0}$ ab, so ist nach der Faberschen Darstellung der Koeffizienten:

$$\frac{a_\nu - b_\nu}{\alpha_n^\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\varrho} H_n(\psi(\tau))\, \tau^{\nu-1}\, d\tau, \tag{34}$$

also wegen (32)

$$|a_\nu - b_\nu| \leqq \varepsilon\, \alpha_n^\nu\, \varrho^\nu.$$

Weil nun für unbegrenzt wachsendes n die Zahlen α_n gegen 1 gehen, die linke Seite aber gar nicht von n abhängt, ist auch

$$|a_\nu - b_\nu| \leqq \varepsilon\, \varrho^\nu,$$

woraus, da ε beliebig klein gewählt werden konnte,

$$a_\nu = b_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

folgt. Das Gesamtergebnis können wir so formulieren:

Ist C eine geschlossene, konvexe Kurve der z-Ebene, und ist

$$p_\nu(z), \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

die Folge der zu C gehörigen Faberschen Polynome, so kann man jeder in $J(C)$ regulären und auf C noch stetigen, analytischen Funktion $F(z)$ in eindeutiger Weise eine Faber-Reihe

$$F(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\nu(z), \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leqq \frac{1}{r_0},$$

zuordnen, die gleichmäßig für alle z in $\overline{J(C)}$ zur Summe $F(z)$ A-summierbar ist.

Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\nu(z)$ mit der Faber-Reihe der Funktion $F(z)$ identisch ist, falls eine solche existiert.

(Eingegangen am 24. August 1938.)

Über ein Existenzproblem der Hydrodynamik.

Von

Karl Maruhn in Berlin.

Einleitung.

Vor einiger Zeit gelang es Lichtenstein[1]), unter Vorgabe der Geschwindigkeitsverteilung zu einem bestimmten Zeitpunkte, die Existenz und die Eindeutigkeit von Bewegungen in einer allseitig unbegrenzten, reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit nachzuweisen. Es handelt sich dabei durchweg um die Existenz „im kleinen", d. h. während eines gewissen hinreichend kleinen Zeitintervalls. Entsprechend allgemeine, „im großen" geltende Sätze sind bis jetzt nur für ebene Bewegungen bekannt[2]), während sich die Existenz von dreidimensionalen Bewegungen lediglich in einzelnen Spezialfällen nachweisen ließ. Ein Beispiel hierfür bietet ein ebenfalls von Lichtenstein[3]) herrührender Satz, der im wesentlichen das Folgende besagt:

Es existiere in einem nicht notwendig kleinen Zeitintervall $t_0 \leqq t \leqq t$ eine bestimmte, von geschlossenen Wirbelröhren hervorgerufene Bewegung in einer allseitig unbegrenzten ideellen, inkompressiblen, homogenen Flüssigkeit. Wird jetzt die zur Zeit t_0 bestehende Wirbelverteilung (die ja das Geschwindigkeitsfeld und damit die ganze Flüssigkeitsbewegung bestimmt) hinreichend wenig abgeändert, so existiert auch jetzt noch während der gleichen Zeitspanne $t_0 \leqq t \leqq t$ eine (und nur eine) Flüssigkeitsbewegung, die zur Zeit t_0 die neuen Anfangswerte annimmt und die dauernd der Ausgangsbewegung benachbart bleibt. Dabei ist die Größe der zulässigen Abänderung unter anderem auch von $t - t_0$ abhängig.

In der folgenden Untersuchung soll nun gezeigt werden, daß dieser Satz auch dann noch gilt, wenn als Änderung der Anfangsbedingungen der Über-

[1]) Vgl. vor allem L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Zweite Abhandlung. Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 196—323.

[2]) Vgl. W. Wolibner, Un theorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 698—726; E. Hölder, Über die unbeschränkte Fortsetzbarkeit einer stetigen ebenen Bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen Flüssigkeit. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 727—738; A. C. Schaeffer, Existence theorem for the flow of an ideal incompressible fluid in two dimensions. Transact. Amer. Math. Soc. **42** (1937), S. 497—513.

[3]) Vgl L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Vierte Abhandlung. Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 608—640.

gang von einem *ebenen* zu einem geeigneten *rotationssymmetrischen* Geschwindigkeitsfeld zugelassen wird. Im Gegensatz zu der Lichtensteinschen Untersuchung wird offenbar hier das Verhalten im Unendlichen bei den beiden Bewegungen grundsätzlich verschieden sein.

Wir nehmen also in dem beliebig großen Zeitintervall $t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t}$ eine *ebene* Wirbelbewegung einer allseitig unbegrenzten ideellen, homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit als bekannt an, die wir kurz „Führungsbewegung" nennen wollen und bei der sämtliche Bereiche nicht verschwindenden Wirbelvektors ganz im Endlichen und in einer, von einer festen Geraden (g) begrenzten Halbebene verbleiben sollen. Wir geben uns alsdann zur Zeit t_0 mit der Geraden (g) als Symmetrieachse eine *rotationssymmetrische* Wirbelverteilung derart vor, daß deren Meridianschnitt mit der zur Zeit t_0 bestehenden Wirbelverteilung der Führungsbewegung zusammenfällt oder hinreichend wenig von ihr abweicht. Wir werden dann unter der Voraussetzung, daß während der Führungsbewegung die Abstände der Wirbelbereiche von der Geraden (g) genügend groß bleiben, die Existenz und die Eindeutigkeit einer während der Zeit $t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t}$ bestehenden achsensymmetrischen Flüssigkeitsbewegung beweisen, die zur Zeit t_0 den vorgegebenen Bewegungszustand besitzt und in der Meridianebene nur wenig von der Führungsbewegung abweicht. Da diese ja als bekannt gelten soll, so ist damit die Möglichkeit eines genaueren Studiums der achsensymmetrischen Bewegung ermöglicht. Überdies gelingt es, die durch die Ringgestalt bewirkte Eigenbewegung der Wirbelringe hervortreten zu lassen. — Läßt man (g) sich mehr und mehr von den Wirbelbereichen entfernen und ferner die Abänderung der Anfangsbedingungen gegen Null gehen, so geht die erhaltene Bewegung gleichmäßig in die Führungsbewegung über. (Eine scharfe Präzisierung des Problems erfolgt in § 1.)

Es kann nun sogleich eine Folgerung gezogen werden. Gemäß den in [2] angeführten Untersuchungen ist unter recht allgemeinen Anfangsbedingungen die Existenz und die Eindeutigkeit ebener Bewegungen im großen gesichert. Demnach existieren gewiß während des Zeitintervalls $t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t}$ rotationssymmetrische Bewegungen, die in der Meridianebene den gleichen Anfangsbedingungen genügen, wenn nur für die betreffende ebene Bewegung die oben geschilderten Bedingungen erfüllt sind. Bei Vorgabe einer festen Symmetrieachse ist die Lösung eindeutig.

Zum Schluß werden wir als Beispiel die bezüglich eines mitrotierenden Achsenkreuzes permanente Bewegung eines Paares geradliniger Wirbelröhren als Führungsbewegung betrachten. Die Anwendung unseres Satzes liefert dann die Bewegung zweier Wirbelringe, wie sie qualitativ von Helmholtz geschildert wurde. Allerdings haben wir in unserem Falle insofern einen Grenzfall vor uns, als der größere Ring bereits eine rückläufige Bewegung ausführen kann.

Leider ist es bisher nicht gelungen, irgendwelche Aussagen über eine Periodizität dieser Bewegungen zu machen; wir müssen vielmehr in allen unseren Betrachtungen in gleicher Weise wie Lichtenstein die erlaubte Größe der Änderung der Anfangsbedingungen, also auch den Abstand der Wirbelbereiche von der Geraden (g), von $t - t_0$ abhängen lassen.

Wie schon erwähnt, liegt unseren Betrachtungen wesentlich die unter[3]) angeführte Arbeit Lichtensteins zugrunde, die sich sowohl dem Aufbau wie auch der Beweismethodik nach für unsere Zwecke als sehr brauchbar erwies.

§ 1.

Problemstellung.

Vorgelegt sei eine sich allseitig ins Unendliche erstreckende Masse reibungsloser unzusammendrückbarer Flüssigkeit von konstanter Dichte ϱ_0, die unter Wirkung konservativer Kräfte steht. Es möge in dem nicht notwendig kleinen Intervall $\langle t_0, t\rangle$ eine durch die Gleichungen

$$x^* = x^*(a, c, t), \qquad z^* = z^*(a, c, t) \tag{1}$$

(a, b, c die Lagrangeschen Variablen) definierte ebene, parallel zur Ebene $b = 0$ verlaufende Bewegung (die „Führungsbewegung") bekannt sein, die folgenden Bedingungen unterworfen ist:

Die Funktionen (1) sind für alle t in $t_0 \leqq t \leqq t$ und alle endlichen a, c stetig. Für $t = t_0$ ist $x^* = a$, $z^* = c$. Im Innern und auf dem Rande eines oder mehrerer, von geschlossenen Kurven der Klasse Ah[4]) begrenzter ebener Flächenstücke, deren Gesamtheit T_0 (Rand Σ_0) heiße, haben die Funktionen (1) stetige, der Hölder-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial x^*}{\partial a}, \quad \frac{\partial z^*}{\partial a}, \quad \frac{\partial x^*}{\partial c}, \quad \frac{\partial z^*}{\partial c}. \tag{2}$$

Auch im Außenbereiche von $T_0 + \Sigma_0$ sind die Funktionen (2) stetig und erfüllen dort eine H-Bedingung. Beim Durchgang durch Σ_0 können Sprünge auftreten. Die Komponenten der Geschwindigkeit

$$u^* = \frac{dx^*}{dt}, \qquad w^* = \frac{dz^*}{dt} \tag{3}$$

---

[4]) Das sind Kurven, die folgenden Bedingungen unterworfen sind: Ist $a = a(s)$, $c = c(s)$ die Parameterdarstellung der Kurve, so existieren $\frac{da}{ds}$ und $\frac{dc}{ds}$ und erfüllen eine H-Bedingung (Hölder-Bedingung):

$$\left|\frac{d}{ds}a(s_1) - \frac{d}{ds}a(s_2)\right|, \quad \left|\frac{d}{ds}c(s_1) - \frac{d}{ds}c(s_2)\right| \leqq A\,|s_1 - s_2|^{\lambda},$$

(A, λ konstant; $0 < \lambda < 1$).

sind für alle t in $\langle t_0, t\rangle$ und alle endlichen a, c stetig. Es gilt

$$u^* = O(R_0^{-1}), \qquad w^* = O(R_0^{-1}), \qquad (R_0^2 = a^2 + c^2), \tag{4}$$

somit auch

$$x^* - a = O(R_0^{-1}), \qquad z^* - c = O(R_0^{-1}). \tag{5}$$

Aus (4) folgt dann[5])

$$u^* = O(R^{*-1}), \qquad w^* = Q(R^{*-1}), \qquad (R^{*2} = x^{*2} + z^{*2}). \tag{6}$$

Für alle t in $\langle t_0, t\rangle$ und alle a, c in $T_0 + \Sigma_0$ sowie in jedem beschränkten Bereiche außerhalb von T_0 existieren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial u^*}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{d x^*}{d t}\right), \ \ldots, \ \frac{\partial w^*}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{d z^*}{d t}\right); \tag{7}$$

sie verhalten sich stetig und erfüllen eine H-Bedingung.

Die Funktionen (1) ordnen den Bereichen $T_0 + \Sigma_0$ als Bild in der Ebene x^*, z^* gewisse Bereiche $T^* + \Sigma^*$ umkehrbar eindeutig und stetig zu, wobei insbesondere Σ_0 auf die ebenfalls der Klasse Ah angehörenden geschlossenen Kurven Σ^* abgebildet wird.

Als Funktionen von x^*, z^* und t aufgefaßt, haben u^* und w^* für alle t in $\langle t_0, t\rangle$ und alle (x^*, z^*) in $T^* + \Sigma^*$ sowie in jedem beschränkten Bereich außerhalb von T^* stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \ \frac{\partial u^*}{\partial z^*}, \ \frac{\partial w^*}{\partial x^*}, \ \frac{\partial w^*}{\partial z^*}; \ \frac{\partial u^*}{\partial t}, \ \frac{\partial w^*}{\partial t}. \tag{8}$$

Der Wirbelvektor

$$\eta^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right) \tag{9}$$

erfüllt daher auch in den soeben betrachteten Bereichen eine H-Bedingung. Da wir eine inkompressible Flüssigkeit voraussetzten, ist

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \tag{10}$$

Es möge nun in $T_0 + \Sigma_0$ der Wirbelvektor $\eta_0 \neq 0$ sein; außerhalb von T_0 sei die Bewegung wirbellos, $\eta_0 = 0$. Dann ist bekanntlich auch $\eta^* \neq 0$ in $T^* + \Sigma^*$, $\eta^* = 0$ außerhalb von T^*, wobei

$$\eta^*(x^*, z^*, t) = \eta_0(a, c) \tag{11}$$

gilt. Schließlich bestehen, unter

$$\psi^*(x^*, z^*, t) = -\frac{1}{\pi}\int_{T^*} \eta^*(x^{*\prime}, z^{*\prime}, t) \log\frac{1}{r^*}\, d\tau^{*\prime}, \tag{12}$$

$$(r^{*2} = (x^* - x^{*\prime})^2 + (z^* - z^{*\prime})^2, \ \ d\tau^{*\prime} = dx^{*\prime} dz^{*\prime})$$

[5]) Vgl. L. Lichtenstein, Bemerkung über einen Verzerrungssatz bei topologischen Abbildungen in der Hydromechanik. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 321—324.

die Strömungsfunktion der Bewegung verstanden, die Beziehungen

$$x^* = a + \int_{t_0}^{t} u^* \, dt, \qquad z^* = c + \int_{t_0}^{t} w^* \, dt \tag{13}$$

mit

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*}, \qquad w^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*}. \tag{14}$$

Die vorgelegte Führungsbewegung werde jetzt noch in einem weiteren Achsenkreuz x, z betrachtet, das dem x^*, z^*-System gegenüber mit einer gewissen, später näher festzulegenden Geschwindigkeit $\bar{w}(t)$ ($\bar{w}$ stetig) in Richtung der $+ z$-Achse parallel zu sich selbst verschoben wird und das zur Zeit t_0 mit dem x^*, z^*-System bzw. dem a, c-System zusammenfällt. Setzen wir

$$\bar{z} = \bar{z}(t) = \int_{t_0}^{t} \bar{w}(t) \, dt, \tag{15}$$

so ist der Zusammenhang der beiden Systeme durch

$$x = x^*, \qquad z = z^* - \bar{z} \tag{16}$$

gegeben. Die Bereiche $\mathsf{T}^* + \Sigma^*$ werden hierdurch auf die Bereiche $\mathsf{T} + \Sigma$ abgebildet. Die Strömungsfunktion $\psi(x, z, t)$ der Führungsbewegung im x, z-System lautet

$$\psi(x, z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathsf{T}} \eta(x', z', t) \log \frac{1}{\tau} \, d\tau' + \bar{w}(t) \, x, \tag{17}$$

$$\eta(x, z, t) = \eta^*(x^*, z^*, t), \quad r^2 = (x - x')^2 + (z - z')^2, \quad d\tau' = dx' \, dz'.$$

Demgemäß findet sich für die Komponenten u und w der im x, z-System herrschenden Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, z, t) = u^*(x^*, z^*, t), \\ w(x, z, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, z, t) = w^*(x^*, z^*, t) - \bar{w}(t). \end{aligned} \tag{18}$$

Es seien weiter $\dot{\mathfrak{A}}(a, c)$ und $\dot{\mathfrak{C}}(a, c)$ zwei in $\mathsf{T}_0 + \Sigma_0$ erklärte Funktionen, die stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Es sei zur Abkürzung

$$\left| \frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a} \right|_\lambda = \mathrm{Max} \left\{ \frac{1}{(h^2 + l^2)^{\lambda/2}} \left| \frac{\partial}{\partial a} \dot{\mathfrak{A}}(a + h, c + l) - \frac{\partial}{\partial a} \dot{\mathfrak{A}}(a, c) \right| \right\}, \ldots \tag{19}$$

gesetzt. Sind $\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}$ hinreichend klein, so wird durch die Gleichungen

$$\dot{a} = a + \dot{\mathfrak{A}}(a, c), \qquad \dot{c} = c + \dot{\mathfrak{C}}(a, c) \tag{20}$$

eine topologische Abbildung von $\mathsf{T}_0 + \Sigma_0$ auf einen Bereich $\dot{\mathsf{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$ der $\dot{a}, \dot{c}$-Ebene des Raumes $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ vermittelt[6]). Es sei

$$(21) \qquad |\dot{\mathfrak{A}}|,\ |\dot{\mathfrak{C}}|,\ \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right|,\ \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right|_\lambda \leqq \mathcal{O}_0$$

gesetzt. Ist $\mathcal{O}_0$ hinreichend klein, so lassen sich die Gleichungen (20) nach a und c auflösen und in der Form

$$(22) \qquad a = \dot{a} + \mathfrak{A}(\dot{a}, \dot{c}), \qquad c = \dot{c} + \mathfrak{C}(\dot{a}, \dot{c})$$

darstellen. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ haben stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung, wobei

$$(23) \qquad \left|\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \dot{a}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \dot{a}}\right|_\lambda, \ldots \leqq \alpha_1 \mathcal{O}_0$$

gilt, unter α_1 (wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$) eine Konstante verstanden. Es sei weiter $\dot{\eta}_0$ eine in $\dot{\mathsf{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$ erklärte stetige, der H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügende Funktion

$$(24) \qquad \dot{\eta}_0 = \dot{\eta}_0(\dot{a}, \dot{c}) = \hat{\dot{\eta}}_0(a, c)$$

und es gelte überdies

$$(25) \qquad |\hat{\dot{\eta}}_0 - \eta_0|,\ |\hat{\dot{\eta}}_0 - \eta_0|_\lambda < \mathcal{O}_0\ ^7).$$

Es bezeichne des weiteren F den (während der Führungsbewegung konstanten) Inhalt von T und K_t den kleinsten Kreis, von dem zur Zeit t $\mathsf{T} + \Sigma$ völlig überdeckt wird. Sein Mittelpunkt sei M_t, sein Radius R_t (vgl. Fig. 1). Wir setzen voraus, daß sich K_t während der Zeit $t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t}$ ganz in der Halbebene $x > 0$ befindet. Bezeichnet L_t den Abstand des Kreises K_t von der Achse $x = 0$, so sei

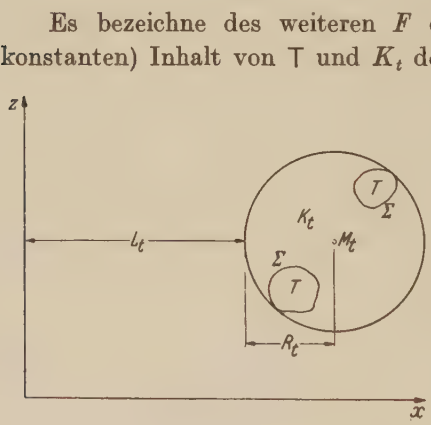


Fig. 1.

$$(26) \qquad L_t - \mathcal{O}_0 > 0$$

angenommen. Dann befindet sich $\dot{\mathsf{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$ ganz in der Halbebene $\dot{a} > 0$.

Wir behaupten nunmehr folgendes: Es seien $\mathcal{O}_0$, $\frac{1}{L_t}$ und $\frac{2(R_t + \mathcal{O}^*)}{L_t - \mathcal{O}^*}$ hinreichend klein, unter $\mathcal{O}^*$ eine in § 2 erklärte feste, ebenfalls genügend kleine

[6]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie II. Sächs. Ber. 78 (1926), S. 147ff., insbesondere S. 148—151.

[7]) Hier wie auch noch öfters im folgenden bedienen wir uns der zu (19) analogen Schreibweise.

Zahl verstanden. Dann gibt es eine und nur eine, im Raume $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ und in dem Zeitintervall $\langle t_0, t\rangle$ erklärte achsensymmetrische Bewegung mit der $\dot{c}$-Achse als Symmetrieachse, die in der Meridianhalbebene definiert ist und die sich dort dauernd in einer durch $\mathfrak{O}^*$ charakterisierten Nachbarschaft (vgl. § 2) der Führungsbewegung befindet. Ihre Gleichungen mögen

(27) $$\dot{x} = \dot{x}(\dot{a}, \dot{c}, t), \qquad \dot{z} = \dot{z}(\dot{a}, \dot{c}, t)$$

lauten; die Funktionen (27) haben dabei folgende Eigenschaften:

Sie sind, was ihre Stetigkeitseigenschaften betrifft, ganz wie die Funktionen (1) beschaffen, wobei wir uns natürlich auf die Halbebene $\dot{a} > 0$ beschränken; der Wirbelvektor hat jetzt zur Zeit t_0 in $\dot{\mathsf{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$ den Wert $\dot{\eta}_0$, während außerhalb von $\dot{\mathsf{T}}_0$ die Bewegung wirbellos ist. Sind, wie wir annehmen wollen, die Einheitskräfte auch jetzt noch konservativ, so ist die Bewegung für alle t in $\langle t_0, t\rangle$ außerhalb des Bildbereiches $\dot{\mathsf{T}} + \dot{\Sigma}$ von $\dot{\mathsf{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$ wirbellos.

Wie man aus Gründen der Symmetrie mühelos erkennt, wird, falls überhaupt eine den geschilderten Anfangsbedingungen genügende Bewegung existiert, diese rotationssymmetrisch sein [8]). Es gelten dann mit der Stokesschen Strömungsfunktion

(28) $$\dot{\Psi}(\dot{x}, \dot{z}, t) = -\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_{\dot{\mathsf{T}}} \dot{\eta}(\dot{x}', \dot{z}', t)\, \dot{x}' \left\{\int_0^{2\pi} \frac{\cos\dot{\chi}'\, d\dot{\chi}'}{[(\dot{z}-\dot{z}')^2 + (\dot{x} - \dot{x}'\cos\dot{\chi}')^2 + (\dot{x}')^2 \sin^2\dot{\chi}']^{\frac{1}{2}}}\right\} d\dot{\tau}'$$

$$(d\dot{\tau}' = d\dot{x}'\, d\dot{z}')$$

die Formeln

(29) $$\dot{x} = \dot{a} + \int_{t_0}^{t} \dot{u}\, dt, \qquad \dot{z} = \dot{c} + \int_{t_0}^{t} \dot{w}\, dt$$

mit

(30) $$\dot{u} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \dot{z}}, \qquad \dot{w} = -\frac{1}{\dot{x}}\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \dot{x}};$$

es ist dabei

(31) $$\dot{\eta}(\dot{x}, \dot{z}, t) = \frac{\dot{x}}{\dot{a}}\dot{\eta}_0(\dot{a}, \dot{c})$$ [9]).

---

[8]) Vgl. hierzu z. B. P. Appell, Traité de mécanique rationelle, Tome III[ième], Paris 1928, S. 439. Ein Beweis ergibt sich auch leicht aus den Existenzbetrachtungen, l. c. [10]).

[9]) Auf diese Beziehung reduzieren sich bei einer achsensymmetrischen Bewegung, wie man leicht erkennt, die Cauchyschen Relationen. Die Beziehung (31) stellt einen bekannten Satz über die Längenelemente einer Wirbellinie und die Wirbelintensität im Falle eines Kreiswirbels dar. Vgl. z. B. L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydrodynamik. Berlin 1929, S. 403. — Die Gleichungen (30) ergeben sich aus dem bekannten Biot-Savartschen Satze, wenn die Rotationssymmetrie des Wirbelfeldes berücksichtigt wird [vgl. P. Appell, l. c. [8]), S. 439ff.]

Der in (28) rechts auftretende innere Integralausdruck gestattet eine Entwicklung der Form

$$(32)\quad \dot{x}'\int_0^{2\pi}\frac{\cos\dot{\chi}'\,d\dot{\chi}'}{[(\dot{z}-\dot{z}')^2+(\dot{x}-\dot{x}'\cos\dot{\chi}')^2+(\dot{x}')^2\sin^2\dot{\chi}']^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\log\frac{8\dot{x}'}{\dot{r}}\cdot\Big[2-\frac{\dot{x}-\dot{x}'}{\dot{x}'}+\mathfrak{P}_1\Big(\frac{\dot{x}-\dot{x}'}{\dot{x}'},\frac{\dot{z}-\dot{z}'}{\dot{x}'}\Big)\Big]-4+\mathfrak{P}_2\Big(\frac{\dot{x}-\dot{x}'}{\dot{x}'},\frac{\dot{z}-\dot{z}'}{\dot{x}'}\Big),$$

$$\mathfrak{P}_1=O\Big\{\Big(\frac{\dot{r}}{\dot{x}'}\Big)^2\Big\},\quad \mathfrak{P}_2=O\Big\{\frac{\dot{r}}{\dot{x}'}\Big\},\quad \dot{r}^2=(\dot{x}-\dot{x}')^2+(\dot{z}-\dot{z}')^2\ ^{10}),$$

wobei die Funktionen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte ihrer Argumente, etwa

$$(33)\qquad \Big|\frac{\dot{x}-\dot{x}'}{\dot{x}'}\Big|,\ \Big|\frac{\dot{z}-\dot{z}'}{\dot{x}'}\Big|<\delta,$$

analytisch und regulär sind. Für die Strömungsfunktion (28) findet man daher

$$(34)\quad \dot{\Psi}(\dot{x},\dot{z},t)=-\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_{\dot{\tau}}\dot{\eta}'\Big\{\log\frac{8\dot{x}'}{\dot{r}}\Big(2-\frac{\dot{x}-\dot{x}'}{\dot{x}'}+\mathfrak{P}_1\Big)-4+\mathfrak{P}_2\Big\}\,d\dot{\tau}',$$

$$(\dot{\eta}'=\dot{\eta}(\dot{x}',\dot{z}',t)).$$

Die Gleichungen (29) fassen wir jetzt als ein System von zwei Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung von $\dot{x},\dot{z}$ als Funktionen von $\dot{a}$, $\dot{c}$ und t auf und gehen daran, diese Funktionen zunächst in $\dot{T}_0+\dot{\Sigma}_0$ und $\langle t_0,t\rangle$ zu finden.

§ 2.

Eine Hilfsbetrachtung.

Wir beschäftigen uns jetzt vorübergehend mit einem System in $\dot{T}_0+\dot{\Sigma}_0$ und $\langle t_0,t\rangle$ erklärter stetiger Funktionen

$$(35)\qquad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\dot{a},\dot{c},t),\qquad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(\dot{a},\dot{c},t)$$

und setzen über diese folgendes voraus:

$\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{z}$ haben in $\dot{T}_0+\dot{\Sigma}_0$ und $\langle t_0,t\rangle$ stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen und sind überdies so beschaffen, daß für $t=t_0$

$$(36)\qquad \boldsymbol{x}=\dot{a},\qquad \boldsymbol{z}=\dot{c}$$

ist. Wir setzen unter Beachtung von (22) und (16)

$$(37)\qquad \mathfrak{O}=\mathfrak{O}(t)=\mathrm{Max}\Big\{|\boldsymbol{x}-x|,|\boldsymbol{z}-z|,\Big|\frac{\partial}{\partial\dot{a}}(\boldsymbol{x}-x)\Big|,\ldots,$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial\dot{a}}(\boldsymbol{x}-x)\Big|_\lambda,\ldots\Big\}\leqq\mathfrak{O}^*,\qquad (t_0\leqq t\leqq \mathrm{t}$$

[10]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze. Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 89—154, insbesondere S. 138ff.

Insbesondere ergibt sich für $t = t_0$

(38) $$\mathcal{O}_0 \leqq \mathcal{O}^*.$$

Aus unseren Voraussetzungen über die Funktionen (1), diese gemäß (22) in Abhängigkeit von $\dot{a}$ und $\dot{c}$ betrachtet, folgt dann wegen (16)

(39) $$|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{z}|, \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \dot{a}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \dot{a}}\right|_\lambda, \ldots, \leqq \alpha_3,$$

ferner

(40) $$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x} - x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x} - x)\right|_\lambda, \ldots, \leqq \alpha_3 \mathcal{O}(t) \leqq \alpha_3 \mathcal{O}^*.$$

Ist $\mathcal{O}^*$ hinreichend klein, so liefert (35) eine topologische Abbildung des Bereiches $\dot{\mathsf{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$ auf einen (mit t variablen) Bereich $\mathsf{T} + \boldsymbol{\Sigma}$.

Wir setzen nun, über (26) hinausgehend, voraus, daß für alle t im Intervall $t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t}$

(41) $$L_t - \mathcal{O}^* \geqq h > 0,$$

(42) $$\frac{2(R_t + \mathcal{O}^*)}{L_t - \mathcal{O}^*} < \delta$$

gilt. Nach unseren früheren Annahmen über die gegebene Bewegung sind dann wegen (37) und (33) die Funktionen $\mathfrak{P}_1\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)$ und $\mathfrak{P}_2\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)$ für alle in Frage kommenden t analytisch und regulär. Überdies ist für alle in $\mathsf{T} + \boldsymbol{\Sigma}$ gelegenen Punkte $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$

(43) $$|\boldsymbol{x}| \geqq h.$$

Wir hatten vorhin mit F den (für alle Zeiten konstanten) Flächeninhalt von T bezeichnet. Einem potentialtheoretischen Hilfssatz von Herrn E. Schmidt[11]) zufolge ist

(44) $$\int_{\mathsf{T}} \frac{d\tau'}{r} \leqq \alpha_4 \sqrt{F}.$$

Hieraus und aus (12), (13) und (14) folgt dann

(45) $$|x - a| = |x^* - a| \leqq \alpha_5 (t - t_0) \sqrt{F} \leqq \alpha_6 \sqrt{F}, \qquad (t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t}).$$

Ist weiter, wie wir annehmen wollen,

(46) $$\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t) = \frac{\boldsymbol{x}}{\dot{a}} \dot{\eta}_0(\dot{a}, \dot{c}),$$

so findet man[12])

(47) $$\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t) - \eta(x, z, t) = \frac{\boldsymbol{x}}{\dot{a}} \dot{\eta}_0 - \eta_0 = \dot{\eta}_0 - \eta_0 + \dot{\eta}_0 \frac{\boldsymbol{x} - \dot{a}}{\dot{a}}$$

$$= \dot{\eta}_0 - \eta_0 + \frac{\dot{\eta}_0}{\dot{a}}\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\dot{a}}\right)[(\boldsymbol{x} - x) - (\dot{a} - a) + (x - a)].$$

---

[11]) E. Schmidt, Bemerkung zur Potentialtheorie. Festschrift H. A. Schwarz, Berlin 1914, S. 365—383.

[12]) Es sei nochmals daran erinnert, daß wir uns zunächst nur mit den Wirbelbereichen beschäftigen und daher sämtliche Betrachtungen nur für diese gelten.

Setzen wir

$$\varepsilon = \frac{1}{L_{\min}}, \qquad (L_{\min} = \text{kleinster Wert von } L_t \text{ für } t_0 \leqq t \leqq t), \tag{48}$$

so ist mit Rücksicht auf (25), (37), (21) und (47)

$$|\eta - \eta|, |\eta - \eta|_\lambda \leqq \alpha_7 \bar{\sigma}_0 + \alpha_8 \bar{\sigma} + \alpha_9 \varepsilon \text{ [13]}). \tag{49}$$

Wir betrachten jetzt die Funktion

$$\Psi(x,z,t) = -\frac{x}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}} \eta' \left\{ \log\frac{8x'}{r}\left(2 - \frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)\right) - 4 + \mathfrak{P}_2\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)\right\} d\tau', \tag{50}$$

$$r^2 = (x-x')^2 + (z-z')^2, \quad d\tau' = dx'\,dz', \quad \eta' = \eta(x',z',t),$$

und schreiben $\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ und $-\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ in der Form

$$\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi(x,z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} \eta' \frac{\partial}{\partial z}\left(\log\frac{1}{r}\right) d\tau' - \frac{1}{2\pi x}\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{1}{2\pi x}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}, \tag{51}$$

$$-\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi(x,z,t)}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{T}} \eta' \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{r}\right) d\tau' + \frac{1}{2\pi x}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{1}{2\pi x}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + \frac{1}{\pi}\mathsf{Z} \tag{52}$$

mit

$$\Theta(x,z,t) = x\int_{\mathfrak{T}} \eta' \log\frac{8x'}{r}\left[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)\right] d\tau',$$

$$\mathsf{H}(x,z,t) = x\int_{\mathfrak{T}} \eta'\left[-4 + \mathfrak{P}_2\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)\right] d\tau', \tag{53}$$

$$\mathsf{Z}(x,z,t) = \frac{1}{x}\int_{\mathfrak{T}} \eta' \log\frac{8x'}{r}\, d\tau' \text{ [14]}).$$

---

[13]) η und η sind natürlich in [gemäß (22)] zusammengehörigen Punkten $(\dot{a}, \dot{c})$ und (a, c) zu nehmen. Das gleiche gilt sinngemäß für alle späteren Abschätzungen.

[14]) Wir benutzen alsbald die Tatsache, daß z. B.

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathfrak{T}} f(x,z,x',z') \log\frac{1}{r}\, d\tau' = \int_{\mathfrak{T}} \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,z,x',z') \log\frac{1}{r}\right] d\tau'$$

ist, wobei f nebst seinen Ableitungen erster Ordnung nach x und z stetig ist. Der Beweis hierfür läßt sich durch Verallgemeinerung der Betrachtungen gewinnen, die Lichtenstein bei Behandlung des Potentials einer Volumenladung verwandte. Entsprechendes gilt unter geeigneten Annahmen auch für die Ableitungen zweiter Ordnung. Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie IV. Sächs. Ber. 82 (1930), S. 265—344, insbesondere S. 268.

Der späteren Verwendung wegen bilden wir noch, analog zu (53)

$$\Theta(x,z,t) = x\int_{\mathsf{T}} \eta' \log\frac{8x'}{r}\left[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)\right] d\tau',$$

(54)
$$\mathrm{H}(x,z,t) = x\int_{\mathsf{T}} \eta'\left[-4 + \mathfrak{P}_2\left(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\right)\right] d\tau',$$

$$\mathrm{Z}(x,z,t) = \frac{1}{x}\int_{\mathsf{T}} \eta' \log\frac{8x'}{r}\, d\tau'.$$

Fassen wir jetzt die Potentiale

$$V = \int_{\mathsf{T}} \vartheta' \log\frac{1}{r}\, d\tau' \quad \text{und} \quad V = \int_{\mathsf{T}} \vartheta' \log\frac{1}{r}\, d\tau'$$

ins Auge, unter $\vartheta = \vartheta(x, z, t)$ bzw. $\vartheta = \vartheta(x, z, t)$ beliebige, in $\mathsf{T} + \Sigma$ bzw. in $\mathsf{T} + \Sigma$ erklärte stetige, der H-Bedingung genügende Funktionen verstanden, mit

(55)
$$|\vartheta|, |\vartheta|_\lambda, |\vartheta|, |\vartheta|_\lambda \leqq M$$
$$|\vartheta - \vartheta|, \ |\vartheta - \vartheta|_\lambda \leqq \Omega \text{ für die gleichen Wertepaare } a, c.$$

Nach gewissen Hilfssätzen der Potentialtheorie[15]) ist dann für entsprechende Wertepaare x, z und x, z

(56)
$$|V - V|, \left|\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|, \ldots,$$
$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_\lambda, \ldots \leqq \alpha_{10} M \sigma + \alpha_{11}\Omega.$$

Ersetzen wir $\vartheta(x, z, t)$ und $\vartheta(x, z, t)$ durch zwei Funktionen $\vartheta^*(x, z, x', z', t)$ und $\vartheta^*(x, z, x', z', t)$, die gleichmäßig für zusammengehörige Werte ihrer Argumente den Abschätzungen (55) genügen und bezüglich x, z bzw. x, z stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen, und betrachten wir die Ausdrücke

(57)
$$V^* = \int_{\mathsf{T}} \vartheta^* \log\frac{1}{r}\, d\tau', \qquad V = \int_{\mathsf{T}} \vartheta^* \log\frac{1}{r}\, d\tau',$$

so ergeben sich, wie man leicht erkennt, ganz analoge Ungleichheiten:

(58)
$$|V^* - V^*|, \left|\frac{\partial}{\partial x}V^* - \frac{\partial}{\partial x}V^*\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}V^* - \frac{\partial^2}{\partial x^2}V^*\right|, \ldots,$$
$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}V^* - \frac{\partial^2}{\partial x^2}V^*\right|_\lambda, \ldots \leqq \alpha_{12} M \sigma + \alpha_{13}\Omega.$$

---

[15]) Vgl. L. Lichtenstein, l. c. [14]), S. 318 und l. c. [3]), S. 620.

Wegen (49) und (56) bekommen wir mit Rücksicht auf (22) zunächst

$$(59)\quad \Big|\int_T \eta' \log\frac{1}{r}\,d\tau' - \int_T \eta' \log\frac{1}{r}\,d\tau'\Big|,$$

$$\Big|\int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)d\tau' - \int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)d\tau'\Big|, \ldots,$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial a}\Big\{\int_T \eta' \log\frac{1}{r}\,d\tau' - \int_T \eta' \log\frac{1}{r}\,d\tau'\Big\}\Big|, \ldots,$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial a}\Big\{\int_T \eta' \log\frac{1}{r}\,d\tau' - \int_T \eta' \log\frac{1}{r}\,d\tau'\Big\}\Big|_\lambda, \ldots.$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial a}\Big\{\int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)d\tau' - \int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)d\tau'\Big\}\Big|, \ldots,$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial a}\Big\{\int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)d\tau' - \int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)d\tau'\Big|_\lambda, \ldots$$

$$\leqq \alpha_{14}\mathfrak{O} + \alpha_{15}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{16}\varepsilon.$$

Weiter haben wir

$$(60)\quad \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Theta - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Theta = \int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\log\frac{8x'}{r}\Big[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\Big(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\Big)\Big]\Big\}d\tau'$$

$$- \int_T \eta' \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\log\frac{8x'}{r}\Big[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\Big(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\Big)\Big]\Big\}d\tau'$$

$$+ \frac{1}{x}\int_T \eta' \log\frac{8x'}{r}\Big[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\Big(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\Big)\Big]d\tau'$$

$$- \frac{1}{x}\int_T \eta' \log\frac{8x'}{r}\Big[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\Big(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\Big)\Big]d\tau'$$

und

$$(61)\quad \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial z}\Theta - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial z}\Theta = \int_T \eta' \frac{\partial}{\partial z}\Big\{\log\frac{8x'}{r}\Big[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\Big(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\Big)\Big]\Big\}d\tau'$$

$$- \int_T \eta' \frac{\partial}{\partial z}\Big\{\log\frac{8x'}{r}\Big[-\frac{x-x'}{x'} + \mathfrak{P}_1\Big(\frac{x-x'}{x'}, \frac{z-z'}{x'}\Big)\Big]\Big\}d\tau'.$$

Nach einer leichten Rechnung ergibt sich dann mit Rücksicht auf (37), (49) und (58)

$$(62)\quad \Big|\frac{1}{x}\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|, \Big|\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big)\Big|, \ldots,$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big)\Big|_\lambda, \ldots \leqq \alpha_{17}\mathfrak{O} + \alpha_{18}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{19}\varepsilon$$

Hieraus folgt leicht

$$(63)\quad \left|\frac{\partial}{\partial \dot a}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial \Theta}{\partial x}-\frac{1}{x}\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\right|,\ \ldots,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot a}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial \Theta}{\partial x}-\frac{1}{x}\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\right|_\lambda,\ \ldots \leqq \alpha_{20}\mathfrak{G}+\alpha_{21}\mathfrak{G}_0+\alpha_{22}\varepsilon.$$

Entsprechende Abschätzungen finden sich leicht für

$$\frac{1}{x}\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{1}{x}\frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

ferner für

$$\frac{1}{x}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}-\frac{1}{x}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x},\quad \frac{1}{x}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}-\frac{1}{x}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z},\quad \mathsf{Z}-\mathsf{Z}$$

und ihre Ableitungen nach $\dot a$ und $\dot c$. Alles in allem bekommen wir daher mit Rücksicht auf (17), (22), (51), (52), (53), (54), auf die Ungleichheiten (59), (62), (63) und auf die zu ihnen analogen Beziehungen

$$(64)\quad \left|\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}-u+\frac{1}{2\pi x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right|,\left|\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}+w+\bar w+\frac{1}{2\pi x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}\right)+\frac{1}{\pi}\mathsf{Z}\right|,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot a}\left\{\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}-u+\frac{1}{2\pi x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right\}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial}{\partial \dot c}\left\{\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}+w+\bar w\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2\pi x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}\right)+\frac{1}{\pi}\mathsf{Z}\right\}\right|_\lambda \leqq \alpha_{23}\mathfrak{G}+\alpha_{24}\mathfrak{G}_0+\alpha_{25}\varepsilon.$$

Betrachten wir weiter die in (54) eingeführten Ausdrücke Θ, H und Z. Es ist zunächst für hinreichend kleine Werte von $\frac{R_t}{L_t}$, etwa für $\frac{R_t}{L_t}<\delta_1$,

$$(65)\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{L_t}\left[1+O\left(\frac{R_t}{L_t}\right)\right],\quad \log\frac{8x'}{r}=\log\frac{8L_t}{\sqrt{F}}+\log\frac{\sqrt{F}}{r}+O\left(\frac{R_t}{L_t}\right).$$

Daher ergibt sich mit Rücksicht auf (48) und (54)

$$(66)\quad \left|\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right|,\ \left|\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}\right)+\mathsf{Z}-\frac{1}{2L_t}\log\frac{8L_t}{\sqrt{F}}\int_{\mathsf{T}}\eta'\,d\tau'\right|,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot a}\left\{\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right\}\right|,\ \ldots,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot c}\left\{\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}+\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}\right)+\mathsf{Z}-\frac{1}{2L_t}\log\frac{8L_t}{\sqrt{F}}\int_{\mathsf{T}}\eta'\,d\tau'\right\}\right|_\lambda \leqq \alpha_{26}\,\varepsilon\ ^{16}).$$

Nunmehr legen wir die in § 1 eingeführte Funktion $\bar w(t)$ fest und setzen

$$(67)\quad \bar w(t)=-\frac{1}{2\pi L_t}\log\frac{8L_t}{\sqrt{F}}\int_{\mathsf{T}}\eta'\,d\tau'.$$

---

16) Es sei darauf hingewiesen, daß die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ alle nur von der vorgegebenen Führungsbewegung abhangen. — Die Größe $\sqrt{F}$ hat lediglich die Bedeutung einer geeigneten Bezugslänge.

So findet sich schließlich unter Beachtung von (64), (66) und (67)

$$(68)\quad \left|\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}-u\right|,\ \left|\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}+w\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial \dot a}\left\{\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}-u\right\}\right|,\ \ldots,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot c}\left\{\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}+w\right\}\right|_\lambda \leqq \alpha_{27}\,(\mathfrak{O}+\mathfrak{O}_0+\varepsilon).$$

Es seien weiter

$$(69)\qquad \check x = \check x(a,\dot c,t),\quad \check z = \check z(a,\dot c,t)$$

zwei ganz wie x, z beschaffene Funktionen, die ebenfalls den Beschränkungen (37) unterworfen sind und $\dot{\mathsf{T}}_0+\dot{\Sigma}_0$ auf einen Bereich $\check{\mathsf{T}}+\check{\Sigma}$ abbilden. Es sei weiter

$$(70)\quad \mathrm{Max}\left\{|\check x - x|,\ |\check z - z|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\check x - x)\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}(\dot{\check z}-\dot z)\right|_\lambda\right\} = D.$$

Beachten wir (46), so ist mit $\check\eta = \frac{\check x}{a}\,\dot\eta_0$

$$(71)\quad |\check\eta(\check x,\check z,t)-\eta(x,z,t)|,\ |\check\eta(\check x,\check z,t)-\eta(x,z,t)|_\lambda \leqq \alpha_{28}\,D.$$

In entsprechender Weise finden wir mit

$$(72)\quad \check\Psi(\check x,\check z,t) = -\frac{\check x}{2\pi}\int_{\check{\mathsf{T}}}\check\eta'\Big\{\log\frac{8\check x'}{\check r}\Big[2-\frac{\check x-\check x'}{\check x'}+\mathfrak{P}_1\Big(\frac{\check x-\check x'}{\check x'},\frac{\check z-\check z'}{\check x'}\Big)\Big]$$
$$-4+\mathfrak{P}_2\Big(\frac{\check x-\check x'}{\check x'},\frac{\check z-\check z'}{\check x'}\Big)\Big\}\,d\check\tau',$$

$$\check r^2 = (\check x-\check x')^2+(\check z-\check z')^2,\quad \check\eta' = \check\eta(\check x',\check z',t),\quad d\check\tau' = d\check x'\,d\check z',$$

schließlich

$$(73)\quad \left|\frac{1}{\check x}\frac{\partial \check\Psi}{\partial \check x}-\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{1}{\check x}\frac{\partial \check\Psi}{\partial \check z}-\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial \dot a}\left\{\frac{1}{\check x}\frac{\partial \check\Psi}{\partial \check x}-\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right\}\right|,\ \ldots,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot c}\left\{\frac{1}{\check x}\frac{\partial \check\Psi}{\partial \check z}-\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right\}\right|_\lambda \leqq \alpha_{29}\,D.$$

§ 3.

Sukzessive Approximationen.

Die alsbald zu definierenden Näherungslösungen für die Integro-Differentialgleichungen (29) fassen wir als Funktionen von $\dot a$ und $\dot c$ auf und bezeichnen sie mit $\dot x_1, \dot z_1, \dot x_2, \dot z_2, \ldots$. Wir setzen als erste Näherung

$$(74)\qquad \dot x_1 = x+\dot a-a,\qquad \dot z_1 = z+\dot c-c,$$

als weitere Approximationen

$$(75)\quad \dot x_2 = \dot a+\int_{t_0}^{t}\dot u_1\,dt = \dot a+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\dot x_1}\frac{\partial \dot\Psi_1}{\partial \dot z_1}\,dt,\ \dot z_2 = \dot c+\int_{t_0}^{t}\dot w_1\,dt = \dot c-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\dot x_1}\frac{\partial \dot\Psi_1}{\partial \dot x_1}\,dt;$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$(76)\quad \dot x_{n+1} = \dot a+\int_{t_0}^{t}\dot u_n\,dt = \dot a+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\dot x_n}\frac{\partial \dot\Psi_n}{\partial \dot z_n}\,dt,\ \dot z_{n+1} = \dot c+\int_{t_0}^{t}\dot w_n\,dt = \dot c-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\dot x_n}\frac{\partial \dot\Psi_n}{\partial \dot x_n}\,dt;$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad \vdots$$

mit

$$\dot{\Psi}_1(\dot{x}_1, \dot{z}_1, t) = -\frac{\dot{x}_1}{2\pi}\int_{\dot{T}_1} \dot{\eta}_1' \left\{\log\frac{8\dot{x}_1'}{\dot{r}_1}\left[2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_1'}{\dot{x}_1'} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_1'}{\dot{x}_1'}, \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_1'}{\dot{x}_1'}\right)\right]\right.$$

$$\left. - 4 + \mathfrak{P}_2\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_1'}{\dot{x}_1'}, \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_1'}{\dot{x}_1'}\right)\right\} d\dot{\tau}_1',$$

$$\left(\dot{r}_1^2 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_1')^2 + (\dot{z}_1 - \dot{z}_1')^2, \dot{\eta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{\dot{a}}\dot{\eta}_0, \dot{\eta}_1' = \dot{\eta}_1(\dot{x}_1', \dot{z}_1', t), d\dot{\tau}_1' = d\dot{x}_1' d\dot{z}_1'\right);$$

(77) . . . . . .

$$\dot{\Psi}_n(\dot{x}_n, \dot{z}_n, t) = -\frac{\dot{x}_n}{2\pi}\int_{\dot{T}_n} \dot{\eta}_n' \left\{\log\frac{8\dot{x}_n'}{\dot{r}_n}\left[2 - \frac{\dot{x}_n - \dot{x}_n'}{\dot{x}_n'} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{\dot{x}_n - \dot{x}_n'}{\dot{x}_n'}, \frac{\dot{z}_n - \dot{z}_n'}{\dot{x}_n'}\right)\right]\right.$$

$$\left. - 4 + \mathfrak{P}_2\left(\frac{\dot{x}_n - \dot{x}_n'}{\dot{x}_n'}, \frac{\dot{z}_n - \dot{z}_n'}{\dot{x}_n'}\right)\right\} d\dot{\tau}_n',$$

$$\left(\dot{r}_n^2 = (\dot{x}_n - \dot{x}_n')^2 + (\dot{z}_n - \dot{z}_n')^2, \dot{\eta}_n = \frac{\dot{x}_n}{\dot{a}}\dot{\eta}_0, \dot{\eta}_n' = \dot{\eta}_n(\dot{x}_n', \dot{z}_n', t), d\dot{\tau}_n' = d\dot{x}_n' d\dot{z}_n'\right);$$

. . . . . .

Dabei sind $\dot{T}_1 + \dot{\Sigma}_1, \ldots, \dot{T}_n + \dot{\Sigma}_n, \ldots$, die mittels $\dot{x}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{z}_n, \ldots$, erhaltenen Bilder von $\dot{T}_0 + \dot{\Sigma}_0$.

Wir werden zeigen, daß man, wenn $\mathcal{O}_0$ und ε hinreichend klein gewählt werden, erreichen kann, daß alle Approximationen für $t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t}$ in der durch die Ungleichheiten (37) charakterisierten Umgebung der gemäß (16) im x, z-System betrachteten Führungsbewegung (1) liegen. Es ist daher gestattet, bei dem Konvergenzbeweis in § 4 die Beziehungen (73) zu verwerten.

Wegen (74) haben wir mit Rücksicht auf (21)

(78) $$|\dot{x}_1 - x|, |\dot{z}_1 - z|, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_1 - x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_1 - z)\right|_\lambda \leqq \mathcal{O}_0 \leqq \mathcal{O}^*,$$

daher können wir für x, z gewiß $\dot{x}_1, \dot{z}_1$ setzen und $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}_0$ annehmen. Mit Rücksicht auf (68) und (78) erhalten wir jetzt

(79) $$|\dot{u}_1 - u|, |\dot{w}_1 - w|, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{u}_1 - u)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{w}_1 - w)\right|_\lambda \leqq \alpha_{27}(2\mathcal{O}_0 + \varepsilon).$$

Aus (20), (21) und (75) folgt dann

(80) $$|\dot{x}_2 - x|, |\dot{z}_2 - z|, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_2 - x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z} - z)\right|_\lambda \leqq \mathcal{O}_0 + \alpha_{27}\int_{t_0}^{t}(2\mathcal{O}_0 + \varepsilon)\,dt$$
$$= \mathcal{O}_0 + \alpha_{27}(t - t_0)(2\mathcal{O}_0 + \varepsilon).$$

Wir wählen nun $\mathcal{O}_0$ und ε so klein, daß

(81) $$\mathcal{O}_0 + (2\mathcal{O}_0 + \varepsilon)(e^{\alpha_{27}(\mathrm{t} - t_0)} - 1) < \mathcal{O}^*$$

ausfällt. Damit liegt wegen (80) auch die zweite Approximation gewiß in der durch (37) definierten Umgebung der Führungsbewegung (16) bzw. (1). Setzen wir jetzt in (68) für $\mathfrak{O}$ die Schranke (80) ein, so findet sich

$$|\dot{u}_2 - u|, \quad |\dot{w}_2 - w|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{u}_2 - u)\right|, \ \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}\dot{w}_2 - w)\right|_\lambda \leqq \alpha_{27}\,[2\,\mathfrak{O}_0 + \varepsilon + \alpha_{27}\,(2\,\mathfrak{O}_0 + \varepsilon)\,(t - t_0)],$$

$$|\dot{x}_3 - x|, \quad |\dot{z}_3 - z|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_3 - x)\right|, \ \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_3 - z)\right|_\lambda \leqq \mathfrak{O}_0 + (2\,\mathfrak{O}_0 + \varepsilon)\,[\alpha_{27}\,(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\,\alpha_{27}^2\,(t - t_0)^2].$$

Man erkennt leicht, indem man entsprechend weiterschließt, daß in der Tat wegen (81) alle Näherungen in der Umgebung (37) liegen; denn es gilt für alle n

(82) $$|\dot{x}_n - x|, \ |\dot{z}_n - z|, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_n - x)\right|, \ \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_n - z)\right|_\lambda < \mathfrak{O}_0 + (2\,\mathfrak{O}_0 + \varepsilon)\,(e^{\alpha_{27}\,(t - t_0)} - 1).$$

§ 4.

Konvergenzbeweis und Eindeutigkeit.

Zum Beweise der Konvergenz gehen wir von den Beziehungen

$$\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{\dot{x}_n}\frac{\partial \dot{\Psi}_n}{\partial \dot{z}_n} - \frac{1}{\dot{x}_{n-1}}\frac{\partial \dot{\Psi}_{n-1}}{\partial \dot{z}_{n-1}}\right) dt,$$

$$\dot{z}_{n+1} - \dot{z}_n = -\int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{\dot{x}_n}\frac{\partial \dot{\Psi}_n}{\partial \dot{x}_n} - \frac{1}{\dot{x}_{n-1}}\frac{\partial \dot{\Psi}_{n-1}}{\partial \dot{x}_{n-1}}\right) dt$$

aus. Es sei für einen bestimmten Wert von $n > 1$

(83) $$|\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}|, \ |\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1}|, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})\right|, \ \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})\right|_\lambda \leqq q_n(t), \qquad (t_0 \leqq t \leqq \mathfrak{t}).$$

Wegen

(84) $$\dot{\eta}_n = \frac{\dot{x}_n}{\dot{a}}\dot{\eta}_0, \qquad \dot{\eta}_{n-1} = \frac{\dot{x}_{n-1}}{\dot{a}}\dot{\eta}_0$$

ist dann

(85) $$|\dot{\eta}_n - \dot{\eta}_{n-1}|, \ |\dot{\eta}_n - \dot{\eta}_{n-1}|_\lambda \leqq \alpha_{30}\, q_n(t).$$

Mit Beachtung von (73) findet sich daher

$$\left|\frac{1}{\dot{x}_n}\frac{\partial \dot{\Psi}_n}{\partial z_n} - \frac{1}{\dot{x}_{n-1}}\frac{\partial \dot{\Psi}_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right|, \quad \left|\frac{1}{\dot{x}_n}\frac{\partial \dot{\Psi}_n}{\partial \dot{x}_n} - \frac{1}{\dot{x}_{n-1}}\frac{\partial \dot{\Psi}_{n-1}}{\partial \dot{x}_{n-1}}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}\left(\frac{1}{\dot{x}_n}\frac{\partial \dot{\Psi}_n}{\partial z_n} - \frac{1}{\dot{x}_{n-1}}\frac{\partial \dot{\Psi}_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}\left(\frac{1}{\dot{x}_n}\frac{\partial \dot{\Psi}_n}{\partial \dot{x}_n} - \frac{1}{\dot{x}_{n-1}}\frac{\partial \dot{\Psi}_{n-1}}{\partial \dot{x}_{n-1}}\right)\right|_\lambda$$

(86)
$$\leqq \alpha_{31}\, q_n(t),$$

$$|\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n|, \ |\dot{z}_{n+1} - \dot{z}_n|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n)\right|, \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_{n+1} - \dot{z}_n)\right|_\lambda \leqq \alpha_{31} \int_{t_0}^{t} q_n(t)\, dt.$$

Es sei nun

(87) $$|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|, \ |\dot{z}_2 - \dot{z}_1|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\right|_\lambda \leqq q.$$

Dann ist wegen (86)

$$|\dot{x}_3 - \dot{x}_2|, \ |\dot{z}_3 - \dot{z}_2|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_3 - \dot{z}_2)\right|_\lambda \leqq \alpha_{31}\, q\, (t - t_0),$$

(88)
$$|\dot{x}_4 - \dot{x}_3|, \ |\dot{z}_4 - \dot{z}_3|, \ \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_4 - \dot{z}_3)\right|_\lambda \leqq \alpha_{31} q \frac{(t - t_0)^2}{2!},$$

. . . . . .

Die unendlichen Reihen

(89) $$\dot{x}_1 + \sum_{l=2}^{\infty}(\dot{x}_l - \dot{x}_{l-1}), \qquad \dot{z}_1 + \sum_{l=2}^{\infty}(\dot{z}_l - \dot{z}_{l-1}),$$

sowie die durch gliedweise Differentiation gewonnenen Reihen konvergieren gleichmäßig für alle t in $t_0 \leqq t \leqq \mathfrak{t}$ und alle $\dot{a}$ und $\dot{c}$ in $\dot{\mathfrak{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$.

Die Funktionen

(90) $$\dot{x}(\dot{a}, \dot{c}, t) = \dot{x}_1 + \sum_{l=2}^{\infty}(\dot{x}_l - \dot{x}_{l-1}), \qquad \dot{z}(\dot{a}, \dot{c}, t) = \dot{z}_1 + \sum_{l=2}^{\infty}(\dot{z}_l - \dot{z}_{l-1}),$$

deren partielle Ableitungen erster Ordnung durch die Reihen

(91) $$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{a}} + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial \dot{x}_{l-1}}{\partial \dot{a}}\right), \ldots, \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{c}} = \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \dot{c}} + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{\partial \dot{z}_l}{\partial \dot{c}} - \frac{\partial \dot{z}_{l-1}}{\partial \dot{c}}\right)$$

dargestellt werden und einer H-Bedingung genügen, stellen in $\dot{\mathfrak{T}}_0 + \dot{\Sigma}_0$ gewiß ein Lösungssystem der Integro-Differentialgleichungen (29) dar. Gehen wir nämlich in (76) beiderseits zur Grenze $n \to \infty$ über, so erkennt man sogleich, daß wegen

$$\lim_{n\to\infty} \dot{x}_n = \dot{x}, \ \lim_{n\to\infty} \dot{z}_n = \dot{z}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{a}}, \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\partial \dot{z}_n}{\partial \dot{c}}\right| = \left|\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{c}}\right|_\lambda; \quad \lim \dot{\eta}_n = \frac{\dot{x}}{\dot{a}}\,\dot{\eta}_0 = \dot{\eta}$$

die Funktionen x und z in der Tat den Gleichungen (29) genügen. Wegen (82) gilt

$$(92)\qquad |x-x|,\ |\dot z - z|, \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot x - x)\right|, \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot z - z)\right|_\lambda \leqq \mathfrak{O}_0 + (2\mathfrak{O}_0 + \varepsilon)(e^{\alpha_{27}(t-t_0)} - 1) < \mathfrak{O}^*.$$

Dieses Lösungssystem ist auch das einzige. Nehmen wir, im Gegensatz zu dieser Behauptung, etwa an, daß noch ein zweites Funktionensystem $\bar x(a, c)$ und $\bar z(a, c)$ mit analogen Eigenschaften die Gleichungen (29) befriedigt:

$$\bar x = a + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\bar{\dot x}} \frac{\partial \bar\Psi}{\partial \bar z}\, dt, \quad \bar z = c - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\bar{\dot x}} \frac{\partial \bar\Psi}{\partial \bar x}\, dt,$$

$$(93)\qquad \overline{\dot\Psi}(\bar x, \bar z, t) = -\frac{\bar{\dot x}}{2\pi} \int_{\bar T} \bar\eta' \left\{ \log \frac{8\bar{\dot x}'}{\bar r} \left[2 - \frac{\bar{\dot x} - \bar{\dot x}'}{\bar{\dot x}'} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{\bar{\dot x} - \bar{\dot x}'}{\bar{\dot x}'}, \frac{\bar z - \bar z'}{\bar{\dot x}'} \right) \right] \right.$$

$$\left. - 4 + \mathfrak{P}_2\left(\frac{\bar{\dot x} - \bar{\dot x}'}{\bar{\dot x}'}, \frac{\bar z - \bar z'}{\bar{\dot x}'} \right) \right\} d\bar\tau',$$

$\left(\bar r^2 = (\bar x - \bar x')^2 + (\bar z - \bar z')^2,\ \bar\eta = \frac{\bar{\dot x}}{\dot a}\dot\eta_0, d\bar\tau' = d\bar x'\, d\bar z';\ \bar T \text{ ist das Bild von } T_0\right)$.

Hieraus und aus (76) bekommen wir dann

$$(94)\qquad \bar x - \dot x_{n+1} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{\bar{\dot x}} \frac{\partial \bar\Psi}{\partial \bar z} - \frac{1}{\dot x_n} \frac{\partial \dot\Psi_n}{\partial z_n} \right) dt,$$

$$\bar z - \dot z_{n+1} = -\int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{\bar{\dot x}} \frac{\partial \bar\Psi}{\partial \bar x} - \frac{1}{\dot x_n} \frac{\partial \dot\Psi_n}{\partial \dot x_n} \right) dt.$$

Ist etwa

$$(95)\qquad |\bar x - \dot x_n|, |\bar{\dot x} - \dot z_n|, \left|\frac{\partial}{\partial a}(\bar x - \dot x_n)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\bar{\dot x} - \dot z_n)\right|_\lambda \leqq \bar q_n(t),$$

$$(t_0 \leqq t \leqq \mathfrak{t}),$$

und genügen $\bar x$ und $\bar{\dot x}$ derselben Beschränkung (37) wie x und $\dot x$, so ergibt sich in entsprechender Weise wie in (83) bis (86)

$$(96)\qquad |\bar x - \dot x_{n+1}|, |\bar{\dot x} - \dot z_{n+1}|, \left|\frac{\partial}{\partial a}(\bar x - \dot x_{n+1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\bar{\dot x} - \dot z_{n+1})\right|_\lambda$$

$$\leqq \alpha_{32} \int_{t_0}^{t} \bar q_n(t)\, dt.$$

Ist nun

$$(97)\qquad |\bar x - \dot x_1|, |\bar{\dot x} - \dot z_1|, \left|\frac{\partial}{\partial a}(\bar x - \dot x_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\bar{\dot x} - \dot z_1)\right|_\lambda \leqq \bar q,$$

so bekommen wir

$$(98)\ |\bar{\dot{x}} - \dot{x}_{n+1}|,\ |\bar{\dot{z}} - \dot{z}_{n+1}|, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\bar{\dot{x}} - \dot{x}_{n+1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\bar{\dot{z}} - \dot{z}_{n+1})\right|_\lambda \leqq \frac{(t-t_0)^n}{n!}\bar{q}.$$

Offenbar ist daher

$$(99)\quad \bar{\dot{x}} - \dot{x} = \lim_{n\to\infty}(\bar{\dot{x}} - \dot{x}_{n+1}) = 0, \quad \bar{\dot{z}} - \dot{z} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\bar{\dot{x}} - \dot{x}_{n+1}) = \ldots$$
$$= \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\bar{\dot{z}} - \dot{z})\right|_\lambda = 0.$$

Das Lösungssystem $\dot{x}, \dot{z}$ ist also tatsächlich das einzige, das den in § 1 formulierten Forderungen und der zu (37) entsprechenden Beschränkung genügt[17]). Die Wirbelverteilung bleibt während des betrachteten Zeitintervalls im Meridianschnitt in der durch (37) definierten Umgebung der Führungsbewegung, wofern diese auf ein mit der Geschwindigkeit $\overline{w}(t)$ in Richtung der $+z$-Achse bewegtes Achsenkreuz bezogen wird[18]).

Wir haben damit zunächst nur Existenz und Eindeutigkeit der Bewegung der Wirbelbereiche samt der sie erfüllenden Flüssigkeit gezeigt. Hiermit ist aber das Wirbelfeld zu jedem Zeitpunkte in $t_0 \leqq t \leqq \mathfrak{t}$ bekannt, also gilt das gleiche von dem Geschwindigkeitsfeld in der gesamten, den Raum erfüllenden Flüssigkeit. Hierdurch ist dann wieder bei vorgegebener Anfangslage die Bewegung eines jeden Flüssigkeitsteilchens eindeutig festgelegt.

Der Flüssigkeitsdruck $\dot{p}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ ist jetzt zu jedem Zeitpunkte und in jedem Punkte des Raumes $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ durch

$$(100)\quad \dot{p}(\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = \dot{p}_\infty + \varrho_0 \dot{U} - \frac{\varrho_0}{2\pi}\int_\infty \frac{1}{\dot{\mathfrak{r}}}\left\{\frac{\partial(\dot{u}',\dot{v}')}{\partial(\dot{x}',\dot{y}')} + \frac{\partial(\dot{u}',\dot{w}')}{\partial(\dot{x}',\dot{z}')} + \frac{\partial(\dot{v}',\dot{w}')}{\partial(\dot{y}',\dot{z}')}\right\} d\dot{\tau}'\,^{19}),$$

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = (\dot{x}-\dot{x}')^2 + (\dot{y}-\dot{y}')^2 + (\dot{z}-\dot{z}')^2$$

($\dot{U}$ die Kräftefunktion der auf die Flüssigkeit wirkenden Einheitskräfte, ϱ_0 die Dichte der Flüssigkeit) gegeben. Damit ist das angeschnittene hydrodynamische Problem als erledigt zu betrachten.

---

[17]) Es ist zu beachten, daß $\dot{x}$ und $\dot{z}$ noch von den kleinen Parametern $\mathcal{O}_0$ und ε abhängen. Wir haben eine stetige Schar von Lösungen vor uns, die mit $\mathcal{O}_0 \to 0$ und $\varepsilon \to 0$ [man beachte (92)] gleichmäßig in die Gleichungen der Führungsbewegung übergehen.

[18]) Es sei hierzu bemerkt, daß bei Wahl hinreichend kleiner Werte von $\mathcal{O}_0$ und ε natürlich wegen (67) $\overline{w}$ und wegen (15) $\bar{z}$ so klein gemacht werden kann, daß die gesuchte Bewegung im Meridianschnitt auch in der Nachbarschaft der auf das *feste* Achsenkreuz x^*, z^* bezogenen Führungsbewegung verbleibt. Trotzdem sondern wir das Hauptglied $\overline{w}$ der einen Geschwindigkeitskomponente aus, um in erster Näherung etwas über den Charakter der axialsymmetrischen Bewegung aussagen zu können. Für den Existenzbeweis wäre diese Aussonderung nicht nötig gewesen.

[19]) Daß dieses Integral existiert, ergibt sich in l. c. [1]), S. 211—218.

Wie man aus den allgemeinen Betrachtungen Lichtensteins[20]) leicht erkennt, sind die Beschleunigungskomponenten $\frac{d\dot{u}}{dt}$ und $\frac{d\dot{w}}{dt}$ vorhanden und überall stetig; ferner befriedigen die Lösungen (90) der Gleichungen (29) und der Ausdruck (100) die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen des Problems und die Kontinuitätsgleichung. Wählt man $\dot{p}_\infty$ so groß, daß durchweg $\dot{p} > 0$ ist, so ist die Bewegung „realisierbar".

§ 5.

Beispiele.

1. Die einfachste Führungsbewegung wird zweifellos durch den ruhenden, unendlich langen Wirbelzylinder mit kreisförmigem Querschnitt (Radius $\hat{R}$) und mit $\eta = J$ (J konstant) geliefert. Die gesuchte zugehörige axialsymmetrische Bewegung wird dann durch einen Wirbelring charakterisiert, der sich in erster Näherung[21]) mit der Geschwindigkeit (vgl. (67))

$$\hat{w} = -\bar{w} = \frac{J\hat{R}^2}{2L}\log\frac{8L}{\hat{R}} \tag{101}$$

(L ist der konstante Abstand des Wirbelbereiches von der z-Achse) in Richtung der $+z$-Achse bewegt; dabei wird $\frac{\hat{R}}{L}$ als hinreichend klein angenommen. Bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen ordnet sich in diese Schar von Wirbelbewegungen die permanente Bewegung eines Wirbelringes ein, deren Existenz von Lichtenstein [vgl. l. c.[10]), S. 138ff.] gezeigt worden ist.

2. Wir betrachten als Führungsbewegung die bezüglich eines mitrotierenden Achsenkreuzes permanente Bewegung zweier unendlich langer paralleler Wirbelzylinder gleicher konstanter Wirbelstärke J und gleichen Querschnittes, deren Existenz von Lichtenstein [vgl. l. c.[10]), S. 127ff.] sichergestellt wurde. Die Normalschnitte dieser Zylinder sind Kreisen (Radius $\bar{R}$) benachbart, deren Mittelpunkte den Abstand Λ haben mögen. Dabei ist vorausgesetzt, daß $\frac{\bar{R}}{\Lambda}$ hinreichend klein ist. Wie sich zeigt, hat die Winkelgeschwindigkeit ω des rotierenden Achsenkreuzes den Wert

$$\omega = 2J\frac{\bar{R}^2}{\Lambda^2}(1+\omega_1), \qquad \omega_1 = O\left(\frac{\bar{R}}{\Lambda}\right). \tag{102}$$

Der in §1 eingeführte Kreis K_t wird hier für alle Zeiten die gleiche Größe und den gleichen Abstand von der z-Achse behalten[22]):

---

[20]) Vgl L. Lichtenstein, l. c. [1]), S. 265 und l. c. [9]), S. 433ff.

[21]) Vgl. die Bemerkungen in Fußnote [18]).

[22]) Da für die Gültigkeit von (65) $\frac{R_t}{L_t}$, fernerhin (vgl. (42)) auch $\frac{2(R_t+\mathfrak{V}^*)}{L_t-\mathfrak{V}^*}$ als hinreichend klein angenommen werden, so ist hier $\frac{\Lambda}{L_t}$ als „kleine" Größe anzusehen.

Wir nehmen an, daß sich zur Zeit t_0 die Wirbelverteilung der axialsymmetrischen Bewegung im Meridianschnitt mit der Verteilung der Führungsbewegung deckt ($\mathfrak{G}_0 = 0$) und wählen das a, c- bzw. x, z-System derart, daß der jetzt dauernd konstante Abstand L_t groß genug ist, um die erforderliche Kleinheit von $\frac{1}{L_t}$ und $\frac{2(R_t+\mathfrak{G}^*)}{L_t-\mathfrak{G}^*}$ sicherzustellen. Dann existiert nach unserem allgemeinen Existenzsatz eine Flüssigkeitsbewegung, die durch ein System zweier Wirbelringe, das sich in erster Näherung mit der (konstanten) Geschwindigkeit

$$\hat{w} = -\bar{w} = \frac{1}{2\pi L_t} \log \frac{8 L_t}{\sqrt{F}} \int_T \eta' \, d\tau'$$

in Richtung der $+z$-Achse bewegt, erzeugt wird. In unserem Falle ist $\eta = -J$; daher findet sich nach einer leichten Rechnung unter Beachtung von l. c.[10]), S. 127ff.

$$(103)\quad \hat{w} = -\frac{\bar{R}^2}{L_t}\left\{J(1+\bar{w}_1)\log\frac{8L_t}{\bar{R}} + \bar{w}_2\right\}, \qquad \bar{w}_1 = O\left(\frac{\bar{R}}{\Lambda}\right),\ \bar{w}_2 = O(1).$$

Setzen wir jetzt etwa $J < 0$ voraus und wählen $\frac{\bar{R}}{\Lambda}$ und $\frac{\bar{R}}{L_t}$ so klein, daß $\bar{w} > 0$ ausfällt, so bewegt sich das System der Wirbelringe in Richtung der $+z$-Achse. Es erweitern und verengern sich abwechselnd die Ringe, da deren Bewegung im Meridianschnitt in der durch (37) erklärten Umgebung der Führungsbewegung verbleibt; dabei kriecht wegen (102) mit Rücksicht auf $J < 0$, wenn nur $\frac{\bar{R}}{\Lambda}$ klein genug ist, der kleinere stets durch den größeren in der Richtung der Translation (103) hindurch.

Die Geschwindigkeit der Wirbelzylinder in ihrer Bahn hat, bezogen auf ein festes Achsenkreuz, wegen (102) den Wert

$$(104)\qquad \omega\frac{\Lambda}{2} = J\frac{\bar{R}^2}{\Lambda}(1+\omega_1).$$

Wegen (103) und (104) ist im allgemeinen für hinreichend kleine $\frac{\bar{R}}{\Lambda}$ gewiß $\omega\frac{\Lambda}{2}$ wesentlich größer als $\hat{w}$ [vgl. [22])]; daher führt der äußere Ring eine rückläufige Bewegung aus.

Wir haben somit einen Grenzfall der von Helmholtz qualitativ betrachteten Bewegung zweier Wirbelringe vor uns. Die Existenz einer *allgemeinen* Bewegung der betrachteten Art ist nach wie vor unbewiesen. Auch gelang es bisher nicht, eine *periodische* Bewegung zweier Wirbelringe als möglich nachzuweisen.

Immerhin dürften sich auf dem beschrittenen Wege eine Anzahl weiterer axialsymmetrischer Bewegungen auf ihre Existenz untersuchen lassen.

(Eingegangen am 6. Oktober 1938.)

Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes. II.

Von

J. Heinhold in München.

Im folgenden werden dieselben Bezeichnungen benutzt, wie in der vorhergehenden gleichbetitelten Arbeit[1]). In jener wurden u. a. die Funktionen von n (n ganzzahlig)

$$\varphi\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{n}\right) = \varphi_1\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

$$\varphi\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{n}{2n+1}\right) = \varphi_1\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{n}{2n+1}\right) \tag{2}$$

für *gerades* $n > 0$ bzw. $\geqq 0$, und die zugehörigen Zahlenpaare $(\mu_1; \nu_1)$ angegeben (vgl. dort Satz 5, Gleichung (16a), mit $p = 0$ und Gleichung (14a)). Es ist das Ziel der gegenwärtigen Arbeit, die obigen Funktionen von n mit den zugehörigen Zahlenpaaren $(\mu_1; \nu_1)$ für *ungerades* $n > 1$ zu berechnen[2]). Wir bekommen in diesem Fall für φ andere Funktionen von n als im Fall gerader n. Von den in Rede stehenden indefiniten Formen sind dabei für verschiedene n keine zwei Formen äquivalent.

A.

Um die untere Grenze $\varphi\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{n}\right)$ für ungerade $n > 1$ zu erhalten, parkettieren wir die Ebene mit Quadraten der Seitenlänge 1 in der Weise, wie nachfolgende Figur angibt; dabei habe die kleinere Seite der kongruenten Rechteckslücken die Länge

$$l = \frac{2p+1}{2p+3} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

In diesem Fall liegen im Innern des von den Quadratdiagonalen $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ durch A_0 bzw. B_0 gebildeten Parallelstreifens keine Quadratmittelpunkte und also keine Quadratdiagonalen. Dagegen liegen im Innern des von den beiden Quadratdiagonalen a_0 und b_0 durch A_0 bzw. B_0 gebildeten Parallelstreifens genau $2p + 1$ parallele Diagonalen durch die Quadratmittelpunkte im Innern dieses Streifens. Wir bezeichnen die B_0 zunächst gelegenen $p + 1$ Quadrat-

[1]) Math. Zeitschr. 44 (1938), 659—688. Im Anschluß an diese Arbeit wird die vorliegende mit II bezeichnet.

[2]) Die in Satz 4 der oben zitierten Arbeit angegebenen Schranken würden für ungerades $n > 1$ nicht die untere Grenze liefern.

mittelpunkte über der Geraden $A_0 B_0$ im Parallelstreifen $a_0 b_0$ nach wachsendem Abstand von B_0 mit $B_1, B_2, \ldots, B_{p+1}$, die zugehörigen Diagonalen in diesem Streifen mit $b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}$. b_{p+1} geht dann stets durch den Mittelpunkt 0 der Rechteckslücke $\mathfrak{R}$ zwischen den beiden Quadraten um A_0 und B_0 (siehe Figur).

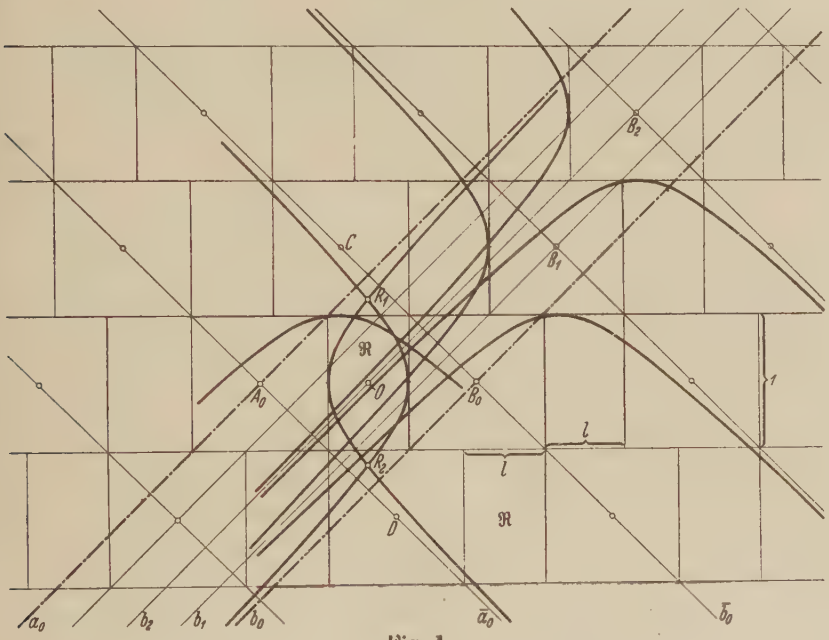


Fig. 1.

Nun wählen wir den Punkt 0 zum Ursprung eines ξ, η-Koordinatensystems, dessen Achsen parallel zu den Quadratseiten sind und legen um jedes Quadrat der Parkettierung das zu

(4) $$\left|\xi - \frac{1+l}{2} + \eta\right| \left|\xi - \frac{1+l}{2} - \eta\right| \leqq \frac{1}{4}$$

kongruente Hyperbelkreuz mit den Quadratdiagonalen als Asymptoten. Diese Kreuze vergrößern wir nun sämtlich im selben Verhältnis ähnlich zu ihren Mittelpunkten, bis der Schnittpunkt

$$R_1\left(\xi = 0;\ \eta = \sqrt{\left(\frac{1+l}{2}\right)^2 - \lambda^2}\right)$$

von

$$\left(\xi + \frac{1+l}{2}\right)^2 - \eta^2 - \lambda^2 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\xi - \frac{1+l}{2}\right)^2 - \eta^2 - \lambda^2 = 0$$

(vgl. Figur) auf den Rand des Kreuzes um B_{p+1}

$$\left[\xi - \frac{1+l}{2} - (1+l)\,(p+1) + \eta\right]\left[\xi - \frac{1+l}{2} + (1-l)\,(p+1) - \eta\right] = \lambda^2$$

zu liegen kommt. Das ist $\left(l = \frac{2p+1}{2p+3} \text{ eingesetzt}\right)$ der Fall für

$$\lambda^2 = \bar{\lambda}^2 = \frac{4(p+1)^2}{(2p+3)^2}\left(1 - \frac{1}{(2p+3)^2}\right), \tag{5}$$

$$R_1\left(0;\ 2\frac{p+1}{(2p+3)^2}\right). \tag{6}$$

$R_2\left(0;\ -2\frac{p+1}{(2p+3)^2}\right)$ liegt dann auf dem entsprechenden Rand des zum Spiegelbild von B_{p+1} bezüglich 0 gehörenden Kreuzes mit derselben Asymptote b_{p+1}.

Da

$$\bar{\lambda}^2 \geqq \frac{4(p+1)^2}{(3p+3)^2}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{32}{81} > \frac{1}{4},$$

also die zu (4) kongruenten Kreuze wirklich vergrößert wurden, so ist nach dieser Vergrößerung die ganze Ebene lückenlos überdeckt.

Es läßt sich aber auch λ^2 nicht mehr verkleinern, ohne daß eine Lücke in der Überdeckung entsteht.

Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir, indem wir zunächst für λ^2 den Wert $\bar{\lambda}^2$ beibehalten, die Kreuze um die Punkte B_k, $k = 1, 2, \ldots, p+1$. Die Begrenzung eines solchen Kreuzes hat die Gleichung

$$\left|\xi - \frac{1+l}{2} - kl + \eta - k\right| \left|\xi - \frac{1+l}{2} - kl - \eta + k\right| = \bar{\lambda}^2. \tag{7}$$

Da R_1 auf dem Rand des Kreuzes um B_{p+1} gelegen ist, so liegt

(a) R_2 außerhalb des Kreuzes um B_{p+1}.

(b) Ferner liegt R_2 noch außerhalb der Kreuze um B_k mit $k = 1, 2, \ldots, p-1$ und auf dem Rand des Kreuzes um B_p.

Legen wir nämlich um B_k ein Kreuz, das den Punkt $R_2\left(0; -2\frac{p+1}{(2p+3)^2}\right)$ auf seiner Begrenzung

$$\left[\xi - \frac{1+l}{2} - kl + \eta - k\right]\left[\xi - \frac{1+l}{2} - kl - \eta + k\right] = s_k$$

enthält, so ergibt sich hierfür

$$s_k = \frac{8(p+1)^2}{(2p+3)^2}\left[\frac{p+2}{2p+3} + k\right]\left[2\frac{p+1}{2p+3} - \frac{k}{p+1}\right].$$

Nun ist aber

$$\left[\frac{p+2}{2p+3} + k\right]\left[2\frac{p+1}{2p+3} - \frac{k}{p+1}\right] = \frac{k(p-k)}{p+1} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(2p+3)^2}\right]$$
$$\geqq \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(2p+3)^2}\right],$$

also stets $s_k \geqq \bar{\lambda}^2$ (vgl. (5)), wobei das Gleichheitszeichen nur für $k = 0$ und $k = p$ gilt. Damit ist die Behauptung (b) bewiesen.

(c) Für $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$ liegt R_1 außerhalb des Kreuzes um C und damit auch R_2 außerhalb des Kreuzes um D (vgl. Figur).

Setzen wir nämlich in die Gleichung des entsprechenden Randes

$$\left|\xi + \frac{1-l}{2} + \eta - 1\right| \left|\xi + \frac{1-l}{2} - \eta + 1\right| = \lambda_C^2$$

mit $l = \frac{2p+1}{2p+3}$ die Koordinaten des Punktes R_1 (Gleichung (6)) ein, so ist

$$\begin{aligned}\lambda_C^2 &= \left|\frac{1}{2p+3} + 2\frac{p+1}{(2p+3)^2} - 1\right| \left|\frac{1}{2p+3} - 2\frac{p+1}{(2p+3)^2} + 1\right| \\ &= \frac{4(p+1)}{(2p+3)^2}\left[1 - \frac{1}{2p+3}\right]\left[p + 2 - \frac{p+1}{2p+3}\right] \\ &= \frac{4(p+1)}{(2p+3)^2}\left[1 - \frac{1}{2p+3}\right]\left[p+1+\frac{p+2}{2p+3}\right] > \frac{4(p+1)^2}{(2p+3)^2}\left[1 - \frac{1}{(2p+3)^2}\right] = \bar{\lambda}^2.\end{aligned}$$

Betrachten wir daher die Kreuze um B_k ($k = 0, 1, \ldots, p+1$), so liegt wegen (a), (b), (c) und da für $k = 1, 2, \ldots, p$ stets $s_k > 0$ ist, das Hyperbelzweieck $R_1 R_2$ außerhalb der Kreuze um B_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) und um C, D. Das Kreuz um B_{p+1} aber läßt an der Ecke R_2 ein Stück des Zweiecks unbedeckt.

Ebenso liegt das Zweieck $R_1 R_2$ außerhalb der Kreuze um die Spiegelpunkte B'_k von B_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) bezüglich 0 und um C, D, während das Kreuz um B'_{p+1} (Spiegelpunkt von B_{p+1} bezüglich 0) mit der Asymptote b_{p+1} an der Ecke R_1 ein Stück des Zweiecks unbedeckt läßt.

Die Kreuze um B_{p+1} und B'_{p+1} überdecken auf Grund der Definition von $\bar{\lambda}^2$ das Zweieck $R_1 R_2$ vollständig. Verkleinern wir aber jetzt die Kreuze um die sämtlichen Quadratmittelpunkte im selben Verhältnis, so ergibt sich aus den soeben gemachten Feststellungen zunächst, daß die Kreuze um B_{p+1} und B'_{p+1} eine gewisse Umgebung von R_1 und R_2 unbedeckt lassen und daß die Kreuze um B_k und B'_k mit $k = 1, 2, \ldots, p$, sowie die Kreuze um C und D diese Umgebung ebenfalls nicht bedecken. Aber auch alle andern Kreuze können eine Bedeckung nicht bewirken, da die in das Rechteck $\mathfrak{R}$ hineinragenden Arme in $\mathfrak{R}$ offenbar innerhalb der betrachteten Kreuze um $A_0, B_0, C, D, B_k, B'_k$ verlaufen. Damit ist gezeigt, daß λ^2 sich nicht unter $\bar{\lambda}^2$ herabdrücken läßt.

Nun transformieren wir ξ, η affin,

$$\xi = \alpha x + \beta y + a, \qquad \eta = \gamma x + \partial y + b,$$

so, daß die Quadratmittelpunkte in Gitterpunkte eines quadratischen x, y-Gitters übergehen; dabei sollen die folgenden Punkte einander entsprechen:

$$\begin{array}{llll} \xi = -\frac{1+l}{2} : x = 0, & \xi = \frac{1-l}{2} : x = 1, & \xi = -\frac{1-l}{2} : x = 0, \\ \eta = 0 \quad\;\; : y = 0, & \eta = -1 \;\; : y = 0, & \eta = 1 \quad\;\; : y = 1, \end{array} \tag{8}$$

also

$$\alpha = 1; \qquad \beta = l; \quad a = -\frac{1+l}{2};$$
$$\gamma = -1; \quad \partial = 1; \quad b = 0;$$

somit

$$(9) \qquad (T) \qquad \begin{cases} \xi = x + l\,y - \frac{1+l}{2}, \\ \eta = -x + y. \end{cases}$$

Setzen wir den Wert von l ein und führen die Transformation (T) auf die Ungleichung des Hyperbelkreuzes um A_0

$$(10) \qquad \left|\xi + \frac{1+l}{2} + \eta\right| \left|\xi + \frac{1+l}{2} - \eta\right| \leqq \bar{\lambda}^2$$

und auf die Koordinaten der Punkte R_1, R_2 aus, so erhalten wir das Ergebnis: Zu beliebigen Punkten $(\mu; \nu)$ gibt es stets homologe Punkte $(x; y)$, $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$(11) \qquad \left|x - \frac{1}{2p+3}y\right| \, |y| \leqq 2(p+2)\frac{(p+1)^2}{(2p+3)^3},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur notwendig ist für

$$\mu \equiv \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\,\frac{2p+1}{(2p+3)^2}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots.$$
$$\nu \equiv \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\,\frac{1}{2p+3},$$

D. h. in der Schreibweise der anfangs zitierten Arbeit[3]):

Satz 6.

$$\varphi\left(0; \tfrac{1}{2}; -\frac{1}{2p+3}\right) = \varphi_1\left(0; \tfrac{1}{2}; -\frac{1}{2p+3}\right) = 2(p+2)\,\frac{(p+1)^2}{(2p+3)^3}$$

mit

$$\mu_1 \equiv \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\,\frac{2p+1}{(2p+3)^2}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots.$$
$$\nu_1 \equiv \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\,\frac{1}{2p+3},$$

B.

In ähnlicher Weise wie unter A ergibt sich die untere Grenze $\varphi\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{n}{2n+1}\right)$ für ungerades $n > 1$. Wir parkettieren die Ebene mit Quadraten der Seitenlänge 1 wie in der vorhergehenden Figur (S. 177), wobei wir nun der einen Rechtecksseite die Länge

$$(12) \qquad l = \frac{1}{4p+3} \qquad (p \text{ natürliche Zahl})$$

---

[3]) Im Anschluß an diese Arbeit bezeichnen wir den folgenden Satz mit „Satz 6".

geben. Im Innern des von $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ gebildeten Parallelstreifens liegen dann wieder keine Quadratdiagonalen, im Innern des Streifens $a_0 b_0$ hingegen $2p+1$ Diagonalen.

Wir bezeichnen nun die oberhalb der Geraden $A_0 B_0$ im Parallelstreifen $a_0 b_0$ dem Punkt A_0 zunächst gelegenen $p+1$ Quadratmittelpunkte nach wachsendem Abstand von A_0 mit $A_1, A_2, \ldots, A_{p+1}$, die zugehörigen Diagonalen im Streifen mit $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$. a_{p+1} geht dann wieder durch den Mittelpunkt 0 des Rechtecks $\mathfrak{R}$, die Parallelen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ liegen in diesem Fall aber links von a_{p+1} in wachsendem Abstand von A_0.

Durch 0 legen wir wie auf Seite 177 ein ξ, η-Koordinatensystem und translatieren das Kreuz

$$\left|\xi + \frac{1+l}{2} + \eta\right| \left|\xi + \frac{1+l}{2} - \eta\right| \leqq \frac{1}{4} \tag{13}$$

zu jedem Quadratmittelpunkt der Parkettierung als Mittelpunkt. Diese Kreuze vergrößern wir dann ähnlich zu ihren Mittelpunkten im selben Verhältnis bis der Punkt R_1 (vgl. S. 177, unten) auf den Rand des Kreuzes um A_{p+1}

$$\left[\xi + \frac{1+l}{2} - (1+2l)(p+1) + \eta - p - 1\right]\left[\xi + \frac{1+l}{2} - (1+2l)(p+1) - \eta + p + 1\right] = \lambda^2$$

zu liegen kommt. Das ist $\left(l = \frac{1}{4p+3}\right.$ eingesetzt$\left.\right)$ der Fall für

$$\lambda^2 = \bar{\lambda}^2 = \frac{4(p+1)^2}{(4p+3)^2}\left(1 - \frac{1}{(4p+3)^2}\right), \tag{14}$$

$$R_1\left(0;\ 2\frac{p+1}{(4p+3)^2}\right). \tag{15}$$

$R_2\left(0;\ -2\frac{p+1}{(4p+3)^2}\right)$ liegt dann auf dem entsprechenden Rand des zum Spiegelpunkt von A_{p+1} bezüglich 0 gehörenden Kreuzes mit derselben Asymptote a_{p+1}.

Da

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{16(p+1)^3(4p+2)}{(4p+3)^4} = \frac{1}{4}\,\frac{(4p+3+1)^3(4p+3-1)}{(4p+3)^4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2(4p+4)(4p+3)(4p+2)-1}{4(4p+3)^4} > \frac{1}{4},$$

also die zu (13) kongruenten Kreuze wirklich vergrößert wurden, so ist für $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$ die ganze Ebene lückenlos überdeckt.

Es läßt sich aber auch λ^2 nicht verkleinern, ohne daß in der Überdeckung der Ebene durch die Kreuze eine Lücke entsteht.

Hierzu betrachteten wir die Kreuze um A_k $(k = 1, 2, \ldots, p+1)$. Für $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$ liegt R_1 auf dem Rand des Kreuzes um A_{p+1}, also

(a) R_2 außerhalb des Kreuzes um A_{p+1}.

(b) Ferner liegt für $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$ der Punkt R_1 außerhalb der Kreuze um A_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

Legen wir nämlich um A_k ein Kreuz, das den Punkt $R_1\left(0; 2\frac{p+1}{(4p+3)^2}\right)$ auf seiner Begrenzung

$$\left[\xi + \frac{1+l}{2} - (1+2l)k + \eta - k\right]\left[\xi + \frac{1+l}{2} - (1+2l)k - \eta + k\right] = s_k$$

enthält, so ist

$$s_k = \frac{4(p+1)^2}{(4p+3)^2}\left[\frac{p+1}{4p+3} - k\right]\left[\frac{8(2p+1)}{4p+3} - \frac{4}{p+1}k\right].$$

Da

$$\left[k - \frac{p+1}{4p+3}\right]\left[8\frac{2p+1}{4p+3} - \frac{4}{p+1}k\right] = \frac{4k(p+1-k)}{p+1} - 1 + \frac{1}{(4p+3)^2}$$
$$\geqq \frac{4p}{p+1} - 2 + \frac{2}{(4p+3)^2} + 1 - \frac{1}{(4p+3)^2} > 1 - \frac{1}{(4p+3)^2},$$

ist stets $-s_k > \bar{\lambda}^2$ und damit die Behauptung (b) bewiesen.

(c) Für $\lambda^2 = \bar{\lambda}^2$ liegt R_1 außerhalb des Kreuzes um C und damit auch R_2 außerhalb des Kreuzes um D (vgl. Figur).

Setzen wir nämlich in die Gleichung des entsprechenden Randes

$$\left|\xi + \frac{1-l}{2} + \eta - 1\right|\left|\xi + \frac{1-l}{2} - \eta + 1\right| = \lambda_C^2$$

mit $l = \frac{1}{4p+3}$ die Koordinaten des Punktes R_1 (Gleichung (15)) ein, so ist

$$\lambda_C^2 = \left|\frac{2p+1}{4p+3} + 2\frac{p+1}{(4p+3)^2} - 1\right|\left|\frac{2p+1}{4p+3} - 2\frac{p+1}{(4p+3)^2} + 1\right|$$
$$= \frac{4(p+1)}{(4p+3)^2}\left|\frac{1}{4p+3} - 1\right|\left|3p + 2 - \frac{p+1}{4p+3}\right|$$
$$> \frac{4(p+1)}{(4p+3)^2}\left[1 - \frac{1}{4p+3}\right]\left[2p + 2 + \frac{2p+2}{4p+3}\right]$$
$$= \frac{8(p+1)^2}{(4p+3)^2}\left(1 - \frac{1}{(4p+3)^2}\right) > \bar{\lambda}^2.$$

Betrachten wir nun die Kreuze um A_k $(k = 0, 1, \ldots, p+1)$, so liegt wegen (a), (b), (c) und da für $k = 1, 2, \ldots, p$, $s_k < 0$ ist, das Hyperbelzweieck R_1R_2 außerhalb der Kreuze um A_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ und um C, D. Das Kreuz um A_{p+1} läßt noch an der Ecke R_2 ein Stück des Zweiecks unbedeckt. In analoger Weise wie in A ergibt sich daher unter Berücksichtigung der Kreuze um die Spiegelpunkte A_k' von A_k bezüglich 0, daß λ^2 nicht mehr zu verkleinern ist.

Führen wir nun wieder die Transformation (T) von Seite 180, Gleichung (9) auf die Ungleichung (10), S. 180, des Kreuzes um A_0 und auf die Koordinaten der Punkte R_1, R_2 (Gleichung (15)) aus, so erhalten wir für $l = \frac{1}{4p+3}$ das

Ergebnis: Zu beliebigen Punkten $(\mu; \nu)$ gibt es stets homologe Punkte $(x; y)$, $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$\left| x - \frac{2p+1}{4p+3} y \right| |y| \leqq 4(2p+1) \frac{(p+1)^2}{(4p+3)^3}, \tag{16}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur notwendig ist für

$$\mu \equiv \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \frac{1}{(4p+3)^2}, \qquad p = 1, 2, \ldots;$$
$$\nu \equiv \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{4p+3},$$

d. h.

Satz 6a:

$$\varphi\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{2p+1}{4p+3}\right) = \varphi_1\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{2p+1}{4p+3}\right) = 4(2p+1)\frac{(p+1)^2}{(4p+3)^3}$$

mit

$$\mu_1 \equiv \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \frac{1}{(4p+3)^2}, \qquad p = 1, 2, \ldots.$$
$$\nu_1 \equiv \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{4p+3},$$

Wir beweisen nun den Satz:

Keine zwei in Satz 6 und Satz 6a vorkommenden Formen sind zueinander äquivalent und werden auch nicht nach Multiplikation mit einer Konstanten äquivalent.

Äquivalente Formen haben dieselbe Diskriminante und dieselbe untere Grenze. Die sämtlichen Formen von Satz 6 und Satz 6a haben die Diskriminante $\frac{1}{4}$. Wären daher zwei Formen nach Multiplikation mit einer Konstanten zueinander äquivalent, so wären sie das auch schon ohne vorherige Multiplikation. Es müßten deshalb auch die zugehörigen unteren Grenzen einander gleich sein.

Nun ist aber in Satz 6

$$\varphi_1(p) = 2(p+2)\frac{(p+1)^2}{(2p+3)^3} = 2(p+1)\frac{p^2}{(2p+1)^3} \cdot \frac{8p^5+36p^4+58p^3+43p^2+15p+2}{8p^5+36p^4+54p^3+27p^2}$$
$$> 2(p+1)\frac{p^2}{(2p+1)^3} = \varphi_1(p-1),$$

also die untere Grenze φ mit p monoton wirklich wachsend, und daher sind für verschiedene p keine zwei Formen von Satz 6 äquivalent.

Für die Formen von Satz 6a ist

$$\varphi_1(p) = 4(2p+1)\frac{(p+1)^2}{(4p+3)^3} = 4(2p-1)\frac{p^2}{(4p-1)^3} \cdot \frac{128p^6+224p^5+40p^4-70p^3-5p^2+8p-1}{128p^6+224p^5+72p^4-54p^3-27p^2}$$
$$< 4(2p-1)\frac{p^2}{(4p-1)^3} = \varphi_1(p-1),$$

also die untere Grenze φ mit wachsendem p monoton wirklich abnehmend, und daher sind für verschiedene p keine zwei Formen von Satz 6a einander äquivalent.

Es kann aber auch keine Form von Satz 6 äquivalent sein einer solchen von Satz 6a, denn es ist die untere Grenze in Satz 6

$$\varphi_1(p) \geqq \varphi_1(0) = \frac{4}{27},$$

dagegen die untere Grenze in Satz 6a

$$\varphi_1(p) \leqq \varphi_1(1) = \frac{4 \cdot 12}{343} < \frac{4}{27}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Schließlich ist auch keine Form aus Satz 6 oder Satz 6a bereits unter den Formen von Satz 5 der anfangs zitierten Arbeit enthalten.

Die Diskriminante hat nämlich für sämtliche Formen den Wert $\frac{1}{4}$. Die unteren Grenzen von Satz 5 hingegen sind von den unteren Grenzen von Satz 6 und Satz 6a verschieden; denn die Grenzen φ_1 von Satz 5 lassen sich als gemeine Brüche mit ungeradem Zähler und geradem Nenner schreiben, während die Grenzen φ_1 in Satz 6 und Satz 6a geraden Zähler und ungeraden Nenner besitzen.

Bringen wir φ_1 noch in die Gestalt (1) bzw. (2) von S. 176, so ergeben sich zusammen mit Satz 5 die unteren Grenzen

$$(1)\quad \varphi\left(0; \tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{n}\right) = \varphi_1\left(0; \tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right) & \text{für } n = 2(p+1), \\ \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) & \text{für } n = 2p+3; \end{cases}$$

$$(2)\quad \varphi\left(0; \tfrac{1}{2}; -\tfrac{n}{2n+1}\right) = \varphi_1\left(0; \tfrac{1}{2}; -\tfrac{n}{2n+1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,\frac{n+1}{2n+1} & \text{für } n = 2p, \\ \frac{n(n+1)^2}{(2n+1)^3} & \text{für } n = 2p+3; \end{cases}$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots.$$

(Eingegangen am 24. Dezember 1938.)

On the representation of integral functions by general basic series.

By

B. Cannon.

1. Introduction.

It will be useful to state at once the following definitions concerning the order and type of integral functions[1]). Let $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ be an integral function and let $M(r)$ be its maximum modulus on $|z| = r$. The *order* is given by

$$\varrho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\log n}{\log |a_n|^{-1}}. \tag{1.1}$$

If $0 < \varrho < \infty$ the *type* is

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\varrho} = \frac{1}{e\varrho}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{1/\varrho}|a_n|^{1/n}\right)^\varrho. \tag{1.2}$$

We shall say that an integral function is of *increase less than* order p, type q if its order ϱ and type σ satisfy one or other of the conditions

$$\text{(i) } \varrho < p \qquad \text{(ii) } \varrho = p, \quad \sigma < q. \tag{1.3}$$

As regards basic series, a general theory of series of the type

$$A_0 p_0(z) + A_1 p_1(z) + \ldots, \tag{1.4}$$

where $p_0(z)$, $p_1(z)$, ... is a given set of polynomials, has been developed by J. M. Whittaker[2]). The polynomials are assumed to form a *basic set*, i. e. they are such that an arbitrary polynomial can be expressed in one and only one way as a finite linear combination of the given polynomials. This is certainly the case if $p_n(z)$ is of degree n, but of course this condition is not necessary. If the equations expressing 1, z, z^2, ... in terms of the given polynomials are represented in general by

$$z^n = \pi_{n0} p_0(z) + \pi_{n1} p_1(z) + \ldots \tag{1.5}$$

---

[1]) Valiron, *Integral functions* (Toulouse, 1923).

[2]) *Interpolatory function theory* (Cambridge Tract, 1935). We are not concerned here with series in which the polynomials employed depend on the function expanded. Such series have been studied frequently, as, for example, by Walsh in *Interpolation and approximation* (American Math. Soc. Colloquium Publications, 1935).

and if $f(z)$ is a function regular at $z = 0$, then the series (1. 4) can be written

$$p_0(z)\,\Pi_0 f(0) + p_1(z)\,\Pi_1 f(0) + \ldots \tag{1. 6}$$

where

$$\Pi_n f(0) = \pi_{0n} f(0) + \pi_{1n} f'(0) + \frac{1}{2!}\pi_{2n} f''(0) + \ldots.$$

In general (1, 6) is an infinite series, though it is a finite series when $f(z)$ is a polynomial[3]). (1. 6) is called the *basic series* associated with the polynomials.

Many particular cases of series of polynomials have been exhaustively studied. Taylor's series is the simplest case, and other familiar examples are the expansions of interpolatory function theory and series of the polynomials of Legendre, Laguerre, Hermite and Bernoulli. In all this work the particular properties of the polynomials studied are exploited to the full.

The following work is concerned with the general basic series. Whittaker[1]) has shown that it represents all integral functions of sufficiently low order. We examine this fact more closely and the analogous property concerning functions with a finite radius of regularity is also considered.

It will be convenient to use the following terminology. The *circle of regularity* of a function is the circle with centre at the origin which passes through the nearest singularity, and its radius is the *radius of regularity*. A basic series *represents* $f(z)$ *in* $|z| = R$ if it converges to $f(z)$ uniformly in any smaller circle with centre at the origin; and *represents* $f(z)$ *in and on* $|z| = R$ if it converges to $f(z)$ uniformly in $|z| \leqq R$. In the latter case R may be zero, the basic series being then convergent at the origin only. A basic series *represents an integral function* $f(z)$ *in the whole plane* if it represents $f(z)$ in every circle which has a finite radius of regularity.

There is, as one might expect, a definite correspondence between the theory of functions and the theory of basic sets. Whittaker introduced the function

$$\omega_n(R) = \sum_{i=0}^{\infty} |\pi_{ni}|\, M_i(R), \tag{1. 7}$$

where

$$M_i(R) = \max_{|z|=R} |p_i(z)|,$$

and proved the following result:

Lemma 1. *If* $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ *is such that*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, \omega_n(R) \tag{1. 8}$$

converges, the basic series (1. 6) *represents* $f(z)$ *in and on* $|z| = R$.

---

[3]) Whittaker, op. cit., 7.

Whittaker[4]) also introduced the idea of the order and type of a basic et of polynomials and defined them in the following way. The *order* is

1. 9) $$\omega = \lim_{R \to \infty} \omega(R)$$

vhere

$$\omega(R) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n}.$$

f $0 < \omega < \infty$ the *type* is

1. 10) $$\gamma = \lim_{R \to \infty} \gamma(R)$$

vhere

$$\left\{\frac{\omega \gamma(R)}{e}\right\}^{\omega} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \{\omega_n(R)\}^{1/n} n^{-\omega}.$$

It is evident that $\omega(R)$, $\gamma(R)$ are increasing functions so that the imits (1. 9), (1. 10) exist. As in the case of integral functions, a basic set will e of *increase less than* order p, type q, if its order ω and type γ satisfy one or ther of the conditions (i) $\omega < p$, (ii) $\omega = p$, $\gamma < q$.

Lemma 1 and (1. 9), (1. 10) lead to the following results[5]).

(1) *If* $\{p_n(z)\}$ *is a basic set of order* ω, *type* γ *then the associated basic eries* (1. 6) *represents all integral functions of increase less than order* $1/\omega$, *ype* $1/\gamma$.

(2) *If* $\{p_n(z)\}$ *is a basic set of order* ω, *type* γ *and* $A\ (\neq 0)$, B *are any onstants then* $\{p_n(Az + B)\}$ *is a basic set of order* ω, *type* $|A|^{-1/\omega} \gamma$.

Let N_n denote the number of non-zero coefficients π_{ni} in (1. 6). Our irst theorem can be stated as follows.

Theorem 1. *Let* $p_0(z)$, $p_1(z)$, ... *be a basic set of polynomials for which*

1. 11) $$N_n^{1/n} \to 1 \quad as \quad n \to \infty.$$

Then a necessary and sufficient condition for the basic series (1. 6) *to represent ll integral functions of increase less than order* p, *type* q, *is that*

1. 12) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\left(\frac{e\,p\,q}{n}\right)^{1/p} \{\omega_n(R)\}^{1/n}\right] \leqq 1 \quad for\ every \quad R \geqq 0.$$

It is clear that p and q cannot be zero or infinite so that all functions of nfinite order are excluded from the above theorem.

The definition of the order of an integral function, $\sum_0^{\infty} a_n z^n$, depends pon a comparison of $\log |a_n|^{-1}$ with a monotone function $\Phi(n)$. In (1. 1),

[4]) Whittaker, op. cit., 11.

[5]) Whittaker, op. cit., 12, 13.

$\Phi(n) = n \log n$. A more subtle choice of $\Phi(n)$ would bring within the range of theorem 1 some integral functions which are of infinite order when classified by (1. 1), but of course the basic set of polynomials would have to be of sufficiently low order. The definition of type might also be modified in the same way. But, speaking generally, we should gain nothing, since it is impossible to choose $\Phi(n)$ so as to bring all integral functions within the range of theorem 1.

The right-hand side of (1. 1) is infinite for functions with a finite radius of regularity so that, in this respect, they are like integral functions of infinite order. The analogue of theorem 1 for functions with a finite radius of regularity can be stated in the following way.

Theorem 2. *Let* $p_0(z), p_1(z), \ldots$ *be a basic set of polynomials satisfying* (1. 11). *Then a necessary and sufficient condition for the series* (1. 6) *to represent every function in its circle of regularity is that*

$$\{\omega_n(R)\}^{1/n} \to R \quad as \quad n \to \infty \quad for\ every\ R \geqq 0. \tag{1. 13}$$

It appears that when $N_n^{1/n} \to 1$, the function $\omega_n(R)$, crude though it looks, is an accurate guide to the convergence properties of the basic series.

The condition (1. 11) is sufficiently wide to cover all ordinary cases but the general case can also be treated. (1. 12), (1. 13) are replaced by similar but more complicated conditions and we show by means of examples that these are not always the same as the former. Theorems 1 and 2 therefore become false if (1. 11) is omitted. Examples are also given to show that the new conditions are sometimes essentially the same as (1. 12), (1. 13) even though (1. 11) may not be satisfied.

The discussion of the general case leads to a suggestion for a new definition of the order and type of a basic set. If by (1. 9), (1. 10) a basic set is of order ω, type γ then by the new definition it will be of *Order* F, *Type* Γ. We show that the definitons are consistent for the case $N_n^{1/n} \to 1$. The extensions of Whittaker's results (1) and (2) are proved. (1) is shown to be "best possible" if the basic set satisfies (1. 11). The extension of (1) is found to be "best possible" without any restriction.

2. The condition $N_n^{1/n} \to 1$.

Lemma 2. *If* $N_n^{1/n} \to 1$ *as* $n \to \infty$ *and if, for some* $R \geqq 0$, $\sum_0^\infty a_n z^n$ *is regular in and on* $|z| = R$ *and such that*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{|a_n| \omega_n(R)\}^{1/n} > 1, \tag{2. 1}$$

then there exists a function $\sum_0^\infty g_n z^n$, *where*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{g_n}{a_n}\right|^{1/n} \leqq 1, \tag{2.2}$$

which is not represented by the basic series on $|z| = R$.

The sum by rows of the double series

$$\sum_{n,i} |a_n \pi_{ni}|\, M_i(R)$$

is divergent by (2.1). Hence the double series is itself divergent. It follows that either

(i) $\sum_{n=0}^\infty |a_n \pi_{ni}|$ is divergent for some i,

or (ii) $\sum_{n=0}^\infty |a_n \pi_{ni}|$ converges to S_i for all i,

but $\sum_{i=0}^\infty S_i M_i(R)$ is divergent.

Case (i). It is clear that if $\sum_{n=0}^\infty a_n \pi_{ni}$ is divergent for some i then the corresponding $\Pi_i f(0)$ in (1.6) would not exist so that $\sum_0^\infty a_n z^n$ would be the required function. We can therefore assume that $\sum_{n=0}^\infty a_n \pi_{ni}$ is convergent for every i.

To make the hypothesis (i) more definite suppose it is true for $i = 0$, i.e. $\sum_{n=0}^\infty |a_n \pi_{n0}|$ is divergent.

Thus, $\sum_{n=0}^\infty a_n \pi_{n0}$ is convergent, but not absolutely. It follows that $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n \pi_{n0}|^{1/n} = 1$. Hence we can choose a sequence $d_1, d_2, \ldots$ such that

$$|a_{d_k} \pi_{d_k 0}|^{1/d_k} \to |1 \text{ as } k \to \infty.$$

The function

$$g(z) = \sum_0^\infty g_n z^n,$$

where

$$g_n = a_n/|a_n \pi_{n0}| \qquad (n = d_1, d_2, \ldots)$$

$$g_n = 0 \text{ otherwise},$$

clearly satisfies (2.2) and $|g_n \pi_{n0}| = 1$ $(n = d_1, d_2, \ldots)$. Hence $\Pi_0 g(0) = \sum_{n=0}^\infty g_n \pi_{n0}$ does not exist, so that $g(z)$ is the required function. This disposes of case (i).

Case (ii). If $N_n^{1/n} \to 1$, it is clear from (2. 1) that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{\max_i |a_n \pi_{n\,i} M_i(R)|\}^{1/n} > 1.$$

It follows that we can choose a sequence

$$n_1, n_2, \ldots \tag{2. 3}$$

such that

$$\{\max_i |a_n \pi_{n\,i} M_i(R)|\}^{1/n} > \alpha \quad (\alpha > 1; n = n_1, n_2, \ldots).$$

Let

$$|a_{n_k} \pi_{n_k p_k}| M_{p_k}(R) = \max_i |a_{n_k} \pi_{n_k i} M_i(R)|.$$

Then

$$|a_{n_k} \pi_{n_k p_k}| M_{p_k}(R) > \alpha^{n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2. 4}$$

If all the terms $\pi_{n_k p_k}$ are in a finite number of columns, an infinite number must be in one of these columns, say the first. Then

$$|a_{n_k} \pi_{n_k 0} M_0(R)| > \alpha^{n_k}$$

for an infinity of k; and since $\alpha > 1$,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n \pi_{n0} M_0(R)|^{1/n} > 1,$$

whence

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n \pi_{n0}|^{1/n} > 1,$$

so that $\sum_0^\infty |a_n \pi_{n0}|$ is divergent. This contradiction of our hypothesis (ii) implies that the terms $\pi_{n_k p_k}$ are not all in a finite number of columns, so that p_k must take infinitely large values.

If we omit from the sequence (2. 3) any member for which the corresponding p_k is less than or equal to some previous p_k, we obtain a sequence $m_1 < m_2 < \ldots$, and from $p_1, p_2, \ldots$, we obtain a corresponding sequence $q_1 < q_2 < \ldots$ The two sequences just found are such that m_r, q_r both tend to infinity with r, and they define the sequence

$$\pi_{m_1 q_1}, \pi_{m_2 q_2}, \ldots \tag{2. 5}$$

which will be used to find the function $g(z)$.

Now $\sum_{n=0}^\infty |a_n \pi_{n\,i}|$ is convergent for every i by hypothesis; hence, given $\epsilon_i > 0$, there is an integer M_i such that

$$\sum_{n=M_i}^\infty |a_n \pi_{n\,i}| < \epsilon_i,$$

and so, given a member $\pi_{m_s q_s}$ of the sequence (2. 5), we can find an integer $\mu_s > m_s$ such that

$$\sum_{n=\mu_s}^{\infty} |a_n \pi_{n q_s}| < \tfrac{1}{2} |a_{m_s} \pi_{m_s q_s}|.$$

The sequence (2. 5) is such that if we divide the matrix $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ into four parts by drawing lines through a given row and column there will be members of (2. 5) in the lower right-hand part. Draw a "row-line" through $\pi_{\mu_s q_s}$ and a "column-line" such that all non-zero elements in the first $m_s + 1$ rows of Π are in the top left-hand part. Let $\pi_{c_2 b_2}$ be the first member of (2. 5) which appears in the lower right-hand part of this division of Π. Let $\pi_{c_3 b_3}$ be that member of (2. 5) which is obtained from $\pi_{c_2 b_2}$ by exactly the same process as that by which $\pi_{c_2 b_2}$ has just been obtained from $\pi_{m_s q_s} = \pi_{c_1 b_1}$. By proceeding in this way, we find a sequence

(2. 6) $$\pi_{c_1 b_1}, \pi_{c_2 b_2}, \ldots.$$

Let $g(z) = \sum_0^{\infty} g_n z^n$, where

(2. 7) $$g_n = a_n \qquad (n = c_1, c_2, \ldots)$$
$$g_n = 0 \quad \text{otherwise.}$$

The sequence (2. 6) has been chosen so that $\sum_{n=0}^{\infty} g_n \pi_{n b_t}$ consists of the term $g_{c_t} \pi_{c_t b_t}$ together with a remainder whose modulus is less than $\frac{1}{2} |g_{c_t} \pi_{c_t b_t}|$. Therefore

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} g_n \pi_{n b_t} \Big| > \tfrac{1}{2} |g_{c_t} \pi_{c_t b_t}| > \tfrac{1}{2} \frac{1}{M_{b_t}(R)} \alpha^{c_t} \text{ by (2. 4), (2. 7);}$$

that is,

(2. 8) $$|\Pi_{b_t} g(0)| M_{b_t}(R) > \tfrac{1}{2} \alpha^{c_t} \to \infty.$$

Uniform convergence of the basic series is therefore impossible and $g(z) = \sum_0^{\infty} g_n z^n$, defined by (2. 7), clearly satisfies (2. 2), and is therefore the required function.

Proof of theorem 1. Condition (1. 12) is sufficient. For, if $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ is any integral function of increase less than order p, type q, its order ϱ and type σ satisfy one or other of the conditions (1. 3) which are now discussed separately.

If $\varrho < p_1 < p$ then from (1. 1) we have

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n \log n}{\log |a_n|^{-1}} < p_1.$$

Therefore

$$n \log n < p_1 \log |a_n|^{-1} \qquad (n > n_0).$$

Hence

$$n^{1/p_1} |a_n|^{1/n} < 1,$$

and since $p_1 < p$ it follows that $n^{1/p} |a_n|^{1/n} \to 0$ as $n \to \infty$. Now

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{|a_n| \omega_n(R)\}^{1/n} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} n^{1/p} |a_n|^{1/n} \cdot \overline{\lim_{n \to \infty}} \{\omega_n(R)\}^{1/n} n^{-1/p}$$
$$\leqq \frac{1}{e p q} \overline{\lim_{n \to \infty}} n^{1/p} |a_n|^{1/n} \text{ by (1. 12),}$$

and this is zero since $n^{1/p} |a_n|^{1/n} \to 0$ as $n \to \infty$. It is now evident that $\sum_0^\infty |a_n| \omega_n(R)$ is convergent for all $R \geqq 0$, so that, by lemma 1, the basic series represents the given integral function in any finite region of the plane.

If $\varrho = p$, $\sigma < q$ then from (1. 2) we have

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} n^{1/p} |a_n|^{1/n} < (e p q)^{1/p}.$$

Now

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{|a_n \omega_n(R)|\}^{1/n} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} n^{1/p} |a_n|^{1/n} \cdot \overline{\lim_{n \to \infty}} \{\omega_n(R)\}^{1/n} n^{-1/p}$$
$$< \overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\left(\frac{e p q}{n}\right)^{1/p} \{\omega_n(R)\}^{1/n}\right],$$

so that, from (1. 12)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{|a_n| \omega_n(R)\}^{1/n} < 1 \qquad (R \geqq 0);$$

i. e., $\sum_0^\infty |a_n| \omega_n(R)$ is convergent for all R. Therefore, by lemma 1, the basic series represents the given integral function in any finite region of the plane.

To prove the necessity of (1. 12) suppose that it is not satisfied for $R = R_1$. i. e.,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\left(\frac{e p q}{n}\right)^{1/p} \{\omega_n(R_1)\}^{1/n}\right] > 1.$$

We can find $q_1 < q$ such that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\left(\frac{e p q_1}{n}\right)^{1/p} \{\omega_n(R_1)\}^{1/n}\right] > 1.$$

The function $\sum_0^\infty a_n z^n$ defined by $a_0 = 0$, $a_n = \left(\frac{e p q_1}{n}\right)^{n/p}$ $(n \geqq 1)$, is clearly of order p, type q_1, by (1. 1), (1. 2) and satisfies (2. 1) of lemma 2. Hence, by lemma 2, there exists an integral function $g(z) = \sum_0^\infty g_n z^n$, satisfying (2. 2), which is not represented by the basic series on $|z| = R_1$. Suppose this function is of order ϱ, type σ. If $q_1 < q_2 < q$ then by (2. 2)

$$|g_n| < \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{n/p} |a_n| \qquad (n > n_0),$$

and since $a_n = \left(\frac{e\,p\,q_1}{n}\right)^{n/p}$ $(n \geqq 1)$, we have

$$|g_n| < \left(\frac{e\,p\,q_2}{n}\right)^{n/p} \qquad (n > n_0).$$

It now follows from (1. 1), (1. 2) that $\varrho \leqq p$, $\sigma \leqq q_2$, and since $q_2 < q$, it is evident from (1. 3) that $g(z)$ is of increase less than order p, type q. Thus, if (1. 12) is not satisfied, we can always find an integral function of increase less than order p, type q, which the basic series does not represent in the whole plane. Hence (1. 12) is necessary.

Lemma 3. *If, for some $R \geqq 0$, the condition* (1. 13) *is satisfied, the basic series represents, in and on $|z| = R$, any function which is regular in and on this circle.*

For, if $\sum_0^\infty a_n z^n$ is any such function, its radius of regularity will be greater than R, and $\sum_0^\infty |a_n z^n|$ will be convergent at any point inside the circle of regularity. Suppose the radius of regularity is $R + 2\epsilon$ $(\epsilon > 0)$, then from (1. 13) we have,

$$\omega_n(R) < (R + \epsilon)^n \qquad (n > n_0).$$

Hence, $\sum_0^\infty |a_n| \omega_n(R)$ is convergent by comparison with the convergent series

$$\sum_0^\infty |a_n| (R + \epsilon)^n.$$

It now follows from lemma 1 that the basic series represents $\sum_0^\infty a_n z^n$ in and on $|z| = R$.

Proof of theorem 2. The condition (1. 13) is necessary. For if it is not satisfied, then for some $R_0 \geqq 0$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{\omega_n(R_0)\}^{1/n} > R_0.$$

Therefore, for some $R_1 > R_0$, we have

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left\{\frac{1}{R^n}\, \omega_n(R_0)\right\}^{1/n} > 1.$$

By lemma 2, there is a function $g(z) = \sum_0^\infty g_n z^n$ for which

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |R_1^n g_n|^{1/n} \leqq 1$$

by (2. 2), and which is not represented by the basic series on $|z| = R_0$. It is evident that $g(z)$ has a radius of regularity not less than R_1, and is therefore not represented in its whole circle of regularity by its basic series.

The sufficiency of (1. 13) follows immediately from lemma 3.

3. The general case.

If the condition (1. 11) is not satisfied, the function $\omega_n(R)$ is not sufficiently powerful to deal with the problem. In its place we consider the expression $F_n(R)$, which denotes the maximum for all integers i, j, of

$$\max_{|z|=R} |\pi_{ni} p_i(z) + \ldots + \pi_{nj} p_j(z)|. \tag{3. 1}$$

It is evident that

$$F_n(R) \leqq \omega_n(R).$$

In the first two sections of this paper we gave several properties of $\omega_n(R)$. In this section we give first of all the corresponding properties of $F_n(R)$, beginning with the analogue of lemma 1.

Lemma 4. *If* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *is such that*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| F_n(R)$$

converges, the basic series (1. 6) *represents* $f(z)$ *in and on* $|z| = R$.

For, we have

$$F_n(R) \geqq \max_{|z|=R} |\sum_{i=0}^{\infty} \pi_{ni} p_i(z)| = R^n,$$

so that $\sum_0^\infty |a_n| R^n$ is convergent by comparison with the convergent series $\sum_0^\infty |a_n| F_n(R)$. Hence, given any integer N, we have

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| R^n + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| F_n(R) < \Phi(N) \tag{3. 2}$$

where $\Phi(N) \to 0$ as $N \to \infty$.

Draw a "row-line" through the $(N+1)$ th. row of Π, and a "column-line" such that all non-zero elements in the first $N+1$ rows of Π are in the top left-hand part. This can be done since Π is row-finite. Suppose this "column-line" is the $(k+1)$ th. i. e., it passes through the element π_{Nk}, then $k \to \infty$ as $N \to \infty$, and if $l \geqq k$, we have

$$\begin{aligned}
&|f(z) - \sum_{i=0}^{l} p_i(z) \Pi_i f(0)| \\
&\qquad = |f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \sum_{i=0}^{l} \pi_{ni} p_i(z) - \sum_{n=N}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{l} \pi_{ni} p_i(z)| \\
&\qquad = |\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{l} \pi_{ni} p_i(z)| \\
&\qquad \leqq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| R^n + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |\sum_{i=0}^{l} \pi_{ni} p_i(z)| \\
&\qquad \leqq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| R^n + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| F_n(R) \\
&\qquad < \Phi(N) \text{ by (3. 2)}
\end{aligned}$$

Let $N \to \infty$, then $\Phi(N) \to 0$ and $k \to \infty$. Since $l \geqq k$ it follows that

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(z)\, \Pi_i f(0),$$

the basic series being uniformly convergent for $|z| \leqq R$.

Lemma 5. *If, for some* $R \geqq 0$, $\sum_0^\infty a_n z^n$ *is regular in and on* $|z| = R$ *and such that*

(3. 3) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{|a_n| F_n(R)\}^{1/n} > 1,$$

then there exists a function $\sum_0^\infty g_n z^n$, *where*

(3. 4) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left|\frac{g_n}{a_n}\right|^{1/n} \leqq 1,$$

which is not represented by the basic series on $|z| = R$.

If (3. 3) is satisfied, then either

a) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{\max_i |a_n \pi_{ni} M_i(R)|\}^{1/n} > 1$$

or

b) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{\max_i |a_n \pi_{ni} M_i(R)|\}^{1/n} \leqq 1,$$

Case (a). We can choose a sequence $n_1, n_2, \ldots$ such that

$$\{\max_i |a_n \pi_{ni} M_i(R)|\}^{1/n} > \alpha \qquad (\alpha > 1;\ n = n_1,\ n_2,\ \ldots).$$

(2. 4)—(2. 8) now follow immediately. As in the proof of lemma 2 we obtain a function $\sum_0^\infty g_n z^n$, satisfying (3. 4), which is not represented by the basic series on $|z| = R$.

Case (b). There exists a function $\sum_0^\infty A_n z^n$ which is

(i) regular in and on $|z| = R$,

(ii) such that $\overline{\lim_{n \to \infty}} \{|A_n| F_n(R)\}^{1/n} > 1$,

(iii) such that $\sum_{n=0}^{\infty} \max_i |A_n \pi_{ni} M_i(R)|$ converges.

For, if (3. 3) is satisfied, we can choose a sequence of integers $l_1, l_2, \ldots$ such that

$$\{|a_{l_k}| F_{l_k}(R)\}^{1/l_k} \to \beta\ (> 1) \text{ as } k \to \infty.$$

Now

$$\sum_{k=0}^{\infty} \max_{i} |a_{l_k} \pi_{l_k i} M_i(R)|$$

is either convergent or divergent. In the former case it is sufficient to take $A_n = a_n$ $(n = l_1, l_2, \ldots)$, $A_n = 0$ for all remaining n. In the latter case it is evident from (b) that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{\max_{i} |a_{l_k} \pi_{l_k i} M_i(R)|\}^{1/l_k} = 1,$$

so that we can select from the sequence $l_1, l_2, \ldots$ a subsequence $m_1, m_2, \ldots$ such that

$$\{\max_{i} |a_{m_k} \pi_{m_k i} M_i(R)|\}^{1/m_k} \to 1 \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

Conditions (i), (ii) are easily verified when

$$A_n = a_n |n^2 \max_{i} |a_n \pi_{n i} M_i(R)| \qquad (n = m_1, m_2, \ldots),$$

$$A_n = 0 \quad \text{otherwise},$$

and (iii) is true by comparison with the convergent series $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

It follows that there is no loss of generality in assuming that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{i} |a_n \pi_{n i} M_i(R)|$$

converges. Hence, given $\epsilon > 0$, we can find an integer M such that

$$\sum_{n=M}^{\infty} \max_{i} |a_n \pi_{n i} M_i(R)| < \epsilon. \tag{3.5}$$

Define $\Phi_n(R)$, h_n, k_n, by the equations

$$\Phi_n(R) = \max_{i,j > n} \{ \max_{|z| = R} |\pi_{n i} p_i(z) + \ldots + \pi_{n j} p_j(z)| \}$$

$$= \max_{|z| = R} |\pi_{n h_n} p_{h_n}(z) + \ldots + \pi_{n k_n} p_{k_n}(z)|$$

where $\pi_{n h_n}$, $\pi_{n k_n}$ are non-zero elements of Π and h_n, $k_n > n$. Then

$$F_n(R) \leqq \sum_{i=0}^{n} |\pi_{n i}| M_i(R) + \Phi_n(R), \tag{3.6}$$

$$F_n(R) \geqq \Phi_n(R).$$

Suppose

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{|a_n| \Phi_n(R)\}^{1/n} > 1.$$

Then from (3.3), (3.6) we have

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{\sum_{i=0}^{n} |a_n \pi_{n i}| M_i(R)\}^{1/n} > 1.$$

Therefore

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{\max_i |a_n \pi_{n,i} M_i(R)|\}^{1/n} > 1.$$

This contradiction of (b) implies that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{|a_n| \Phi_n(R)\}^{1/n} > 1.$$

We can choose a sequence

(3. 7) $$n_1, n_2, \ldots$$

such that

$$\{|a_n| \Phi_n(R)\}^{1/n} > \delta \qquad (\delta > 1; n = n_1, n_2, \ldots)$$

i. e., such that

(3. 8) $$|a_{n_k}| \Phi_{n_k}(R) > \delta^{n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Given any member n_s of (3. 7) we can find an integer $\mu_s > n_s$ so that

$$\sum_{n=\mu_s}^{\infty} \max_i |a_n \pi_{n,i} M_i(R)| < \frac{\frac{1}{2}|a_{n_s}| \Phi_{n_s}(R)}{k_{n_s} - h_{n_s} + 1} \quad \text{by (3. 5)}$$

i. e., so that

$$\sum_{n=\mu_s}^{\infty} \sum_{i=h_{n_s}}^{k_{n_s}} |a_n \pi_{n,i}| M_i(R) < \tfrac{1}{2}|a_{n_s}| \Phi_{n_s}(R).$$

From (3. 7) select a subsequence

(3. 9) $$c_1, c_2, \ldots$$

in the following way, beginning with $n_s = c_1$. Draw a "row-line" through the $(\mu_s + 1)$ th. row of Π and a "column-line" so that all non-zero elements in the first $\mu_s + 1$ rows of Π are in the top left-hand part. Suppose this line is drawn through the $(\lambda_s + 1)$ th. column. Let c_2 be the first member of (3. 7) greater than both μ_s and λ_s. By continuing this process as in forming (2. 6) we arrive at the sequence (3. 9).

Let $g(z) = \sum_0^{\infty} g_n z^n$ where

(3. 10) $$g_n = a_n \qquad (n = c_1, c_2, \ldots),$$

$$g_n = 0 \quad \text{otherwise.}$$

Then $g(z)$ clearly satisfies (3. 4). Moreover, the sequence (3. 9) has been chosen so that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{|z|=R} \Big| \sum_{i=h_{c_l}}^{k_{c_l}} g_n \pi_{n,i} p_i(z) \Big|$$

consists of the term $|a_{c_t}|\,\Phi_{c_t}(R)$ together with a remainder whose modulus is less than $\frac{1}{2}|a_{c_t}|\,\Phi_{c_t}(R)$. Therefore

$$\max_{|z|=R}\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=h_{c_t}}^{k_{c_t}} g_n\,\pi_{n\,i}\,p_i(z)\Big| \geqq \tfrac{1}{2}|a_{c_t}|\,\Phi_{c_t}(R) > \tfrac{1}{2}\,\delta^{c_t} \text{ by (3.8), (3.10);}$$

that is,

$$\max_{|z|=R}\Big|\sum_{i=h_{c_t}}^{k_{c_t}} p_i(z)\,\Pi_i\,g(0)\Big| > \tfrac{1}{2}\,\delta^{c_t} \to \infty.$$

Uniform convergence of the basic series is therefore impossible and $g(z) = \sum_0^{\infty} g_n z^n$, defined by (3.10), is the required function.

Theorem 3. *A necessary and sufficient condition for the basic series* (1.6) *to represent all integral functions of increase less than order p, type q, is that*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\left(\frac{e\,p\,q}{n}\right)^{1/p}\{F_n(R)\}^{1/n}\right] \leqq 1 \quad \text{for every } R \geqq 0. \tag{3.11}$$

As in the case of theorem 1 it is clear that p and q cannot be zero or infinite. The proof of this theorem is identical with the proof of theorem 1 except that lemmas 4, 5 are used instead of lemmas 1, 2.

Lemma 6. *If $\{F_n(R)\}^{1/n} \to R$ as $n \to \infty$ for some $R \geqq 0$, then the basic series represents, in and on $|z| = R$, every function which is regular in and on this circle.*

The proof is identical with the proof of lemma 3 except that $F_n(R)$ replaces $\omega_n(R)$ and lemma 4 is used instead of lemma 1.

Theorem 4. *A necessary and sufficient condition for the basic series* (1.6) *to represent every function in its circle of regularity is that*

$$\{F_n(R)\}^{1/n} \to R \quad \text{as} \quad n \to \infty \quad \textit{for every } R \geqq 0. \tag{3.12}$$

For the proof, we use lemmas 5, 6 instead of lemmas 2, 3 in the proof of theorem 2.

The remainder of this section consists of a number of examples which show more clearly the connection between theorems 1 and 3 and theorems 2 and 4. In these examples we consider expressions of the form

$$\pi_{n\,i}\,p_i(z) + \ldots + \pi_{n\,j}\,p_j(z) \qquad (i, j \geqq 0) \tag{3.13}$$

in connection with the function $F_n(R)$ defined by (3.1).

Since $\omega_n(R) \geqq F_n(R)$ $(R \geqq 0)$, it follows that if (1.12) is satisfied (3.11) will be true also. From the work that has preceded it is evident that (3.11) implies (1.12) when $N_n^{1/n} \to 1$.

Example 1. We show that (3.11) does not always imply (1.12).

In the construction of this example the following principle has been used. For an infinity of n, z^n is the sum of a large[6]) number of basic polynomials with small coefficients. The polynomials are chosen so that $F_n(R)$ does not differ very much from the maximum modulus on $|z| = R$ of one of the basic polynomials used in the representation of z^n. On the other hand, $\omega_n(R)$ is, for an infinity of n, the sum of the maximum moduli on $|z| = R$ of a large number of the basic polynomials.

Choose a sequence $n_1, n_2, \ldots$ of integers such that

$$n_{t+1} = 2^{n_t+1} - n_t + 2,$$

and suppose that n_1 is even so that every n_t will be even. Let

$$w_0 = 1, \quad w_n = \left(\frac{z}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

and write

$$p_n(z) = w_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, n_1 - 1),$$

$$p_{n_t+s}(z) = w_{2^{n_t}+\frac{1}{2}s+1} - (-1)^{s/2} \quad (s = 0, 2, 4, \ldots, 2^{n_t+1} - 2n_t),$$

$$p_{n_t+s}(z) = -\left(w_{2^{n_t}-\frac{1}{2}(s-3)} + w_{2^{n_t}+\frac{1}{2}(s+1)} - w_{2^{n_t}-\frac{1}{2}(s-1)}\right)$$
$$(s = 3, 5, 7, \ldots, 2^{n_t+1} - 2n_t + 1),$$

$$p_{n_t+1}(z) = -\left(w_{2^{n_t}+1} - w_{2^{n_t}}\right).$$

The set of polynomials

$$p_{n_t}(z), \quad p_{n_t+1}(z), \quad \ldots, \quad p_{n_{t+1}-1}(z) \qquad (t = 1, 2, \ldots),$$

$$p_0(z), \quad p_1(z), \quad \ldots, \quad p_{n_1-1}(z),$$

is clearly basic[7]) and the representations of z^n $(n \geqq n_1)$ are as follows:

$$\begin{aligned} z^{n_t} = (n_t)^{n_t} \{&1 + (w_{2^{n_t}+1} - 1) - (w_{2^{n_t}+1} - w_{2^{n_t}}) + (w_{2^{n_t}+2} + 1) \\ &- (w_{2^{n_t}} + w_{2^{n_t}+2} - w_{2^{n_t}-1}) + (w_{2^{n_t}+3} - 1) \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (w_{2^{n_t+1}-n_t+1} - 1) \\ &- (w_{n_t+1} + w_{2^{n_t+1}-n_t+1} - w_{n_t})\} \\ = (n_t)^{n_t} &\{p_0(z) + p_{n_t}(z) + p_{n_t+1}(z) + \ldots + p_{n_{t+1}-1}(z)\}. \end{aligned}$$

To obtain z^{n_t+s} $(0 < s \leqq 2^{n_t} - n_t)$ from this representation of z_t^n we first replace the factor $(n_t)^{n_t}$ by $(n_t + s)^{n_t+s}$. If s is even we then omit

[6]) It is clearly necessary that (1. 11) should be false.

[7]) Whittaker, op. cit., 5, 1.

the last $2s$ polynomials. If s is odd we omit the last $2s$ polynomials and $p_0(z)$ as well. If $2^{n_t} - n_t < s < n_{t+1} - n_t$ then

$$z^{n_t+s} = (n_t+s)^{n_t+s}[(-1)^{s+1} + \{w_{n_t+s} - (-1)^{s+1}\}]$$

$$= (n_t+s)^{n_t+s}\{(-1)^{s+1}p_0(z) + p_{n_t+2\{s-(2^{n_t}-n_t+1)\}}(z)\}.$$

We show now that $F_n(R) < 2n^n$ $(n > n_R)$. This is clearly true if n is of the form $n_t + s$ $(2^{n_t} - n_t < s < n_{t+1} - n_t)$. The argument is more complicated if n is of the form $n_t + s$ $(0 \leqq s \leqq 2^{n_t} - n_t)$. We consider only the case $s = 0$ as the discussion for the remaining values of s is the same. Apart from the factor $(n_t)^{n_t}$ in the above representation of z^{n_t} the constant terms are all of absolute value unity and they occur with a plus sign and a minus sign alternately. Hence, the modulus of the constant term in any expression of the form (3. 13) can never exceed $(n_t)^{n_t}$. The remaining terms are all different. Except for w_{n_t}, they can be grouped in pairs, the members of a pair differing in sign only and being separated by not more than one of these remaining terms. It follows without much difficulty that no expression of the form (3. 13) will contain more than four of these remaining terms after all pairs in the expression have been cancelled. It follows that

$$F_{n_t}(R) \leqq (n_t)^{n_t}\left\{1 + 4\left(\frac{R}{n_t}\right)^{n_t}\right\} \qquad (n_t \geqq R)$$

and this is less than $2(n_t)^{n_t}$ for t sufficiently large. The inequality $F_n(R) \leqq 2n^n$ $(n > n_R)$ has thus been established.

It is now evident that this basic set satisfies (3. 11) when $p = 1$, $q = 1/e$. On the other hand

$$\omega_{n_t}(R) > (n_t)^{n_t}(2^{n_t} - n_t)$$

for t sufficiently great so that (1. 12) is not satisfied.

Example 2. There are cases in which (1. 12), (3. 11) are equivalent even though (1. 11) is not satisfied.

The following principles are used in the construction of this example. For an infinity of n, $F_n(R)$ and $\omega_n(R)$ are of the same large order of magnitude and determine the relations (1. 12), (3. 11). In the remaining values of n there is an infinite sequence for which z^n is the sum of a large number of polynomials which are so small in modulus that the corresponding $F_n(R)$, $\omega_n(R)$ are themselves small and the number of polynomials is great enough to make $\overline{\lim}_{n\to\infty} N_n^{1/n} > 1$.

Choose a sequence $n_1, n_2, \ldots$ such that $n_{t+1} = 2^{n_t} + 1$ $(t = 1, 2, \ldots)$. Let $a_t = (n_t)^{2^{n_t}}$, $b_t = (2^{n_t})^{2^{n_t}}$, and write

$$p_{n_t}(z) = a_t(z^{n_t+2} + z^{n_t+3} + \ldots + z^{2^{n_t}}) + b_t z^{n_t}$$

$$p_{n_t+1}(z) = (n_t)^{n_t} + z^{n_t+1},$$

$$p_n(z) = a_t z^n \qquad (n_t + 1 < n \leqq 2^{n_t}).$$

The polynomials defined above for $t = 1, 2, \ldots$, together with the polynomials $p_n(z) = z^n$ $(n = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$ form a basic set in which $\overline{\lim}_{n\to\infty} N_n^{1/n} = 2$. The representations of z^n $(n \geqq n_1)$ are as follows:

$$z^{n_t} = \frac{1}{b_t}[\{a_t(z^{n_t+2} + z^{n_t+3} + \ldots + z^{2^{n_t}}) + b_t z^{n_t}\}$$

$$- a_t z^{n_t+2} - a_t z^{n_t+3} - \ldots - a_t z^{2^{n_t}}]$$

$$= \frac{1}{b_t}[p_{n_t}(z) - \{p_{n_t+2}(z) + p_{n_t+3}(z) + \ldots + p_{2^{n_t}}(z)\}],$$

$$z^{n_t+1} = -(n_t)^{n_t} + \{(n_t)^{n_t} + z^{n_t+1}\} = -(n_t)^{n_t} p_0(z) + p_{n_t+1}(z),$$

$$z^n = \frac{1}{a_t}(a_t z^n) = \frac{1}{a_t} p_n(z) \qquad (n_t + 1 < n \leqq 2^{n_t}).$$

We now have

$$F_{n_t}(R) \leqq \omega_{n_t}(R)$$

$$\leqq \frac{a_t}{b_t} 2^{n_t+1}(n_t)^{2^{n_t}} + R^{n_t} \qquad (n_t > R)$$

$$< 2R^{n_t} \qquad (t > t_R),$$

$$3(n_t)^{n_t} \geqq \omega_{n_t+1}(R) \geqq F_{n_t+1}(R) \geqq (n_t)^{n_t},$$

and for all remaining n,

$$F_n(R) = \omega_n(R) = R^n.$$

It is now evident that this basic set satisfies both (1. 12) and (3. 11) when $p = 1$, $q = 1/e$ although (1. 11) is not satisfied.

Example 3. The following example shows that the condition

$$\{F_n(R)\}^{1/n} \to R \quad \text{as} \quad n \to \infty \qquad (0 \leqq R \leqq R_0)$$

does not always imply the condition

$$\{\omega_n(R)\}^{1/n} \to R \quad \text{as} \quad n \to \infty \qquad (0 \leqq R \leqq R_0).$$

Choose a sequence $n_1, n_2, \ldots$ of integers such that $n_{t+1} = 2 - n_t + 2$ and write

$$p_n(z) = z^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, n_1 - 1),$$

$$p_{n_t+s}(z) = z^{2^{n_t} + \frac{1}{2}s + 1} \qquad (s = 0, 2, 4, \ldots, 2^{n_t+1} - 2n_t),$$

$$p_{n_t+s}(z) = -(z^{2^{n_t} - \frac{1}{2}(s-3)} + z^{2^{n_t} + \frac{1}{2}(s+1)} - z^{2^{n_t} - \frac{1}{2}(s-1)})$$

$$(s = 3, 5, 7, \ldots, 2^{n_t+1} - 2n_t + 1),$$

$$p_{n_t+1}(z) = -(z^{2^{n_t}+1} - z^{2^{n_t}}).$$

As in example 1, the polynomials given above for $t = 1, 2, \ldots$ clearly form a basic set and

$$\begin{aligned} z^{n_t} &= z^{2^{n_t}+1} - (z^{2^{n_t}+1} - z^{2^{n_t}}) + z^{2^{n_t}+2} \\ &\quad - (z^{2^{n_t}} + z^{2^{n_t}+2} - z^{2^{n_t}-1}) + z^{2^{n_t}+3} \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z^{2^{n_t}+1} - n_t + 1 \\ &\quad - (z^{n_t+1} + z^{2^{n_t}+1-n_t+1} - z^{n_t}) \\ &= p_{n_t}(z) + p_{n_t+1}(z) + \ldots + p_{n_{t+1}-1}(z). \end{aligned}$$

z^{n_t+s}, where s is any integer less than or equal to $2^{n_t} - n_t$, is obtained by omitting the last $2s$ polynomials in the above representation of z^{n_t}. If s is integral and $2^{n_t} - n_t < s < n_{t+1} - n_t$, then z^{n_t+s} is a polynomial of the basic set. It is now clear from the corresponding discussion in example 1 that $F_n(R)$ $(n \geqq 0)$, is less than the sum of four terms of the form R^{n+m} $(m \geqq 0)$. We then have $F_n(R) \leqq 4R^n$ $(R \leqq 1)$, whence

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} \leqq R.$$

But $\omega_n(1) \geqq 2^n - n$, if n belongs to the sequence $n_1, n_2, \ldots$; therefore

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{\omega_n(1)\}^{1/n} \geqq 2.$$

Example 4. There are cases in which $\overline{\lim_{n\to\infty}} N_n^{1/n} > 1$ and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \{\omega_n(R)\}^{1/n} = R$$

for all R.

Choose a sequence $n_1, n_2, \ldots$ of integers such that $n_{t+1} = 2^{n_t} + 1$ $(t = 1, 2, \ldots)$. Let $a_t = (n_t)^{2^{n_t}}$, $b_t = (2^{n_t})^{2^{n_t}}$, and write

$$p_{n_t}(z) = a_t(z^{n_t+1} + z^{n_t+2} + \ldots + z^{2^{n_t}}) + b_t z^{n_t},$$

$$p_n(z) = a_t z^n \qquad (n_t < n \leqq 2^{n_t}).$$

The polynomials defined above for $t = 1, 2, \ldots$ together with the polynomials $p_n(z) = z^n$ $(n = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$ form a basic set in which $\overline{\lim}_{n\to\infty} N_n^{1/n} = 2$; for

$$z^{n_t} = \frac{1}{b_t}[\{a_t(z^{n_t+1} + z^{n_t+2} + \ldots + z^{2^{n_t}}) + b_t z^{n_t}\} - a_t z^{n_t+1} - a_t z^{n_t+2} - \ldots - a_t z^{2^{n_t}}]$$

$$= \frac{1}{b_t}[p_{n_t}(z) - \{p_{n_t+1}(z) + p_{n_t+2}(z) + \ldots + p_{2^{n_t}}(z)\}],$$

$$z^n = \frac{1}{a_t}(a_t z^n) = \frac{1}{a_t} p_n(z) \qquad (n_t < n \leqq 2^{n_t}).$$

We then have

$$F_{n_t}(R) \leqq \omega_{n_t}(R)$$

$$\leqq \frac{a_t}{b_t} 2^{n_t+1} (n_t)^{2^{n_t}} + R^{n_t} \qquad (n_t > R)$$

$$< 2R^{n_t} \qquad (t > t_R),$$

and for all remaning n,

$$F_n(R) = \omega_n(R) = R^n.$$

It is now evident that both (1. 13) and (3. 12) are satisfied.

4. Order and Type.

Definition. *The Order of a basic set of polynomials is*

(4. 1) $$F = \lim_{R\to\infty} F(R)$$

where

$$F(R) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log F_n(R)}{n \log n}.$$

If $0 < F < \infty$ *the Type is*

(4. 2) $$\Gamma = \lim_{R\to\infty} \Gamma(R)$$

where

$$\left\{\frac{F\,\Gamma(R)}{e}\right\}^F = \overline{\lim_{n\to\infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-F}.$$

It is evident that $F(R)$, $\Gamma(R)$ are increasing functions so that the limits (4. 1), (4. 2) exist. A basic set will be of *increase less than* Order p, Type q, if its Order F and Type Γ satisfy one or other of the conditions (i) $F < p$ (ii) $F = p$, $\Gamma < q$. It is interesting to compare these definitions with (1. 9), (1. 10). We have the following result.

When $N_n^{1/n} \to 1$ *the definitions are consistent.* For, it is clear that

$$\max_i \{|\pi_{ni}| M_i(R)\} \geqq \frac{\omega_n(R)}{N_n} \qquad (R \geqq 0)$$

and

$$\omega_n(R) \geqq F_n(R) \geqq \max_i \{|\pi_{ni}| M_i(R)\}.$$

Hence

$$\omega_n(R) \geqq F_n(R) \geqq \frac{\omega_n(R)}{N_n}. \tag{4. 3}$$

Therefore

$$\{\omega_n(R)\}^{1/n \log n} \geqq \{F_n(R)\}^{1/n \log n} \geqq \left\{\frac{\omega_n(R)}{N_n}\right\}^{1/n \log n}.$$

Taking logs. we have

$$\frac{\log \omega_n(R)}{n \log n} \geqq \frac{\log F_n(R)}{n \log n} \geqq \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n} - \frac{\log N_n}{n \log n}. \tag{4. 4}$$

Since $N_n^{1/n} \to 1$ it follows that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log F_n(R)}{n \log n}$$

i. e.,

$$\omega(R) \equiv F(R)$$

so that

$$\omega = F.$$

From (4. 3) we have

$$\{\omega_n(R)\}^{1/n} \geqq \{F_n(R)\}^{1/n} \geqq \left\{\frac{\omega_n(R)}{N_n}\right\}^{1/n} \qquad (R \geqq 0).$$

Hence, since $\omega = F$,

$$\{\omega_n(R)\}^{1/n} n^{-\omega} \geqq \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-F} \geqq \left\{\frac{\omega_n(R)}{N_n}\right\}^{1/n} n^{-\omega}.$$

Therefore

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{\omega_n(R)\}^{1/n} n^{-\omega} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-F}.$$

From the definitions of type and Type it follows that

$$\left\{\frac{\omega \gamma(R)}{e}\right\}^{\omega} = \left\{\frac{F \Gamma(R)}{e}\right\}^{F},$$

and since $\omega = F$, we have $\gamma(R) \equiv \Gamma(R)$, so that $\gamma = \Gamma$.

The definitions are therefore consistent when $N_n^{1/n} \to 1$.

In all other cases it is evident from (4. 4) that $\omega \geqq F$, though very little can be said about the relationship of γ and Γ. If $N_n^{1/n \log n} \to 1$ however, it is obvious from (4. 4) that $\omega = F$, whence it follows that $\gamma \geqq \Gamma$.

Theorem 5. *If $\{p_n(z)\}$ is a basic set of Order F, Type Γ, then the associated basic series represents all integral functions of increase less than order $1/F$, type $1/\Gamma$.*

Since $\Gamma(R)$ is an increasing function it is clear from (4. 2) that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-F} \leqq \left(\frac{F\Gamma}{e}\right)^F \qquad (R \geqq 0).$$

Therefore

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\left(\frac{e}{nF\Gamma}\right)^F \{F_n(R)\}^{1/n}\right] \leqq 1 \qquad (R \geqq 0).$$

The result now follows from the sufficiency of the condition (3. 11) in theorem 3.

The numbers $1/F$, $1/\Gamma$, for the order and type in theorem 5, are "best possible".

We show that if $p > 1/F$, $q > 1/\Gamma$ then the basic series does not represent, in the whole plane, all integral functions of increase less than (i) order p, type $1/\Gamma$ (ii) order $1/F$, type q.

Case (i). Since $\Gamma(R)$ is an increasing function, $\Gamma(R) > 1/q$ $(R > R_0)$, and by (4. 2) it now follows that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-F} > \left(\frac{F}{eq}\right)^F \qquad (R > R_0). \tag{4.5}$$

Now

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-1/p} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-F} \lim_{n \to \infty} n^{F-1/p}$$

$$> \left(\frac{F}{eq}\right)^F \lim_{n \to \infty} n^{F-1/p} \quad (R > R_0) \text{ by } (4.5)$$

and this is infinite since $p > 1/F$. It follows that $\overline{\lim_{n \to \infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-1/p}$ is infinite for all $R > R_0$, and hence

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\left(\frac{ep}{n\Gamma}\right)^{1/p} \{F_n(R)\}^{1/n}\right]$$

is infinite for all $R > R_0$. The result follows from the necessity of (3. 11) in theorem 3.

Case (ii). From (4. 5) we have also

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\left(\frac{eq}{nF}\right)^F \{F_n(R)\}^{1/n}\right] > 1 \qquad (R > R_0),$$

and the result follows from theorem 3.

The case $N_n^{1/n} \to 1$. By using (1. 2) and theorem 1 in place of (4. 2) and theorem 3 in the proof of theorem 5 we arrive at Whittaker's theorem which is stated in the introduction (1). It is not difficult to see that the numbers $1/\omega$, $1/\gamma$, are "best possible" for the case $N_n^{1/n} \to 1$. If $\overline{\lim}_{n\to\infty} N_n^{1/n} > 1$, they may or they may not be "best possible". The first case is illustrated by example 2 in which $1/\omega = 1/F = 1$ and $1/\gamma = 1/\Gamma = 1/e$. The second case is illustrated by example 1 in which $1/\omega = 1/F = 1$ and $1/\gamma \leqq 1/2\,e$, $1/\Gamma = 1/e$.

Whittaker gives another theorem connected with the order and type of basic sets. This is stated in full in the introduction (2). We show now, that this result is still true for Order and Type. To avoid confusion the proof is given in full though most of it is identical with Whittaker's proof.

Theorem 6. *If* $\{p_n(z)\}$ *is a basic set of Order* F, *Type* Γ, *and* A $(\neq 0)$, B *are any constants, then* $\{p_n(Az+B)\}$ *is a basic set of Order* F, *Type* $|A|^{-1/F}\Gamma$.

Write $p_n(Az+B) = p_n^*(z)$ and let p_{ij}^*, π_{ij}^*, etc. refer to $\{p_n^*(z)\}$ so that

$$\sum_k p_{nk}^* z^k = \sum_l p_{nl}\,(Az+B)^l$$

and

$$p_{nk}^* = \sum_{l=k}^{\infty} p_{nl}\,A^k\,B^{l-k}\binom{l}{k},$$

i. e.

$$P^* = PA,$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ B & A & 0 & . \\ B^2 & 2BA & A^2 & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Hence

$$\Pi^* = (P^*)^{-1} = A^{-1}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ \frac{-B}{A} & \frac{1}{A} & 0 & . \\ \frac{B^2}{A^2} & \frac{-2B}{A^2} & \frac{1}{A^2} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}\Pi,$$

and

$$\pi_{nk}^* = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-B)^{n-l}A^{-n}\pi_{lk}.$$

Thus

$$|\pi_{nk}^*| \leqq \left|\frac{B}{A}\right|^n \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}|B|^{-l}|\pi_{lk}|.$$

Now

$$F_n^*(R) = \max_{i,j \geqq 0} \max_{|z|=R} |\pi_{ni}^* p_i^*(z) + \ldots + \pi_{nj}^* p_j^*(z)|$$

$$= \max_{|z|=R} |\pi_{n i_R}^* p_{i_R}^*(z) + \ldots + \pi_{n j_R}^* p_{j_R}^*(z)|$$

$$= \max_{\left|\frac{z}{A} - \frac{B}{A}\right| = R} |\pi_{n i_R}^* p_{i_R}(z) + \ldots + \pi_{n j_R}^* p_{j_R}(z)|.$$

If $R > \left|\frac{B}{A}\right|$ then $|z| < 2|A|R$ and

(4.6) $$F_n^*(R) \leqq \max_{|z| = 2|A| R} |\pi_{n i_R}^* p_{i_R}(z) + \ldots + \pi_{n j_R}^* p_{j_R}(z)|$$

$$\leqq \left|\frac{B}{A}\right|^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} |B|^{-l} F_l(2|A|R).$$

Now if $\alpha > F$ then

$$F_n(2|A|R) < K n^{\alpha n} \qquad (n \geqq 0)$$

where K is independent of n, so that

$$F_n^*(R) < K \left|\frac{B}{A}\right|^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} |B|^{-l} n^{\alpha n}$$

$$= K \left(\frac{1 + |B|}{|A|}\right)^n n^{\alpha n}.$$

Thus

$$F^*(R) \leqq \alpha$$

and so

$$F^* \leqq F.$$

On the other hand

(4.7) $$p_n^*\left(\frac{z}{A} - \frac{B}{A}\right) = p_n(z)$$

so that a similar argument gives

$$F \leqq F^*.$$

Now

$$\left\{\frac{F\Gamma(R)}{e}\right\}^F = \overline{\lim_{n \to \infty}} \{F_n(R)\}^{1/n} n^{-F},$$

so that, if

$$\beta > \left\{\frac{F\Gamma(R)}{e}\right\}^F$$

then

$$F_n(2|A|R) < K n^{nF} \beta^n \qquad (n \geqq 0).$$

From (4. 6) we have

$$F_n^*(R) < K \left|\frac{B}{A}\right|^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} l^{lF} \beta^l |B|^{-l}$$

$$< K \left|\frac{B}{A}\right|^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} n^{lF} \beta^l |B|^{-l}$$

$$= K |A|^{-n} n^{nF} (|B| n^{-F} + \beta)^n.$$

Thus

$$\left\{\frac{F \Gamma^*(R)}{e}\right\} \leqq \beta |A|^{-1}$$

and so

$$\Gamma^*(R) \leqq F^{-1} e \beta^{1/F} |A|^{-1/F}$$

and

$$\Gamma^* \leqq \Gamma |A|^{-1/F}.$$

In the same way (4. 7) gives

$$\Gamma \leqq \Gamma^* |A|^{1/F}.$$

This completes the proof of the theorem.

The Department of Pure Mathematics, The University, Liverpool.

(Eingegangen am 5. September 1938.)

Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*).

Von

Helmut Wielandt in Tübingen.

Der Begriff der invarianten Untergruppe oder des Normalteilers kann in einer Art erweitert werden, die einem vielfach auftretenden Bedürfnis entspricht. Es handelt sich oft nicht um einen einzelnen Normalteiler, sondern um eine ganze „Normalkette", eine endliche Kette von Untergruppen, in der jedes Glied ein Normalteiler des vorangehenden ist. Die Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, die als Glieder einer mit $\mathfrak{G}$ beginnenden Normalkette auftreten können, sollen als *die nachinvarianten Untergruppen von* $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden. Nachinvariante Untergruppen treten, um das wichtigste Beispiel zu erwähnen, in den Kompositionsreihen auf. Jedes Glied einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ ist in $\mathfrak{G}$ nachinvariant. Umgekehrt könnte man eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ geradezu definieren als eine mit $\mathfrak{G}$ beginnende und mit dem Einheitselement schließende absteigende Kette von nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$, bei der man nirgends zwischen zwei Glieder noch eine nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ einschieben kann. Schon wegen dieses Zusammenhangs ist mir eine Untersuchung der nachinvarianten Untergruppen lohnend erschienen. Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Abschnitt I zusammengestellt.

Da in erster Linie Anwendungen auf endliche Gruppen in Betracht kommen, setzen wir, um die ohnedies etwas verwickelten Beweise durchsichtiger zu machen, im folgenden durchweg voraus, daß die zugrunde gelegte Obergruppe $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe hat. Von den Untergruppen von $\mathfrak{G}$ fordern wir dies nicht. Jede nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ besitzt eine endliche Kompositionsreihe. Denn nach dem Jordan-Hölder-Schreierschen Verfeinerungssatz[1]) kann die von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ führende Normalkette zu einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ ergänzt werden; der von $\mathfrak{A}$ bis zum Einheitselement E führende Teil ist eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{A}$.

Eine von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ führende, nicht mehr zu verfeinernde Normalkette mit lauter verschiedenen Gliedern nennen wir eine Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$. Die zu einer Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ gehörenden einfachen

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen als Habilitationsschrift angenommen.

[1]) Vgl. z. B. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I (Leipzig und Berlin 1937), S. 50.

Faktorgruppen sind als abstrakte Gruppen durch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ allein bestimmt, abgesehen von der Reihenfolge. Sie mögen als die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden, ihre Ordnungen, die auch unendlich sein können, als die Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$, und ihre Anzahl mit $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$. Wir setzen $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 0$. Jede Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ enthält $j(\mathfrak{G}, E) + 1$ Glieder; es gilt $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{A}, E) = j(\mathfrak{G}, E)$. Die Beweise der im folgenden mitgeteilten Sätze bestehen in Induktionsschlüssen in bezug auf $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$. (Die Sätze gelten meist schon unter schwächeren Voraussetzungen über $\mathfrak{G}$, zum Teil ohne alle Einschränkungen. An Stelle von $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ hat man dann in den Beweisen die Zahl $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ zu benutzen, die als die kleinste unter den Längen der von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ führenden Normalketten erklärt ist. $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ existiert ohne jede Voraussetzung über $\mathfrak{G}$ nach Definition der Nachinvarianz von $\mathfrak{A}$, leistet aber weniger als $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$. Das liegt daran, daß $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ eine monotone Funktion von $\mathfrak{A}$ ist, aber $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ nicht: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und ist $\mathfrak{A}$ als echte Untergruppe in $\mathfrak{B}$ enthalten, so ist $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) > j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$, während $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \gtreqless m(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ sein kann.)

I.

Von den geläufigen Eigenschaften der Normalteiler lassen sich einige der wichtigsten auch für die nachinvarianten Untergruppen nachweisen. Dies geschieht in Abschnitt II. Das Hauptergebnis ist der Satz:

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit dem Durchschnitt $\mathfrak{D}$ und dem Erzeugnis $\mathfrak{R}$, so sind auch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{R}$ nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{D}$ sind, abgesehen von der Vielfachheit, dieselben wie die von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{B}$ zusammen. Die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{R}$ sind, abgesehen von der Vielfachheit, dieselben wie die von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammen.

Abschnitt III enthält Anwendungen auf Kompositionsreihen. Ein Verfahren wird besprochen, um aus zwei Kompositionsreihen einer Gruppe durch Verschmelzung von oben oder von unten her eine dritte zu gewinnen (Satz 13, 14).

In Abschnitt IV wird der viel benutzte Satz, daß zwei Normalteiler, die nur das Einheitselement gemeinsam haben, miteinander elementweise vertauschbar sind, auf nachinvariante Untergruppen verallgemeinert. Es ergibt sich z. B.:

Zwei nachinvariante Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$, die nur das Einheitselement gemeinsam haben, sind sicher dann elementweise miteinander vertauschbar, wenn es keine Primzahl gibt, die sowohl Kompositionsfaktor von $\mathfrak{A}$ wie von $\mathfrak{B}$ ist.

Den bisher erwähnten Sätzen, bei denen es sich um die Verallgemeinerung von Eigenschaften der Normalteiler handelt, tritt in Abschnitt V eine Reihe

von Sätzen gegenüber, zu denen es bei den Normalteilern kein Gegenstück gibt. So gibt es Sätze, die aus der Nachinvarianz einer Untergruppe unter gewissen Zusatzbedingungen auf ihre Invarianz schließen lassen. Als Beispiel sei der folgende genannt, der von perfekten Gruppen handelt, d. h. solchen, die mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmen:

$\mathfrak{A}$ sei eine perfekte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$; unter den Normalteilern von $\mathfrak{A}$ befinde sich nur ein maximaler. Es gebe in $\mathfrak{G}$ eine nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{G}$, die mit $\mathfrak{A}$ zusammen $\mathfrak{G}$ erzeugt. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Andere Sätze besagen, daß unter gewissen Bedingungen zwei nachinvariante Untergruppen als Ganze vertauschbar sind. Z. B.:

Eine perfekte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist mit jeder nachinvarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vertauschbar.

Die perfekten nachinvarianten Untergruppen beherrscht man weitgehend (Satz 21, 22).

In Abschnitt VI wird gezeigt, wie die Sätze über nachinvariante Untergruppen auch der Untersuchung beliebiger Untergruppen nutzbar gemacht werden können. Wir verstehen für eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ unter $\overline{\mathfrak{U}}$ die kleinste nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, in welcher $\mathfrak{U}$ enthalten ist, und unter $\underline{\mathfrak{U}}$ die größte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche in $\mathfrak{U}$ liegt. Es ist $\underline{\mathfrak{U}} < \mathfrak{U} < \overline{\mathfrak{U}}$. Wir haben in $j(\overline{\mathfrak{U}}, \underline{\mathfrak{U}})$ ein Maß dafür, wie sehr sich $\mathfrak{U}$ von einer nachinvarianten Untergruppe unterscheidet ($j(\overline{\mathfrak{U}}, \underline{\mathfrak{U}}) = 0$ bedeutet, daß $\mathfrak{U}$ nachinvariant ist). Mit diesen Begriffen läßt sich der Satz vom Erzeugnis zweier nachinvarianter Untergruppen folgendermaßen verallgemeinern:

$\mathfrak{A}$ sei eine nachinvariante und $\mathfrak{U}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ihr Erzeugnis sei $\mathfrak{R}$. Dann ist $j(\overline{\mathfrak{R}}, \underline{\mathfrak{R}}) \leqq j(\overline{\mathfrak{U}}, \underline{\mathfrak{U}})$.

In Abschnitt VII kehren wir die Fragestellung gewissermaßen um. Wir untersuchen nicht mehr die nachinvarianten Untergruppen $\mathfrak{A}$ einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$, sondern wir fragen bei gegebenem $\mathfrak{A}$ nach den Gruppen $\mathfrak{G}$, in welche sich $\mathfrak{A}$ nachinvariant einbetten läßt. Wir beschränken uns auf endliche Gruppen und behandeln die Frage, ob bei festem $\mathfrak{A}$ die Ordnung der einbettenden Gruppe $\mathfrak{G}$ beliebig groß werden kann. Um triviale Möglichkeiten wie die Bildung direkter Produkte auszuschließen, beschränken wir uns auf Einbettungen ohne Zentralisator; d. h. das einzige Element von $\mathfrak{G}$, das mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar ist, soll das Einheitselement sein. Die Antwort lautet verneinend:

Ist $\mathfrak{A}$ nachinvariant und ohne Zentralisator in $\mathfrak{G}$ enthalten, und ist a die Ordnung von $\mathfrak{A}$, g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, so ist $g \leqq a^{3\alpha_2^3}$ $(\alpha_2 = \log_2 a)$.

Der Beweis beruht auf Abschätzungen für die Ordnung des Normalisators einer nachinvarianten Untergruppe $\mathfrak{A}$ (d. h. der größten Untergruppe von $\mathfrak{G}$, in der $\mathfrak{A}$ als Normalteiler enthalten ist); für perfekte Untergruppen gilt:

Die perfekte Gruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung a sei nachinvariant in der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g enthalten. Dann genügt die Ordnung n des Normalisators von $\mathfrak{A}$ der Ungleichung

$$n \geqq \frac{g}{\gamma_{60}^{\alpha_{60}}} \qquad (\alpha_{60} = \underset{60}{\log} a,\ \gamma_{60} = \underset{60}{\log} g).$$

Diese Abschätzung bedeutet, ganz grob gesprochen, daß eine kleine perfekte nachinvariante Untergruppe nahezu invariant ist. Für beliebige nachinvariante Untergruppen $\mathfrak{A}$ gilt ein etwas komplizierterer Satz (39), welcher besagt, daß entweder der Normalisator von $\mathfrak{A}$ groß ist oder $\mathfrak{G}$ einen großen Normalteiler von Primzahlpotenzordnung enthält.

Wie in Abschnitt VIII gezeigt wird, kann man den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts die Antwort auf eine verschiedentlich aufgeworfene Frage[2]) entnehmen, nämlich ob der Automorphismengruppenturm einer endlichen Gruppe ohne Zentrum[3]) abbrechen muß. Es handelt sich um folgendes: $\mathfrak{A}$ sei eine beliebige endliche Gruppe, $\mathfrak{A}_1$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}_1$ enthält als einen Normalteiler die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{A}$. Wenn nun das Zentrum von $\mathfrak{A}$ nur aus dem Einheitselement besteht, dann ist $\mathfrak{A}$ zu der Gruppe seiner inneren Automorphismen isomorph und erscheint so als Normalteiler von $\mathfrak{A}_1$. Das Zentrum von $\mathfrak{A}_1$ besteht von selbst wieder nur aus dem Einheitselement, so daß man $\mathfrak{A}_1$ seinerseits als Normalteiler in seine Automorphismengruppe $\mathfrak{A}_2$ einbetten kann, usw. Das Verfahren bricht dann und nur dann ab, wenn einmal eine Gruppe $\mathfrak{A}_r$ entsteht, die nur innere Automorphismen besitzt.

Es kann gezeigt werden, daß $\mathfrak{A}$ nachinvariant und ohne Zentralisator in jedes $\mathfrak{A}_\varrho$ eingebettet ist. Daher gilt für die Ordnung von $\mathfrak{A}_\varrho$:

$$a_\varrho \leqq a^{3\,\alpha_2^2}.$$

So ergibt sich der Satz:

Der Automorphismengruppenturm einer endlichen Gruppe ohne Zentrum bricht notwendig ab.

---

[2]) Vgl. z. B. Zassenhaus, S. 43.

[3]) Wir erlauben uns diese kurze und unmißverständliche Bezeichnung für eine Gruppe, deren Zentrum nur aus dem Einheitselement besteht. Unter dem Zentrum einer Gruppe $\mathfrak{A}$ wird die Gruppe der mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{A}$ verstanden.

II.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlicher Kompositionsreihe. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so bezeichnen wir ihr Erzeugnis, ihre kleinste gemeinsame Obergruppe, mit $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ und ihren Durchschnitt, ihre größte gemeinsame Untergruppe, mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Für $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$ schreiben wir auch $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, und ist $\mathfrak{A}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{B}$, so schreiben wir $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B}$.

Definition. Die Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt nachinvariant (in Zeichen: $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$), wenn es in $\mathfrak{G}$ eine endliche Kette von Untergruppen $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}$ gibt, so daß für $\varrho = 1, \ldots, r$ $\mathfrak{A}_\varrho$ ein Normalteiler von $\mathfrak{A}_{\varrho-1}$ ist:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_r \lhd \mathfrak{A}_{r-1} \lhd \ldots \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{G}.$$

Offenbar gilt:

(1)* *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.

Wir untersuchen zunächst Durchschnittsbildungen und beginnen mit dem Fall einer nachinvarianten und einer beliebigen Untergruppe.

(2)* *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}$, *so ist* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}') \lhd\lhd \mathfrak{G}'$.

Zum Beweis bilden wir für jedes Glied $\mathfrak{A}_\varrho$ ($\varrho = 0, 1, \ldots, r$) einer Normalkette, die von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ führt, den Durchschnitt $(\mathfrak{A}_\varrho, \mathfrak{G}') = \mathfrak{A}'_\varrho$. Es ist $\mathfrak{A}'_\varrho \lhd \mathfrak{A}'_{\varrho-1}$; denn wenn G ein Element von $\mathfrak{A}'_{\varrho-1}$ ist, wird $G^{-1}\mathfrak{A}_\varrho G = \mathfrak{A}_\varrho$ und $G^{-1}\mathfrak{G}'G = \mathfrak{G}'$, und daher ist

$$G^{-1}\mathfrak{A}'_\varrho G = (G^{-1}\mathfrak{A}_\varrho G,\ G^{-1}\mathfrak{G}'G) = (\mathfrak{A}_\varrho, \mathfrak{G}') = \mathfrak{A}'_\varrho.$$

Ferner ist $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{A}'_r = (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}')$. Also bilden die $\mathfrak{A}'_\varrho$ eine Normalkette, die von $\mathfrak{G}'$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}')$ führt.

Zwei Spezialfälle des Satzes (2) treten häufig auf: daß $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}'$ enthalten ist oder daß außer $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{G}'$ nachinvariant ist.

(3)* *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}' < \mathfrak{G}$, *so ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}'$.

Das folgt unmittelbar aus (2).

(4)* *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, *so ist* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \lhd\lhd \mathfrak{G}$.

Das folgt aus (2) und (1). — Um (4) durch eine Isomorphieaussage zu ergänzen, beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

(5)* *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein maximaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$, *und ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, *so ist der Durchschnitt* $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$ *entweder gleich* $\mathfrak{A}$ *oder gleich einem maximalen Normalteiler von* $\mathfrak{A}$, *dessen Faktorgruppe* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ *isomorph zu* $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ *ist.*

Beweis. Wir bilden $\mathfrak{G}$ homomorph auf die einfache Faktorgruppe $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ ab, indem wir dem Element G die Nebengruppe $\mathfrak{M}G$ zuordnen. Bei einer homomorphen Abbildung gehen Normalketten in Normalketten und daher nachinvariante Untergruppen in nachinvariante Untergruppen über.

* Ein Stern bei der Nummer bedeutet: Der Satz gilt auch ohne die in der Einleitung gemachte Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt.

Als nachinvariante Untergruppe der einfachen Gruppe $\mathfrak{F}$ muß das Bild von $\mathfrak{A}$ entweder die ganze Gruppe $\mathfrak{F}$ oder ihr Einheitselement E sein. Da die Elemente von $\mathfrak{A}$, welche auf E abgebildet werden, gerade $\mathfrak{A}'$ ausmachen, ist im ersten Fall $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \backsim \mathfrak{F}$, im zweiten $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \backsim E$ ($\backsim$ bedeutet „isomorph“).

Wir können jetzt (4) durch den folgenden Satz ergänzen:

(6) *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, *so sind die Kompositionsfaktorgruppen von* $\mathfrak{B}$ *bis* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *ein Teil derjenigen von* $\mathfrak{G}$ *bis* $\mathfrak{A}$.

Insbesondere sind die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ *bis* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *dieselben wie die von* $\mathfrak{G}$ *bis* $\mathfrak{A}$ *und von* $\mathfrak{G}$ *bis* $\mathfrak{B}$ *zusammen, abgesehen von der Vielfachheit.*

Zum Beweis bilden wir für jedes Glied $\mathfrak{A}_\varrho$ ($\varrho = 0, 1, \ldots, r$) einer Kompositionskette, die von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ führt, den Durchschnitt $(\mathfrak{A}_\varrho, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}'_\varrho$. In $\mathfrak{A}_{\varrho-1}$ ist $\mathfrak{A}_\varrho$ als maximaler Normalteiler und $\mathfrak{A}'_{\varrho-1}$ als nachinvariante Untergruppe enthalten. Nach (5) ist entweder $\mathfrak{A}'_\varrho = \mathfrak{A}'_{\varrho-1}$ oder $\mathfrak{A}'_\varrho$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{A}'_{\varrho-1}$ mit der Faktorgruppe $\mathfrak{A}'_{\varrho-1}/\mathfrak{A}'_\varrho \backsim \mathfrak{A}_{\varrho-1}/\mathfrak{A}_\varrho$. Die verschiedenen unter den $\mathfrak{A}'_\varrho$ bilden eine Kompositionskette von $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{A}'_r = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, und die zugehörigen Kompositionsfaktorgruppen sind ein Teil derjenigen, die zu der Kompositionskette $\mathfrak{A}_\varrho$ gehören. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen; der zweite folgt unmittelbar aus dem ersten.

Während sich, wie gezeigt, die Sätze über Durchschnittsbildung leicht von Normalteilern auf nachinvariante Untergruppen übertragen lassen, liegt es bei Erzeugnisbildung anders. So ist ein gemeinsamer Normalteiler $\mathfrak{A}$ zweier Untergruppen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ von $\mathfrak{G}$ auch im Erzeugnis $\{\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''\}$ invariant; das folgende Beispiel zeigt, daß das Entsprechende für Nachinvarianz nicht gilt: Wir wählen für $\mathfrak{G}$ die Gruppe aller Permutationen von fünf Symbolen $x_1, x_2, \ldots, x_5$, für $\mathfrak{A}$ die von der Transposition $(x_1 x_2)$ erzeugte Gruppe der Ordnung 2, für $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ die Gruppen der Ordnung 8, die von $\mathfrak{A}$ und dem Zyklus $(x_1 x_3 x_2 x_4)$ bzw. von $\mathfrak{A}$ und dem Zyklus $(x_1 x_3 x_2 x_5)$ erzeugt werden. Man prüft leicht nach, daß $\mathfrak{A}$ eine nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ ist, und daß $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ zusammen $\mathfrak{G}$ erzeugen. $\mathfrak{A}$ ist nicht nachinvariant in $\mathfrak{G}$, weil der kleinste $\mathfrak{A}$ enthaltende Normalteiler von $\mathfrak{G}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. — Dagegen läßt sich der Satz, daß das Erzeugnis zweier Normalteiler von $\mathfrak{G}$ wieder ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, auf nachinvariante Untergruppen verallgemeinern:

(7)** *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, *so ist* $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.

** Zwei Sterne bei der Satznummer bedeuten: Benutzt man in dem nachstehend mitgeteilten Beweis statt $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ die in der Einleitung erklärte Größe $m(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$, so kann die Voraussetzung der endlichen Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ durch die schwächere Forderung ersetzt werden, daß die nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ die Maximalbedingung erfüllen. — Die Frage, ob auch diese Bedingung nach abgeschwächt werden kann, scheint schwierig.

Den Beweis erbringen wir durch einen doppelten Induktionsschluß. Erstens setzen wir voraus, daß der Satz für alle Gruppen $\mathfrak{G}'$ schon bewiesen ist, deren Kompositionsreihe kürzer ist als die von $\mathfrak{G}$; wir machen also einen Induktionsschluß in bezug auf $j(\mathfrak{G}, E)$; für $j(\mathfrak{G}, E) = 0$ ist der Satz trivial richtig, da dann $\mathfrak{G}$ nur aus dem Einheitselement besteht. Zweitens setzen wir voraus, daß innerhalb der betrachteten Gruppe $\mathfrak{G}$ der Satz schon für alle Paare nachinvarianter Untergruppen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ bewiesen ist, für welche $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}') + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}') < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ ist; für $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) = 0$ ist er trivial richtig, weil dann $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$ ist.

Falls $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = 0$ ist, ist Satz (7) richtig, weil dann $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{G}$ ist. Wir setzen im folgenden voraus, daß $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = r > 0$ ist, und ebenso $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) = s > 0$. Wir betrachten zwei Kompositionsketten

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_r \lhd \mathfrak{A}_{r-1} \lhd \ldots \lhd \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{G},$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_s \lhd \mathfrak{B}_{s-1} \lhd \ldots \lhd \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}.$$

Auf Grund der Induktionsvoraussetzungen können wir zwei vereinfachende Annahmen machen:

a) *Wir können annehmen, daß* $\mathfrak{A}_{r-1}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zusammen die ganze Gruppe* $\mathfrak{G}$ *erzeugen.* Denn nach Induktionsannahme ist $\{\mathfrak{A}_{r-1}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{G}' \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{G}$, so ist $j(\mathfrak{G}', E) < j(\mathfrak{G}, E)$, ferner ist nach (3) $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}'$; also ist nach Induktionsvoraussetzung $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} \lhd\lhd \mathfrak{G}'$. Da außerdem $\mathfrak{G}' \lhd\lhd \mathfrak{G}$, ist nach (1) $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} \lhd\lhd \mathfrak{G}$.

Wir können aus demselben Grund annehmen, daß auch $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_{s-1}\} = \mathfrak{G}$ ist.

b) *Wir können annehmen, daß* $\mathfrak{A}$ *gegenüber allen Ähnlichkeitstransformationen mit Elementen aus* $\mathfrak{B}$ *invariant ist.* Denn andernfalls gibt es in $\mathfrak{B}$ ein Element B, so daß $B^{-1}\mathfrak{A}B \not< \mathfrak{A}$ ist, und wir erschließen die Richtigkeit von Satz (7) folgendermaßen aus den Induktionsvoraussetzungen:

Da die Ähnlichkeitstransformation mit B einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$ bewirkt, der $\mathfrak{A}_1$ ungeändert läßt, ist neben $\mathfrak{A}$ auch $B^{-1}\mathfrak{A}B$ eine nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{A}_1$. Da $j(\mathfrak{A}_1, E) = j(\mathfrak{G}, E) - 1$ ist, ist nach Induktionsvoraussetzung $\{\mathfrak{A}, B^{-1}\mathfrak{A}B\} = \mathfrak{A}^* \lhd\lhd \mathfrak{A}_1$, also $\mathfrak{A}^* \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{A}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{A}^*$ ist, ist $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}^*) < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$; daher ist nach Induktionsvoraussetzung $\{\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}\} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Nun ist aber

$$\{\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}, B^{-1}\mathfrak{A}B, \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}.$$

Wir können aus demselben Grund auch annehmen, daß $\mathfrak{B}$ gegenüber $\mathfrak{A}$ invariant ist.

In dem jetzt allein noch zu erörternden Fall, daß außer den ursprünglichen Voraussetzungen des Satzes (7) noch die Voraussetzungen a) und b) erfüllt sind, ist nicht nur, wie behauptet, $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, sondern sogar $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} \lhd \mathfrak{G}$.

Denn $\mathfrak{A}$ bleibt ungeändert bei allen Ähnlichkeitstransformationen mit Elementen aus $\mathfrak{A}_{r-1}$ oder aus $\mathfrak{B}$, daher ist $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}_{r-1}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{G}$. Ebenso ist $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{G}$.

Um Satz (7) durch eine Isomorphieaussage zu ergänzen, beweisen wir zunächst einen Hilfssatz über vertauschbare nachinvariante Untergruppen. Bekanntlich sind zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Gruppe dann und nur dann vertauschbar, wenn $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist.

(8) *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, *so sind die Kompositionsfaktorgruppen von* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *bis* $\mathfrak{A}$ *dieselben wie die von* $\mathfrak{B}$ *bis* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Den Beweis erbringen wir durch einen Induktionsschluß in bezug auf $j(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$. Diese Größe ist definiert, weil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach (7) eine nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist und daher eine endliche Kompositionsreihe besitzt.

Für $j(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = 0$ ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, also $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$, und daher Satz (8) trivial richtig. Nun sei $j(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) > 0$. Dann gibt es in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$, der $\mathfrak{A}$ enthält und infolgedessen $\mathfrak{B}$ nicht enthält. Nach (5) ist der Durchschnitt $(\mathfrak{M}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{B}$ mit der Faktorgruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}' \backsim \mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$. Um den Beweis von (8) zu vollenden, haben wir nur noch zu zeigen, daß die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{M}$ bis $\mathfrak{A}$ dieselben sind wie die von $\mathfrak{B}'$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Diese Tatsache folgt aber unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung, sobald wir nachgeprüft haben, daß

$$\text{a) } \mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}, \qquad \text{b) } \mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{M}, \qquad \text{c) } (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}') = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

ist. Wir stellen ein vorgegebenes Element M aus $\mathfrak{M}$ in der Form $M = AB$ dar. Da M und A in $\mathfrak{M}$ liegen, ist B ebenfalls ein Element von $\mathfrak{M}$, daher von $\mathfrak{B}'$. Also ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{A}\mathfrak{B}'$. Da umgekehrt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' < \mathfrak{M}$ ist, ist b) nachgewiesen. Aus b) folgt $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}'\} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, daher gilt a). Ferner ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}') = (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, also gilt c).

Indem wir die Voraussetzung der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wieder fallen lassen, beweisen wir folgende Ergänzung zu Satz (7):

(9) *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, *so tritt jede der Kompositionsfaktorgruppen von* $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ *bis* $\mathfrak{A}$ *auch unter denen von* $\mathfrak{B}$ *bis* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *auf.*

Insbesondere sind die Kompositionsfaktorgruppen von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ *dieselben wie die von* $\mathfrak{A}$ *und von* $\mathfrak{B}$ *zusammen, abgesehen von der Vielfachheit.*

Zum ersten Teil des Satzes gilt nach (6) auch die Umkehrung, daß jede der Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ in mindestens derselben Vielfachheit unter denen von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ bis $\mathfrak{A}$ vorkommt.

Der zweite Teil von Satz (9) folgt unmittelbar aus dem ersten. Den Beweis des ersten Teils erbringen wir durch einen Induktionsschluß in bezug auf $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$. Für $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) = 0$ ist die Behauptung trivial richtig. Nun sei $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) > 0$. Dann gibt es einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$,

welcher $\mathfrak{B}$ enthält. Wir setzen $(\mathfrak{G}', \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}'$. Es ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) < \mathfrak{A}' \lhd \mathfrak{A}$. Wir erledigen zuerst in zwei Schritten a), b) den Fall, daß $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}'$ ist, und dann unter c) den Fall $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \mathfrak{A}'$. Die beigegebenen Abbildungen sollen den Beweisgang veranschaulichen. Es bedeutet darin z. B. 1 eine Kompositionskette von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ bis $\mathfrak{A}$. Unter $\{1\}$ verstehen wir die Menge der zu der Kette 1 gehörenden Kompositionsfaktorgruppen, wobei wir nicht auf die Vielfachheit achten.

Ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}'$, so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \lhd \mathfrak{A}$, und daher ist

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = A^{-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\, A = (\mathfrak{A}, A^{-1}\mathfrak{B}A) < A^{-1}\mathfrak{B}A$$

für jedes Element A von $\mathfrak{A}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) Es sei $\mathfrak{B}$ nicht invariant gegenüber $\mathfrak{A}$. Dann ist $A^{-1}\mathfrak{B}A \not< \mathfrak{B}$ für ein geeignetes A, d. h. es ist $\{\mathfrak{B}, A^{-1}\mathfrak{B}A\} = \mathfrak{B}^*$ größer als $\mathfrak{B}$. Unsere Behauptung (siehe Fig. 1) lautet: $\{1\} \subset \{5\} + \{6\}$. Um sie zu beweisen, betätigen wir der Reihe nach die in der folgenden Kette angedeuteten Beziehungen:

$$\{1\} \subset \{2\} \subset \{2\} + \{3\} = \{4\} + \{5\} + \{6\} \subset \{7\} + \{5\} + \{6\} = \{5\} + \{6\}.$$

Da $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}^*) < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ ist, kommt nach Induktionsvoraussetzung jede der Kompositionsfaktorgruppen von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^*\}$ bis $\mathfrak{A}$ unter denen von $\mathfrak{B}^*$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^*)$ vor; nun ist $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^*\} = \{\mathfrak{A}, A^{-1}\mathfrak{B}A, \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$; daher gilt $\{1\} \subset \{2\}$. Daß $\{2\} \subset \{2\} + \{3\}$ ist, ist trivial. $2 + 3$ und $4 + 5 + 6$ sind zwei Kompositionsketten von $\mathfrak{B}^*$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, also ist $\{2\} + \{3\} = \{4\} + \{5\} + \{6\}$. $\mathfrak{B}$ und $A^{-1}\mathfrak{B}A$ sind nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}'$, und es ist $j(\mathfrak{G}', A^{-1}\mathfrak{B}A) = j(\mathfrak{G}', \mathfrak{B}) < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$. Daher trifft nach Induktionsvoraussetzung jede der Kompositionsfaktorgruppen von

$$\mathfrak{B}^* = \{\mathfrak{B}, A^{-1}\mathfrak{B}A\}$$

bis $\mathfrak{B}$ unter denen von $A^{-1}\mathfrak{B}A$ bis $(\mathfrak{B}, A^{-1}\mathfrak{B}A)$ auf; d. h. es gilt $\{4\} \subset \{7\}$. Nun haben wir nur noch $\{7\} \subset \{5\} + \{6\}$ nachzuweisen. Die Ähnlichkeitstransformation mit A führt jede Kompositionskette von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ in eine Kompositionskette von $A^{-1}\mathfrak{B}A$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ über, daher gilt $\{7\} + \{6\} = \{5\} + \{6\}$, daher $\{7\} \subset \{5\} + \{6\}$. Damit ist der Fall a) erledigt.

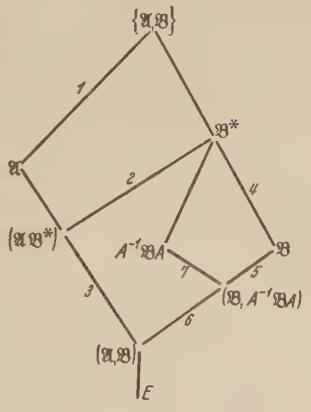


Fig. 1.

b) Es sei $\mathfrak{B}$ invariant gegenüber $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, und die Behauptung (9) folgt aus Hilfssatz (8).

c) Nun sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \mathfrak{A}'$. Dann ist das Erzeugnis $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{B}\} = \mathfrak{B}'$ größer als $\mathfrak{B}$. Unsere Behauptung lautet (siehe Fig. 2): $\{1\} \subset \{5\}$. Wir beweisen der Reihe nach

$$\{1\} \subset \{2\} \subset \{2\} + \{3\} = \{4\} \subset \{5\}.$$

Weil $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}') < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ ist, tritt nach Induktionsvoraussetzung jede der Kompositionsfaktorgruppen von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}'\}$ bis $\mathfrak{A}$ auch unter denen von $\mathfrak{B}'$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}')$ auf; nun ist aber $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}'\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$; daher gilt $\{1\} \subset \{2\}$. Trivial ist $\{2\} \subset \{2\} + \{3\}$. Es ist $\mathfrak{A}' < (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}') < \mathfrak{B}'$, daher ist $\{2\} + \{3\} = \{4\}$. Es ist $j(\mathfrak{G}', \mathfrak{B}) < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$, also tritt nach Induktionsvoraussetzung jede der Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{B}' = \{\mathfrak{A}', \mathfrak{B}\}$ bis $\mathfrak{A}'$ unter denen von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B})$ auf; aber es ist $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}', \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$; daher gilt $\{4\} \subset \{5\}$. Damit ist Satz (9) bewiesen.

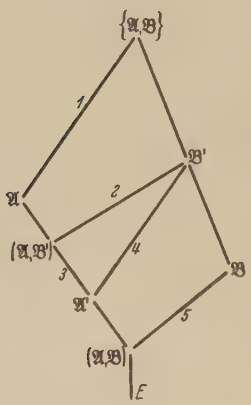


Fig. 2.

Einige besondere Fälle mögen hervorgehoben werden.

(10) *Das Erzeugnis von zwei nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$, deren Ordnungen a und b endlich sind, ist eine endliche nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, in deren Ordnung nur Primfaktoren von ab aufgehen.*

Denn das Erzeugnis ist nach (7) nachinvariant, hat also eine endliche Kompositionsreihe, und seine Kompositionsfaktoren sind nach (9) endlich und nur durch Primfaktoren von ab teilbar.

Ebenso beweist man:

(11) *Das Erzeugnis von zwei auflösbaren nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ ist eine auflösbare nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$.*

Weitere Sätze dieser Art, die etwas schärfer sind, finden sich im nächsten Abschnitt.

III.

Man kann die entwickelten Sätze dazu benutzen, die Gesamtheit der Kompositionsreihen der Gruppe $\mathfrak{G}$ zu untersuchen. Wir stellen zunächst folgendes fest:

(12) *Die Kette*

$$\mathfrak{A}_r < \mathfrak{A}_{r-1} < \ldots < \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}_0,$$

worin die $\mathfrak{A}_\varrho$ voneinander verschiedene nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind, kann zu einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ ergänzt werden. Insbesondere ist $r \leqq j(\mathfrak{G}, E)$.

Beweis. Nach (3) ist $\mathfrak{A}_\varrho \lhd\lhd \mathfrak{A}_{\varrho-1}$. Als nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ besitzt $\mathfrak{A}_{\varrho-1}$ eine endliche Kompositionsreihe. Daher kann man, falls $\mathfrak{A}_\varrho$ kein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{A}_{\varrho-1}$ ist, zwischen $\mathfrak{A}_{\varrho-1}$ und $\mathfrak{A}_\varrho$ eine Kompositionskette einschieben. Tut man dies für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ und fügt man, wenn nötig, eine Kompositionskette von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}_0$ und eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{A}_r$ an, so erhält man eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$, in welcher die $\mathfrak{A}_\varrho$ auftreten.

Aus (12) folgt insbesondere, daß jede aufsteigende oder absteigende Kette von nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ nur endlich viele voneinander verschiedene Glieder enthält: Die nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ erfüllen die Maximal- und Minimalbedingung [4]). (Umgekehrt folgt aus der Maximal- und Minimalbedingung für die nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ leicht, daß $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe hat. In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, daß es in einer Gruppe $\mathfrak{H}$, in der die Maximalbedingung nicht erfüllt ist, eine unendliche aufsteigende Folge nachinvarianter Untergruppen geben kann, deren Vereinigungsmenge nicht nachinvariant ist. Entsprechendes gilt, wenn in $\mathfrak{H}$ die Minimalbedingung nicht erfüllt ist, für den Durchschnitt absteigender Folgen.)

Nach (12) ist jede von $\mathfrak{G}$ bis E führende, nicht mehr zu verfeinernde Kette nachinvarianter Untergruppen von $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$, und umgekehrt. Daher sind sämtliche Kompositionsreihen von $\mathfrak{G}$ als bekannt anzusehen, wenn man alle nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und die zwischen ihnen bestehenden Enthaltenseinsbeziehungen kennt.

Mit Hilfe der Sätze über Durchschnitte und Erzeugnisse kann man aus zwei vorgelegten Kompositionsreihen von $\mathfrak{G}$ auf verschiedene Arten eine dritte herstellen. Die nächsten Sätze sollen diese Möglichkeiten deutlich machen. Im folgenden sei $\mathfrak{F}$ eine geordnete endliche Menge von einfachen Gruppen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l$, unter denen auch isomorphe vorkommen dürfen. Ist dann $\mathfrak{A}$ eine nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, für welche die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ abgesehen von der Vielfachheit in $\mathfrak{F}$ enthalten sind, so nennen wir eine vorgelegte Kompositionskette K von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ kurz eine $\mathfrak{F}$-Kette, wenn in ihr die Kompositionsfaktorgruppen in derselben Reihenfolge wie in $\mathfrak{F}$ auftreten, d. h. wenn K bei Hervorhebung geeigneter Glieder die folgende Form hat:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_l \lhd\lhd \mathfrak{A}_{l-1} \lhd\lhd \ldots \lhd\lhd \mathfrak{A}_1 \lhd\lhd \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{G},$$

wobei die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{A}_{\lambda-1}$ bis $\mathfrak{A}_\lambda$ sämtlich zu $\mathfrak{F}_\lambda$ isomorph sind ($\mathfrak{A}_{\lambda-1} \neq \mathfrak{A}_\lambda$ wird nicht verlangt).

[4]) Etwas umständlicher könnte man sogar zeigen, daß $\mathfrak{G}$ nur endlich viele nachinvariante Untergruppen enthält. Doch spielt dies im folgenden keine Rolle.

(13) *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. *Gibt es von* $\mathfrak{G}$ *bis* $\mathfrak{A}$ *eine* $\mathfrak{F}$*-Kette* $\mathfrak{A}_\lambda$ *und von* $\mathfrak{G}$ *bis* $\mathfrak{B}$ *eine* $\mathfrak{F}$*-Kette* $\mathfrak{B}_\lambda$, *so gibt es von* $\mathfrak{G}$ *bis zum Durchschnitt* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{D}$ *ebenfalls eine* $\mathfrak{F}$*-Kette* $\mathfrak{D}_\lambda$. *Man kann* $\mathfrak{D}_\lambda = (\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda)$ *wählen.*

Beweis. Um die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{D}_{\lambda-1}$ bis $\mathfrak{D}_\lambda$ zu bestimmen, schieben wir den Durchschnitt $(\mathfrak{D}_{\lambda-1}, \mathfrak{A}_\lambda)$ ein. Die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{D}_{\lambda-1}$ bis $(\mathfrak{D}_{\lambda-1}, \mathfrak{A}_\lambda)$ sind, weil $\mathfrak{D}_{\lambda-1}$ und $\mathfrak{A}_\lambda$ nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{A}_{\lambda-1}$ sind, nach Satz (6) ein Teil derjenigen von $\mathfrak{A}_{\lambda-1}$ bis $\mathfrak{A}_\lambda$, also isomorph zu $\mathfrak{F}_\lambda$. Die Kompositionsfaktorgruppen von $(\mathfrak{D}_{\lambda-1}, \mathfrak{A}_\lambda)$ bis $\mathfrak{D}_\lambda = (\mathfrak{D}_{\lambda-1}, \mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda)$ sind, da $(\mathfrak{D}_{\lambda-1}, \mathfrak{A}_\lambda)$ und $\mathfrak{B}_\lambda$ nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{B}_{\lambda-1}$ sind, ein Teil derjenigen von $\mathfrak{B}_{\lambda-1}$ bis $\mathfrak{B}_\lambda$, also ebenfalls isomorph zu $\mathfrak{F}_\lambda$. Ebenso beweist man unter Benutzung von Satz (9):

(14) *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. *Haben* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *je mindestens eine* $\mathfrak{F}$*-Kette* $\mathfrak{A}_\lambda$ *bzw.* $\mathfrak{B}_\lambda$ *als Kompositionsreihe, so hat auch ihr Erzeugnis* $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{K}$ *eine* $\mathfrak{F}$*-Kette* $\mathfrak{K}_\lambda$ *als Kompositionsreihe. Man kann* $\mathfrak{K}_\lambda = \{\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda\}$ *wählen.*

Aus den Sätzen (13) und (14) folgen ohne weiteres die entsprechenden Aussagen für den Durchschnitt und das Erzeugnis einer beliebigen endlichen Menge von nachinvarianten Untergruppen. Da man aber z. B. den Durchschnitt einer unendlichen Menge von nachinvarianten Untergruppen wegen der Minimalbedingung stets auch als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von ihnen darstellen kann, gilt Satz (13) für beliebige Mengen von nachinvarianten Untergruppen; entsprechend Satz (14). Wendet man z. B. Satz (13) auf den Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller zu einer nachinvarianten Untergruppe $\mathfrak{A}$ ähnlichen Gruppen an, so ergibt sich: Wenn es eine von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$ führende $\mathfrak{F}$-Kette gibt, so gibt es unter den Kompositionsreihen der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ eine $\mathfrak{F}$-Kette. Oder wenn man Satz (14) auf alle nachinvarianten Untergruppen anwendet, die eine $\mathfrak{F}$-Kette als Kompositionsreihe besitzen: $\mathfrak{G}$ enthält eine charakteristische Untergruppe, in welcher die und nur die nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ enthalten sind, welche eine $\mathfrak{F}$-Kette als Kompositionsreihe besitzen.

Satz (14) gestattet es, aus der Kenntnis der Anordnung der Kompositionsfaktorgruppen in einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{B}$ eine Aussage über die Anordnung in einer Kompositionsreihe des Erzeugnisses $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ zu gewinnen. Das Umgekehrte ist nur in beschränktem Maße möglich. Es gilt zwar der unmittelbar aus (5) folgende Satz:

(15) *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, *so ist jede oberste Kompositionsfaktorgruppe des Erzeugnisses* $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ *zu einer obersten Kompositionsfaktorgruppe von* $\mathfrak{A}$ *oder* $\mathfrak{B}$ *isomorph.*

Dabei wird unter einer obersten Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{G}$ die Faktorgruppe eines maximalen Normalteilers von $\mathfrak{G}$ verstanden. Aber einen entsprechenden Satz für das untere Ende der Kompositionsreihe gibt es nicht. $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ kann eine minimale nachinvariante Untergruppe besitzen, die zu keiner minimalen nachinvarianten Untergruppe von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ isomorph ist. Diese Tatsache ist in einem später zu erwähnenden Zusammenhang von Interesse; dort wird auch ein Beispiel angegeben (S. 225). — Aus den entwickelten Sätzen ergibt sich ein kurzer Beweis für die folgende, im wesentlichen wahrscheinlich bekannte Tatsache:

(16) *Dann und nur dann ist jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ nachinvariant, wenn $\mathfrak{G}$ endlich und gleich dem direkten Produkt seiner Sylowgruppen ist.*

Beweis. a) $\mathfrak{G}$ sei endlich und das direkte Produkt seiner Sylowgruppen. Dann ist zunächst jede Untergruppe von Primzahlpotenzordnung nachinvariant; denn sie ist in einer Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten, und zwar nach einem bekannten Satz sogar nachinvariant [5]) enthalten, und nach Voraussetzung ist $\mathfrak{S} \lhd \mathfrak{G}$. Weiter ist dann nach Satz (7) jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ als Erzeugnis ihrer Sylowgruppen nachinvariant.

b) Jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sei nachinvariant. Dann kommt diese Eigenschaft von $\mathfrak{G}$ auch jeder Untergruppe und jeder Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ zu, somit auch jeder Kompositionsfaktorgruppe. Da nun eine einfache Gruppe, deren Untergruppen sämtlich nachinvariant sind, Primzahlordnung hat, ist jeder Kompositionsfaktor von $\mathfrak{G}$ eine Primzahl, daher ist $\mathfrak{G}$ endlich. Zu jedem Primteiler p der Ordnung von $\mathfrak{G}$ kann es nur eine Sylowgruppe geben; denn das Erzeugnis von zweien hätte nach Satz (10) als Ordnung eine zu hohe Potenz von p. Also ist jede Sylowgruppe invariant, und daher ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.

IV.

Jetzt soll die Frage untersucht werden, in welchem Umfang sich der folgende bekannte Satz über Normalteiler [6]) auf nachinvariante Untergruppen verallgemeinern läßt: Wenn zwei Normalteiler $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Gruppe nur das Einheitselement E gemeinsam haben, so ist jedes Element von $\mathfrak{A}$ mit jedem Element von $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Wörtlich läßt sich dieser Satz sicher nicht übertragen. Es würde nämlich unter Benutzung von Satz (16) folgen, daß in einer Gruppe der Ordnung p^α (p Primzahl) je zwei Elemente der Ordnung p

[5]) Vgl. z. B. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. (Berlin 1927), Satz 68 und 80.

[6]) Vgl. z. B. Speiser, Satz 17.

vertauschbar sind, was nicht zutrifft. — Der schärfste Satz, den ich in dieser Richtung erhalten habe, lautet:

(17)** *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = E$. *Das Erzeugnis* $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ *werde mit* $\mathfrak{K}$ *bezeichnet, das Erzeugnis der Gruppen* $K^{-1}\mathfrak{A}K$, *worin* K *alle Elemente von* $\mathfrak{K}$ *durchläuft, mit* $\mathfrak{A}^*$, *und entsprechend das Erzeugnis aller Gruppen* $K^{-1}\mathfrak{B}K$ *mit* $\mathfrak{B}^*$. *Notwendig und hinreichend dafür, daß jedes Element von* $\mathfrak{A}$ *mit jedem Element von* $\mathfrak{B}$ *vertauschbar ist, ist die Bedingung: Der Durchschnitt* $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ *enthält keine abelsche nachinvariante Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *abgesehen von* E.

Daß die Bedingung notwendig ist, ist klar: Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar sind, ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{K}$, daher $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$, ebenso $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$ und somit $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*) = E$. Der Beweis, daß die Bedingung hinreichend ist, wird durch einen Induktionsschluß in bezug auf $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ geführt. Ist $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) = 0$, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$ und wegen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = E$ auch $\mathfrak{G} = E$, also ist die Behauptung trivial richtig. Wenn sowohl $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ wie $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$ ist, sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{K}$; da sie nach Voraussetzung fremd zueinander sind, sind sie elementweise vertauschbar. Wir brauchen weiterhin nur den Fall zu betrachten, daß entweder $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^*$ oder $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}^*$ ist, und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit das letztere annehmen. Da $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}^*$ ist, ist jedenfalls $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{G}$, also liegt $\mathfrak{B}$ in einem maximalen Normalteiler $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$. Wir setzen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}') = \mathfrak{A}'$; es ist $\mathfrak{A}' \lhd \mathfrak{A}$.

Wir wollen zunächst zeigen, daß $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar sind. Wir prüfen zu diesem Zweck nach, ob die offensichtlich nachinvarianten und zueinander fremden Untergruppen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}'$ die Bedingung des Satzes erfüllen. Wir setzen $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{B}\} = \mathfrak{K}'$. Es sei $\mathfrak{C}$ eine abelsche nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}'$, die sowohl in dem Erzeugnis

$$\{\ldots, K'^{-1}\mathfrak{A}'K', \ldots\} \quad \text{wie in} \quad \{\ldots, K'^{-1}\mathfrak{B}K', \ldots\}$$

liegt. Dann ist $\mathfrak{C} = E$. Das folgt daraus, daß $\mathfrak{C}$ eine abelsche nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, die wegen $\mathfrak{A}' < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}' < \mathfrak{K}$ jedenfalls in

$$\{\ldots, K^{-1}\mathfrak{A}K, \ldots\} = \mathfrak{A}^* \quad \text{und in} \quad \{\ldots, K^{-1}\mathfrak{B}K, \ldots\} = \mathfrak{B}^*$$

liegt. Also erfüllen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}'$ die Voraussetzungen des Satzes, und außerdem ist

$$j(\mathfrak{G}', \mathfrak{A}') + j(\mathfrak{G}', \mathfrak{B}) < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}).$$

Denn nach Satz (6) sind die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}'$ bis $\mathfrak{A}'$ ein Teil derjenigen von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{A}$, daher ist $j(\mathfrak{G}', \mathfrak{A}') \leqq j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$; ferner ist $j(\mathfrak{G}', \mathfrak{B}) = j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) - 1$. Also ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar.

Hieraus folgt, daß $\mathfrak{A}'$ sogar mit $\mathfrak{B}^*$ elementweise vertauschbar ist. Denn ist A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}$, so geht durch die Ähnlichkeitstransfor-

nation mit A die Gruppe $\mathfrak{B}$ in $A^{-1}\mathfrak{B}A$ und die Gruppe $\mathfrak{A}'$ in sich über; daher ist $\mathfrak{A}'$ mit jeder Gruppe $A^{-1}\mathfrak{B}A$ elementweise vertauschbar und infolgedessen auch mit dem Erzeugnis $\{\ldots, A^{-1}\mathfrak{B}A, \ldots\}$. Dieses stimmt mit $\mathfrak{B}^*$ überein. Denn einerseits liegt es in $\{\ldots, K^{-1}\mathfrak{B}K, \ldots\} = \mathfrak{B}^*$, andererseits ist es invariant gegenüber $\mathfrak{A}$ und (trivialerweise, weil es $\mathfrak{B}$ enthält) gegenüber $\mathfrak{B}$, ist also ein Normalteiler von $\mathfrak{R}$; da es $\mathfrak{B}$ enthält, enthält es auch alle $K^{-1}\mathfrak{B}K$ und damit auch $\mathfrak{B}^*$.

Als nächstes zeigen wir, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^*$ nur E gemeinsam haben. Wir setzen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{D}$ und behaupten: $\mathfrak{D} = E$. Es ist $\mathfrak{D} < \mathfrak{A}$ und

$$\mathfrak{D} < \mathfrak{B}^* = \{\ldots, K^{-1}\mathfrak{B}K, \ldots\} < \{\ldots, K^{-1}\mathfrak{G}'K, \ldots\} = \mathfrak{G}',$$

also $\mathfrak{D} < \mathfrak{A}'$. Als gemeinsame Untergruppe der beiden elementweise miteinander vertauschbaren Gruppen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}^*$ muß $\mathfrak{D}$ abelsch sein. Nun ist aber $\mathfrak{D} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D} < (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^*) < (\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$, also ist nach Voraussetzung $\mathfrak{D} = E$.

Wir zeigen jetzt im letzten Schritt des Beweises, daß $\mathfrak{A}$ sogar mit $\mathfrak{B}^*$ elementweise vertauschbar ist. Die nachinvarianten Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^*$ haben, wie eben gezeigt, nur E gemeinsam. Da

$$j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}^*) < j(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) + j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$$

ist, sind wir nach Induktionsvoraussetzung am Ziel, sobald wir nachgewiesen haben, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^*$ die Bedingung des Satzes erfüllen. Wir haben zunächst $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^*\}$ zu bilden. Es ist $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^*\} = \{\mathfrak{A}, \ldots, K^{-1}\mathfrak{B}K, \ldots\} = \mathfrak{R}$. Nun haben wir den Durchschnitt der beiden Gruppen $\{\ldots, K^{-1}\mathfrak{A}K, \ldots\}$ und $\{\ldots, K^{-1}\mathfrak{B}^*K, \ldots\}$ zu bilden; die erste Gruppe ist $\mathfrak{A}^*$, die zweite $\mathfrak{B}^*$. Also enthält ihr Durchschnitt nach Voraussetzung keine abelsche nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, außer E. Damit ist Satz (17) bewiesen.

Die Handhabung dieses Satzes wird dadurch erschwert, daß in seiner Voraussetzung außer den zu untersuchenden Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ vorkommen. Mit Hilfe der Isomorphieaussage über das Erzeugnis nachinvarianter Untergruppen kann man aus Satz (17) leicht ähnliche Sätze herleiten, in denen nur $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ selbst auftreten. Sie geben freilich nur hinreichende Bedingungen.

18) *Ein Normalteiler $\mathfrak{A}$ und eine nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$, die nur das Einheitselement E gemeinsam haben, sind sicher dann elementweise miteinander vertauschbar, wenn E der einzige abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, welchen $\mathfrak{A}$ enthält.*

Zum Beweis zeigen wir, daß jede abelsche nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ gleich E ist. $\mathfrak{C}$ ist eine auflösbare nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$; daher ist das Erzeugnis $\mathfrak{C}^*$ aller Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die zu $\mathfrak{C}$ ähnlich sind, ein auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$, ist $\mathfrak{C}^* < \mathfrak{A}$. Wäre $\mathfrak{C}^* \neq E$,

so enthielte $\mathfrak{A}$ entgegen der Voraussetzung einen von E verschiedenen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}$, nämlich [7]) die kleinste unter den von E verschiedenen höheren Kommutatorgruppen von $\mathfrak{C}^*$. Also ist $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} = E$. Nun folgt nach Satz (17), daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar sind, weil das dort erwähnte $\mathfrak{A}^*$ in unserem Fall $= \mathfrak{A}$ ist und daher keine abelsche nachinvariante Untergruppe außer E enthält. — Eine andere Folgerung aus Satz (17) lautet:

(19) *Zwei nachinvariante Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$, die nur das Einheitselement gemeinsam haben, sind sicher dann elementweise miteinander vertauschbar, wenn es keine Primzahl gibt, die sowohl Kompositionsfaktor von $\mathfrak{A}$ wie von $\mathfrak{B}$ ist.*

Beweis. Wir bestimmen zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ wie in Satz (17). Die Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{A}^*$ sind nach (9) dieselben wie die von $\mathfrak{A}$, daher tritt jeder Kompositionsfaktor des Durchschnitts $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ auch unter den Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{A}$ auf, und aus demselben Grunde auch unter denen von $\mathfrak{B}$. Aus der Voraussetzung des Satzes folgt, daß kein Kompositionsfaktor von $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ eine Primzahl ist. Daher enthält $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ keine abelsche nachinvariante Untergruppe außer E; nach (17) sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar.

Einige Anwendungsmöglichkeiten von Satz (19) seien hervorgehoben: Zwei zueinander fremde nachinvariante Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind elementweise vertauschbar, wenn jeder endliche Kompositionsfaktor von $\mathfrak{A}$ zusammengesetzt ist. Zwei nachinvariante Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind zueinander fremd und elementweise vertauschbar, wenn keine Kompositionsfaktorgruppe von $\mathfrak{A}$ zu einer von $\mathfrak{B}$ isomorph ist; das ist z. B. dann gesichert, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endliche Ordnungen ohne gemeinsamen Teiler haben.

Man könnte versucht sein, die auf $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ bezügliche Bedingung des Satzes (17) durch eine ähnliche Bedingung für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu ersetzen, etwa die folgende: Es gibt keine Primzahl p mit der Eigenschaft, daß sowohl $\mathfrak{A}$ wie $\mathfrak{B}$ eine nachinvariante Untergruppe der Ordnung p besitzt; doch ist diese Bedingung nicht hinreichend für elementweise Vertauschbarkeit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Sogar wenn man voraussetzt, daß sowohl $\mathfrak{A}$ wie $\mathfrak{B}$ überhaupt keine abelsche nachinvariante Untergruppe $\neq E$ besitzt, brauchen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht elementweise miteinander vertauschbar zu sein, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:

Wir wählen für $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ die Gruppe aller Permutationen von 5 bzw. 6 Symbolen. $\mathfrak{Z}$ sei die zyklische Gruppe der Ordnung 2, $\overline{Z}$ ihr von E verschiedenes Element. Aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{Z}$ setzen wir $\mathfrak{G}$ folgendermaßen zusammen: Wir bilden zunächst das direkte Produkt $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{A}$. Es besitzt einen Automorphismus σ der Ordnung 2, der durch

$$(Z A)^{\sigma} = Z A \cdot \overline{Z}^{\chi(A)}, \qquad \chi(A) = \begin{cases} 0 \text{ für gerade Permutationen } A, \\ 1 \text{ für ungerade Permutationen } A \end{cases}$$

[7]) Vgl. z. B. Speiser, Satz 36.

erklärt ist. Nun erweitern wir [8]) $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$, indem wir das Faktorsystem 1 wählen und dem Element B von $\mathfrak{B}$ den Automorphismus $\sigma^{\chi(B)}$ zuordnen; dabei wird wieder $\chi(B) = 0$ oder 1 gesetzt, je nach dem B eine gerade oder ungerade Permutation ist. In der so definierten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{A}$ nachinvariant enthalten, denn es ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{Z}\times\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$. Es ist aber auch $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$; denn zunächst ist $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{Z}$ elementweise vertauschbar, weil $\overline{Z}$ bei Anwendung von σ ungeändert bleibt; also erzeugen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{B}$ ein direktes Produkt $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{B}$; dieses ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, weil es trivialerweise gegenüber sich selbst, aber auch gegenüber $\mathfrak{A}$ invariant ist, wie folgende Rechnung zeigt:

$$B^{-1}AB = A^{\sigma^{\chi(B)}} = A\cdot\overline{Z}^{\chi(A)\,\chi(B)},$$

$$A^{-1}B^{-1}A = \overline{Z}^{\chi(A)\,\chi(B)}B^{-1}, \qquad A^{-1}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}A < \mathfrak{Z}\mathfrak{B};$$

also ist, wie behauptet, nicht nur $\mathfrak{A}$, sondern auch $\mathfrak{B}$ nachinvariant in $\mathfrak{G}$. Weder $\mathfrak{A}$ noch $\mathfrak{B}$ besitzt eine abelsche nachvariante Untergruppe $\neq E$. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind zueinander fremd, aber nicht elementweise miteinander vertauschbar; denn für zwei ungerade Permutationen A, B ist

$$B^{-1}AB = A\overline{Z} \neq A.$$

Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wie man z. B. aus der letzten Gleichung sieht, die Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugen, haben wir hier zugleich ein Beispiel dafür, daß das Erzeugnis zweier nachinvarianter Untergruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eine minimale nachinvariante Untergruppe (hier $\mathfrak{Z}$) enthalten kann, die zu keiner minimalen nachinvarianten Untergruppe von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ isomorph ist.

V.

Man kann die Sätze des vorigen Abschnitts so auffassen, daß aus der Nachinvarianz zweier Untergruppen unter gewissen Zusatzbedingungen ihre gegenseitige Invarianz folgt. In diesem Abschnitt werden einige weitere in dieser Richtung liegende Sätze bewiesen, die wegen der Allgemeinheit ihrer Voraussetzungen oft angewendet werden können. Sie handeln vor allem von perfekten Gruppen, d. h. solchen, die mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmen. Der Kürze wegen bezeichnen wir im folgenden eine Gruppe $\mathfrak{G}$ als einköpfig, wenn sie einen von $\mathfrak{G}$ verschiedenen Normalteiler enthält, der jeden von $\mathfrak{G}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ umfaßt. Der umfassendste echte Normalteiler einer einköpfigen Gruppe ist der einzige maximale Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und wird in diesem Abschnitt durchweg, ohne die Bezeichnung immer wieder zu erklären, mit $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ bezeichnet.

20)* *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}$ *sei perfekt und einköpfig*; $\mathfrak{A}$ *sei nicht in* $\mathfrak{B}$ *enthalten. Dann ist* $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$.

---

[8]) Über Erweiterung vgl. etwa Zassenhaus, S. 92.

Der Beweis erfolgt durch einen Induktionsschluß nach $j(\mathfrak{G}, E)$. Der kleinste mögliche Wert ist $j(\mathfrak{G}, E) = 1$, da $\mathfrak{A}$ nach Voraussetzung einen echten Normalteiler enthält; für $j(\mathfrak{G}, E) = 1$ ist der Satz trivial richtig, da dann $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$ ist. Nun sei $j(\mathfrak{G}, E) > 1$. Wir führen den Beweis indirekt, indem wir aus der Annahme, es gäbe in $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{R}$ ein Element K, so daß $K^{-1}\mathfrak{A}K = \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$ ist, einen Widerspruch herleiten.

Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{A} \not< \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}' \not< \mathfrak{A}$ ist. Wäre $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}'$, so wäre $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{A}'$. Nun ist $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}'$ isomorph, daher ist $j(\mathfrak{A}, E) = j(\mathfrak{A}', E)$; also wäre $j(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}) = 0$, d. h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, gegen unsere Annahme. Ebenso ergibt sich $\mathfrak{A}' \not< \mathfrak{A}$.

Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$ und $\mathfrak{A}' \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$ ist. Es gibt einen echten Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{A}$ enthält; denn sonst wäre $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, was der Annahme $K^{-1}\mathfrak{A}K \neq \mathfrak{A}$ widerspricht. $\mathfrak{H}$ enthält auch die zu $\mathfrak{A}$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}'$. Da $j(\mathfrak{H}, E) < j(\mathfrak{G}, E)$ ist, gilt der Satz in $\mathfrak{H}$ nach Induktionsvoraussetzung. Daher ist $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$. Es ist aber auch $\mathfrak{A}' \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$. Denn $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}$ genügen, in dieser Reihenfolge für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gesetzt, ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes, weil sich die Voraussetzung über die Struktur von $\mathfrak{A}$ wegen der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ bestehenden Isomorphie auf $\mathfrak{A}'$ überträgt.

Weil $\mathfrak{A} \not< \mathfrak{B}$ ist, ist $\mathfrak{B} \neq \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{R}$; daher gibt es in $\mathfrak{R}$ einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$, der $\mathfrak{B}$ enthält. $\mathfrak{M}$ enthält $\mathfrak{A}$ nicht; daher ist $\mathfrak{A}\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$. Ebenfalls ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{M} = K^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{M}K = \mathfrak{R}$. Nun gelangen wir zu einem Widerspruch, indem wir zeigen, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ einerseits nichtabelsch, anderseits abelsch ist. Daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ nichtabelsch ist, folgt aus der Perfektheit von $\mathfrak{A}$: Es ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, weil $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{A}$ ist. Daher ist nach (5) $\mathfrak{R}/\mathfrak{M} \backsim \mathfrak{A}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, und die letztere Gruppe ist nichtabelsch.

Anderseits seien zwei beliebige Nebengruppen von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ vorgelegt. Da $\mathfrak{A}\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$ ist, enthält die erste von ihnen ein Element A von $\mathfrak{A}$; da $\mathfrak{A}'\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$ ist, enthält die zweite ein Element A' von $\mathfrak{A}'$. Der Kommutator der beiden Nebengruppen ist $A^{-1}A'^{-1}AA'\mathfrak{M}$. Nun liegt $A^{-1}A'^{-1}AA'$, als ein wechselseitiger Kommutator der beiden Normalteiler $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$, in ihrem Durchschnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$. Dieser Durchschnitt ist, als echter Normalteiler von $\mathfrak{A}$, in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ enthalten. Weiter ist, wie oben gezeigt, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) < \mathfrak{M}$. Also liegt $A^{-1}A'^{-1}AA'$ in $\mathfrak{M}$. Die beiden vorgelegten Nebengruppen sind also vertauschbar, $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ ist abelsch. Damit ist der Beweis beendet.

Unser nächstes Ziel ist, uns von der Voraussetzung frei zu machen, daß $\mathfrak{A}$ einköpfig ist. Dies kann mit Hilfe des folgenden Satzes geschehen, durch den man die einköpfigen perfekten nachinvarianten Untergruppen beherrscht:

(21) *Die Anzahl l der einköpfigen perfekten nachinvarianten Untergruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$ von $\mathfrak{G}$ ist gleich der Anzahl der nichtabelschen*

Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$. *Die Gesamtheit der Faktorgruppen* $\mathfrak{A}_\lambda/\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_\lambda}$ *stimmt mit der Gesamtheit der nichtabelschen Kompositionsfaktorgruppen von* $\mathfrak{G}$ *überein.*

Der Beweis erfolgt durch einen Induktionsschluß in bezug auf $j(\mathfrak{G}, E)$. Für $j(\mathfrak{G}, E) = 0$ ist der Satz trivial richtig mit $l = 0$. Ist $j(\mathfrak{G}, E) > 0$, so enthält $\mathfrak{G}$ einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ ist abelsch. Dann sind die nichtabelschen Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ dieselben wie die von $\mathfrak{M}$. Auch die einköpfigen perfekten nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind dieselben wie die von $\mathfrak{M}$. Ist nämlich $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \not< \mathfrak{M}$, so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{A}$, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \backsim \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$, also abelsch ist; also ist $\mathfrak{A}$ nicht perfekt. Folglich liegt jede perfekte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{M}$. Da der Satz nach Induktionsvoraussetzung für $\mathfrak{M}$ gilt, ist er auch für $\mathfrak{G}$ bewiesen.

b) $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ ist nicht abelsch. Dann hat $\mathfrak{G}$ genau eine nichtabelsche Kompositionsfaktorgruppe mehr als $\mathfrak{M}$. Um unsere Behauptung zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß es in $\mathfrak{G}$ genau eine einköpfige perfekte nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{A}$ gibt, die nicht in $\mathfrak{M}$ liegt.

Daß es mindestens ein derartiges $\mathfrak{A}$ gibt, folgt aus der Gültigkeit der Minimalbedingung für die nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Wir wählen $\mathfrak{A}$ als eine minimale unter den nicht in $\mathfrak{M}$ liegenden nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ einköpfig mit dem umfassendsten Normalteiler $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$. Denn zunächst ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \lhd \mathfrak{A}$; ist weiter $\mathfrak{B} \lhd \mathfrak{A}$, so ist, wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{B} < (\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$. $\mathfrak{A}$ ist perfekt, denn sonst wäre die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{A}$, als echter Normalteiler von $\mathfrak{A}$, in $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ enthalten, also wäre $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ abelsch; es ist aber $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \backsim \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ und daher nach Voraussetzung b) nicht abelsch.

Nun haben wir die Annahme zum Widerspruch zu führen, es gäbe in $\mathfrak{G}$ eine von $\mathfrak{A}$ verschiedene einköpfige perfekte nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{A}'$, die nicht in $\mathfrak{M}$ liegt. Weil $\mathfrak{A}' \not< \mathfrak{M}$ ist, ist $(\mathfrak{A}', \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}'}$. Ferner ist, wie oben gezeigt, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$. Daraus folgt $\mathfrak{A} \not< \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}' \not< \mathfrak{A}$. Wäre nämlich $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}'$, so wäre $\mathfrak{A}$ eine nachinvariante echte Untergruppe von $\mathfrak{A}'$; wegen der Einköpfigkeit von $\mathfrak{A}'$ wäre $\mathfrak{A} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}'} = (\mathfrak{A}', \mathfrak{M}) < \mathfrak{M}$, entgegen der Bestimmung von $\mathfrak{A}$. Ebenso widerlegt man die Annahme $\mathfrak{A}' < \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ nicht ineinander enthalten sind, erfüllen sie die Voraussetzung von Satz (20) in beiden Richtungen; es ergibt sich $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$ und $\mathfrak{A}' \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$. Nun gelangt man, indem man den Beweis von Satz (20) wörtlich wiederholt, zu dem Widerspruch, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ zugleich abelsch und nichtabelsch ist. Damit ist die Existenz eines $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$ widerlegt und Satz (21) bewiesen.

Jetzt können wir die Untersuchung beliebiger perfekter nachinvarianter Untergruppen auf die Untersuchung der einköpfigen perfekten nachinvarianten Untergruppen zurückführen:

(22) *Eine perfekte und vom Einheitselement verschiedene Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist das Erzeugnis ihrer einköpfigen perfekten nachinvarianten Untergruppen.*

Beweis. Da $\mathfrak{G}$ perfekt und $\neq E$ ist, enthält $\mathfrak{G}$ nach (21) $l > 0$ einköpfige perfekte nachinvariante Untergruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$. Wäre ihr Erzeugnis $\{\ldots, \mathfrak{A}_\lambda, \ldots\} = \mathfrak{G}' \neq \mathfrak{G}$, so wäre $\mathfrak{G}'$ in einem maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten. Da $\mathfrak{G}$ perfekt ist, wäre $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nichtabelsch. Dann gäbe es, wie im Beweis von (21) gezeigt wurde, in $\mathfrak{G}$ eine einköpfige perfekte nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{A}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ liegt. Das widerspricht der Bestimmung von $\mathfrak{G}'$. Also ist $\{\ldots, \mathfrak{A}_\lambda, \ldots\} = \mathfrak{G}$.

Aus den beiden letzten Sätzen folgt, daß die Anzahl der perfekten nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ höchstens $2^{j(\mathfrak{G}, E)}$, also allein durch die Länge der Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ beschränkt ist, unabhängig von der Ordnung von $\mathfrak{G}$. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, daß es insbesondere „nur wenige" Untergruppen von $\mathfrak{G}$ geben wird, die zu einer vorgelegten perfekten nachinvarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ähnlich sind. Wir gehen hier nicht weiter auf diesen Punkt ein. Für endliche Gruppen $\mathfrak{G}$ wird die Behauptung, daß eine perfekte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ „nahezu invariant" ist, in Abschnitt VII in zahlenmäßig präzisierter Form bewiesen (Satz 33). — Eine ähnliche Aussage steckt in folgendem Satz:

(23) *Eine perfekte nachinvariante Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist mit jeder nachinvarianten Untergruppe* $\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{G}$ *vertauschbar.*

Wir können $\mathfrak{A} \neq E$ voraussetzen. Dann ist $\mathfrak{A} = \{\ldots, \mathfrak{A}_\lambda, \ldots\}$, worin $\mathfrak{A}_\lambda$ die einköpfigen perfekten nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{A}$ durchläuft. Jedes $\mathfrak{A}_\lambda$ ist mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Denn entweder ist $\mathfrak{A}_\lambda < \mathfrak{B}$, dann ist $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B} = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}_\lambda$. Oder es ist $\mathfrak{A}_\lambda \not< \mathfrak{B}$, dann ist $\mathfrak{A}_\lambda$ nach Satz (20) invariant gegenüber $\mathfrak{B}$ und daher erst recht mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Da alle $\mathfrak{A}_\lambda$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind, ist es auch ihr Erzeugnis $\mathfrak{A}$.

Wie dieser Beweis zeigt, ist $\mathfrak{A}$ sogar invariant gegenüber $\mathfrak{B}$, wenn kein $\mathfrak{A}_\lambda < \mathfrak{B}$ ist. Daher gilt:

(24) *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. *Ist* $\mathfrak{A}$ *perfekt und der Durchschnitt* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *auflösbar, so ist* $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$.

Man könnte noch eine ganze Reihe derartiger Invarianz- und Vertauschbarkeitssätze für perfekte nachinvariante Untergruppen herleiten, indem man die Isomorphiesätze für Durchschnitt und Erzeugnis heranzieht. Der Übersichtlichkeit wegen soll dies hier unterbleiben. Statt dessen beweisen wir einen

päter benötigten Satz ähnlicher Art, der sich nicht auf perfekte Untergruppen eschränkt:

5) *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. *Für keinen maximalen Normalteiler* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{A}$ *sei* $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ *zu einer der Kompositionsfaktorgruppen von* $\mathfrak{B}$ *bis* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *isomorph. Dann ist* $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$.

Beweis. Es sei das Erzeugnis $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{K}$ und der Durchschnitt aller u $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{K}$ ähnlichen Gruppen $(\ldots, K^{-1}\mathfrak{A}K, \ldots) = \mathfrak{D}$. Von $\mathfrak{K}$ bis $\mathfrak{A}$ treten ach (9) nur Kompositionsfaktorgruppen auf, die auch von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ vorommen. Nach (6) sind dann auch die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{K}$ is $\mathfrak{D}$ unter denen von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ enthalten, bis auf die Vielfachheit; das ilt erst recht für die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{D}$. Nun folgt $= \mathfrak{D}$. Denn andernfalls wäre $\mathfrak{D}$ in einem maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$ on $\mathfrak{A}$ enthalten; $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ wäre zu einer der Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{B}$ is $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ isomorph, entgegen der Voraussetzung. Also ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \lhd \mathfrak{K}$.

VI.

Bevor wir im nächsten Abschnitt die zuletzt berührten Fragen unter Beschränkung auf endliche Gruppen weiter verfolgen, soll in diesem Abschnitt ine Möglichkeit behandelt werden, die Sätze über nachinvariante Untergruppen zur Untersuchung beliebiger Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit ndlicher Kompositionsreihe zu verwenden. Wir benutzen durchweg die olgende Bezeichnung: Für eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ bedeute $\overline{\mathfrak{U}}$ en Durchschnitt aller nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{U}$ enthalten, nd $\underline{\mathfrak{U}}$ das Erzeugnis aller in $\mathfrak{U}$ enthaltenen nachinvarianten Untergruppen on $\mathfrak{G}$. $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\underline{\mathfrak{U}}$ sind (wegen der Minimal- und Maximalbedingung) nachnvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Offenbar ist $\underline{\mathfrak{U}} \lhd \mathfrak{U} < \overline{\mathfrak{U}}$. Ist $\mathfrak{U} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, o ist $\overline{\mathfrak{U}} = \underline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}$, und umgekehrt. Wir stellen zunächst einige einfache igenschaften von $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\underline{\mathfrak{U}}$ fest:

26) *Es ist*
$$\{\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}}\} = \{\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}}\}, \qquad \{\underline{\mathfrak{U}}, \underline{\mathfrak{B}}\} > \{\underline{\mathfrak{U}}, \underline{\mathfrak{B}}\},$$
$$(\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}}) < (\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}}), \qquad (\underline{\mathfrak{U}}, \underline{\mathfrak{B}}) = (\underline{\mathfrak{U}}, \underline{\mathfrak{B}}).$$

Den leichten Beweis übergehen wir, ebenso den Beweis der folgenden oft u benutzenden Tatsache: $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\underline{\mathfrak{U}}$ hängen außer von $\mathfrak{U}$ auch von $\mathfrak{G}$ ab; t aber $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}' \lhd\lhd \mathfrak{G}$, so ist es für die Bildung von $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\underline{\mathfrak{U}}$ gleichgültig, b man $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G}'$ als Obergruppe zugrunde legt.

Beim Beweis von (16) hat sich nebenbei der Satz ergeben, daß eine nachnvariante Sylowgruppe einer endlichen Gruppe sogar invariant ist. Diesen atz können wir jetzt verallgemeinern:

27) *Ist* $\mathfrak{S}$ *eine Sylowgruppe der endlichen Gruppe* $\mathfrak{G}$, *so sind* $\overline{\mathfrak{S}}$ *und* $\underline{\mathfrak{S}}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. a) Die Ordnung von $\mathfrak{S}$ sei p^α. $\overline{\mathfrak{S}}$ ist eine nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Index nicht durch p teilbar ist. Nach (6) ist auch der Index des Durchschnitts $\mathfrak{D}$ aller zu $\overline{\mathfrak{S}}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ nicht durch p teilbar. Als Normalteiler mit zu p teilerfremdem Index enthält $\mathfrak{D}$ jede p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$; daher ist $\mathfrak{S} < \mathfrak{D} < \overline{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{G}$, woraus $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{D} \lhd \mathfrak{G}$ folgt.

b) Die Ordnung der nachinvarianten Untergruppe $\underline{\mathfrak{S}}$ ist eine Potenz von p. Dasselbe gilt nach (10) für das Erzeugnis $\mathfrak{R}$ aller zu $\underline{\mathfrak{S}}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Nach den Sylowschen Sätzen [9]) ist $\mathfrak{R}$ in jeder p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ enthalten; daher ist $\underline{\mathfrak{S}} < \mathfrak{R} < \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{G}$, woraus $\underline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{R} \lhd \mathfrak{G}$ folgt.

Man kann einige der Sätze, die von zwei nachinvarianten Untergruppen handeln, auf eine nachinvariante und eine beliebige Untergruppe verallgemeinern. Z. B. überträgt sich Satz (9) folgendermaßen:

(28) *$\mathfrak{A}$ sei eine nachinvariante und $\mathfrak{B}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$; es gebe eine endliche Kompositionskette von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Dann besitzt $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ eine endliche Kompositionsreihe, und jede Kompositionsfaktorgruppe von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ ist zu einer der Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ oder von $\mathfrak{A}$ isomorph.*

Beweis. Das Erzeugnis aller zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Untergruppen von $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ werde mit $\mathfrak{A}^*$ bezeichnet. Nach (7) ist $\mathfrak{A}^* \lhd\lhd \mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}^*$ besitzt also eine endliche Kompositionsreihe, und nach (9) sind die Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{A}^*$ dieselben wie die von $\mathfrak{A}$, abgesehen von der Vielfachheit. Da $\mathfrak{A}^* \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ ist, ist

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}/\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}/\mathfrak{A}^* \backsim \mathfrak{B}/(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}).$$

Da $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) < (\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B})$ ist, gibt es nach Voraussetzung eine endliche Kompositionskette von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B})$, und ihre Kompositionsfaktorgruppen sind ein Teil derjenigen von $\mathfrak{B}$ bis $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Es ist bemerkenswert, daß sich auch der Satz (7) von der Nachinvarianz des Erzeugnisses zweier nachinvarianter Untergruppen auf den Fall einer nachinvarianten und einer beliebigen Untergruppe verallgemeinern läßt:

(29) *$\mathfrak{A}$ sei eine nachinvariante und $\mathfrak{B}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$; ihr Erzeugnis sei $\mathfrak{R}$. Dann sind die Kompositionsfaktorgruppen von $\overline{\mathfrak{R}}$ bis $\underline{\mathfrak{R}}$ ein Teil derjenigen von $\overline{\mathfrak{B}}$ bis $\underline{\mathfrak{B}}$; insbesondere ist $j(\overline{\mathfrak{R}}, \underline{\mathfrak{R}}) \leqq j(\overline{\mathfrak{B}}, \underline{\mathfrak{B}})$.*

Hierin ist Satz (7) als der Spezialfall $j(\overline{\mathfrak{B}}, \underline{\mathfrak{B}}) = 0$ enthalten.

Beweis. $\underline{\mathfrak{R}}$ ist invariant gegenüber $\mathfrak{B}$, denn es ist $\underline{\mathfrak{R}} \lhd \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B} < \mathfrak{R}$. Insbesondere ist $\underline{\mathfrak{R}}$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Nach einem Hilfssatz (30), dessen Beweis wir unten nachtragen, ist dann $\underline{\mathfrak{R}}$ auch mit $\overline{\mathfrak{B}}$ vertauschbar. Daher sind

[9]) Vgl. z. B. Speiser, Satz 68, 69.

die Kompositionsfaktorgruppen von $\underline{\mathfrak{K}}\,\overline{\mathfrak{B}}$ bis $\underline{\mathfrak{K}}$ nach (8) dieselben wie die von $\overline{\mathfrak{B}}$ bis $(\underline{\mathfrak{K}}, \overline{\mathfrak{B}})$. Diese letzteren sind ein Teil derjenigen von $\overline{\mathfrak{B}}$ bis $\underline{\mathfrak{B}}$; denn es ist $\underline{\mathfrak{B}} < (\underline{\mathfrak{K}}, \overline{\mathfrak{B}})$. Ferner wird unter Benutzung von (26)

$$\overline{\mathfrak{K}} = \overline{\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}} = \{\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}}\} < \underline{\mathfrak{K}}\,\overline{\mathfrak{B}} < \overline{\mathfrak{K}}\,\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{K}},$$

also $\overline{\mathfrak{K}} = \underline{\mathfrak{K}}\,\overline{\mathfrak{B}}$. Damit ist der Beweis erbracht, abgesehen von dem noch ausstehenden Beweis des folgenden Hilfssatzes:

(30) *$\mathfrak{A}$ sei eine nachinvariante und $\mathfrak{B}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, so ist auch $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$.*

Der Beweis erfolgt durch einen doppelten Induktionsschluß. Erstens setzen wir voraus, daß der Satz in jeder Gruppe $\mathfrak{G}'$ schon gilt, für die $j(\mathfrak{G}', E) < j(\mathfrak{G}, E)$ ist; im Fall $j(\mathfrak{G}, E) = 0$ ist er trivial richtig. Zweitens setzen wir voraus, daß der Satz in $\mathfrak{G}$ schon gilt für $\mathfrak{A}$ und jedes $\mathfrak{B}^*$, für das $j(\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{B}^*}) < j(\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{B}})$ ist; im Fall $j(\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{B}}) = 0$ ist $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{B}}$ und der Satz trivial richtig. Im folgenden sei $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) > 0$. Dann gibt es einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$, der $\overline{\mathfrak{B}}$ enthält. Seine Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$.

Wir brauchen nur den Fall weiter zu untersuchen, daß $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{M}$ ist. Denn ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{M}$, so ist wegen $j(\mathfrak{M}, E) = j(\mathfrak{G}, E) - 1$ nach der ersten Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$, wie behauptet. — Im folgenden ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$ vorausgesetzt. Es ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \backsim \mathfrak{F}$.

Es ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$. Denn nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, daher gibt es zu je zwei Elementen A_1, V_1 zwei Elemente A_2, V_2 ($A_i \subset \mathfrak{A}$, $V_i \subset \mathfrak{B}$), so daß $A_1 V_1 = V_2 A_2$. Wählt man A_1 aus $\mathfrak{A}'$, so liegen A_1, V_1, V_2 in $\mathfrak{M}$, daher auch A_2; also ist $A_2 \subset \mathfrak{A}'$, d. h. es ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$. Ebenso ergibt sich $\mathfrak{B}\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}'\mathfrak{B}$.

Es ist $\mathfrak{A}'\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}'$. Denn die beiden Untergruppen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes, und es ist $j(\mathfrak{M}, E) = j(\mathfrak{G}, E) - 1$. Nach der ersten Induktionsvoraussetzung ist $\mathfrak{A}'\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}'$.

Wir können uns auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{A}' \prec \overline{\mathfrak{B}}$ ist. Denn der Fall $\mathfrak{A}' \not< \overline{\mathfrak{B}}$ läßt sich mit Hilfe der zweiten Induktionsvoraussetzung folgendermaßen erledigen: Wir setzen $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}$; es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}.$$

Ferner ist

$$j(\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{B}^*}) = j(\mathfrak{G}, \overline{\{\mathfrak{A}', \mathfrak{B}\}}) = j(\mathfrak{G}, \{\mathfrak{A}', \overline{\mathfrak{B}}\}) < j(\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{B}}).$$

Also ist $\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{B}^*} = \overline{\mathfrak{B}^*}\mathfrak{A}$. Nun ist aber

$$\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{B}^*} = \mathfrak{A}\,\{\mathfrak{A}', \overline{\mathfrak{B}}\} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\,\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{B}},$$

und ebenso ergibt sich $\overline{\mathfrak{B}^*}\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$. Also gilt $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$, wie behauptet. — Im folgenden sei $\mathfrak{A}' < \overline{\mathfrak{B}}$, d. h. $(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{A}'$.

Wir brauchen nur den Fall weiter zu behandeln, daß $\{\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}}\} = \mathfrak{G}$ *ist.* Andernfalls ist nämlich $\{\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}}\}$ eine echte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthält, also ist nach der ersten Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$.

Alle Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ *bis* $\overline{\mathfrak{B}}$ *sind zu* $\mathfrak{F}$ *isomorph.* Das folgt aus (9), wenn man beachtet, daß $\{\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}}\} = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}}) \backsim \mathfrak{F}$ ist. — Für den Durchschnitt $\mathfrak{D} = (\ldots, G^{-1}\overline{\mathfrak{B}}G, \ldots)$ aller zu $\overline{\mathfrak{B}}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind nach (6) sämtliche Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{D}$ zu $\mathfrak{F}$ isomorph. Es ist $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D} < \overline{\mathfrak{B}}$.

Nur der Fall muß weiter verfolgt werden, daß $\mathfrak{D} = E$ *ist.* Denn andernfalls ist $j(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}, E) < j(\mathfrak{G}, E)$, und wir können den Satz für die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ schon benutzen. $\mathfrak{A}\mathfrak{D}/\mathfrak{D}$ ist eine nachinvariante und mit $\mathfrak{B}\mathfrak{D}/\mathfrak{D}$ vertauschbare Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. Also ist $\mathfrak{A}\mathfrak{D}/\mathfrak{D}$ auch mit $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{D}/\mathfrak{D}} = \overline{\mathfrak{B}}/\mathfrak{D}$ vertauschbar. Es wird, wie behauptet,

$$\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}.$$

Der Fall $\mathfrak{D} = E$ *läßt sich direkt erledigen.* Ist $\mathfrak{D} = E$, so sind alle Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{F}$ isomorph. Falls $\mathfrak{F}$ abelsch, also von Primzahlordnung p ist, ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ eine Potenz von p. Nach (16) ist jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ nachinvariant. Daher ist $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$, und unsere Behauptung $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$ fällt mit der Voraussetzung $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ zusammen. Falls aber $\mathfrak{F}$ nicht abelsch ist, ist jede nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ perfekt. Nach (23) sind je zwei nachinvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$ miteinander vertauschbar. Insbesondere ist $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$. Damit ist der Beweis von (30) und (29) beendet.

Hilfssatz (30) läßt eine merkwürdige Verallgemeinerung zu, die von zwei beliebigen Untergruppen handelt:

(31) *Sind* $\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{V}$ *zwei vertauschbare Untergruppen von* $\mathfrak{G}$, *so sind auch* $\overline{\mathfrak{U}}$ *und* $\overline{\mathfrak{V}}$ *vertauschbar.*

(Dagegen sind $\underline{\mathfrak{U}}$ und $\underline{\mathfrak{V}}$ nicht immer vertauschbar.)

Wir erbringen den Beweis durch einen Induktionsschluß in bezug auf $j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}})$. Für $j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}}) = 0$ ist die Behauptung trivial richtig, ebenfalls für $j(\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{U}}) = 0$. Im folgenden sei $j(\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{U}}) > 0$. Dann gibt es einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$, welcher $\overline{\mathfrak{U}}$ enthält. Falls $\mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{V}$ enthält, folgt die Behauptung des Satzes aus der Induktionsvoraussetzung; denn es ist $j(\mathfrak{M}, \underline{\mathfrak{U}}) = j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}}) - 1$. Im folgenden sei $\mathfrak{V} \not< \mathfrak{M}$. Wir setzen $(\mathfrak{V}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{V}'$; es ist $\mathfrak{V}' \lhd \mathfrak{V}$.

Wir brauchen nur den Fall weiter zu untersuchen, daß die einfache Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ *abelsch, also von Primzahlordnung* p *ist.* Denn falls $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nicht abelsch ist, erschließen wir die Behauptung unseres Satzes folgendermaßen aus der Induktionsvoraussetzung: Es ist $\overline{\mathfrak{V}} \not< \mathfrak{M}$. Bedeutet $\mathfrak{A}$ eine minimale unter den

achinvarianten Untergruppen von $\overline{\mathfrak{B}}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ liegen, so erkennt man enau wie beim Beweis von Satz (21), Punkt b), daß $\mathfrak{A}$ einköpfig und perfekt t. $\mathfrak{A}$ ist nach Satz (21) die einzige nicht in $\mathfrak{M}$ enthaltene einköpfige perfekte achinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und daher ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir ehen zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ über. Für die beiden vertauschbaren Unter- ruppen $\mathfrak{U}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ gilt Satz (30) bereits nach Induktionsvoraussetzung; enn es ist $j(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}, \underline{\mathfrak{U}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}}) = j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}\mathfrak{A}})$, nach (26) ist dies $\leqq j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}}\mathfrak{A})$, und ies ist $< j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}})$, weil $\mathfrak{A}$ nicht in $\underline{\mathfrak{U}}$ liegt (es ist sogar $\mathfrak{A} \nmid \mathfrak{M}$). Also ist $\overline{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}}$ vertauschbar, d. h. es ist $\overline{\mathfrak{U}\mathfrak{A}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$ vertauschbar; daher ilt wegen $\mathfrak{A} < \overline{\mathfrak{B}}$:

$$\overline{\mathfrak{U}}\,\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{U}}\,\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{U}\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{U}\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{U}} = \overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{U}}.$$

)amit ist der Fall eines nichtabelschen $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ erledigt. Im folgenden ist der ndex von $\mathfrak{M}$ unter $\mathfrak{G}$ eine Primzahl p.

Der Index von $\mathfrak{B}'$ unter $\mathfrak{B}$ ist ebenfalls p. Denn es ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}' \backsim \mathfrak{B}\mathfrak{M}/\mathfrak{M}$; erner ist $\mathfrak{B}\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$, da $\mathfrak{B}\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}$ ist und zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}$ keine Gruppe egt.

$\overline{\mathfrak{U}}$ und $\overline{\mathfrak{B}'}$ sind vertauschbar. Das folgt aus der Induktionsvoraussetzung: $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}'$ sind Untergruppen von $\mathfrak{M}$, aus $\mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{U}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'\mathfrak{U}$, nd es ist $j(\mathfrak{M}, \underline{\mathfrak{U}}) = j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}}) - 1$.

Wir können uns auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{B}' < \mathfrak{U}$ ist. Wenn nämlich $\mathfrak{B}' \nmid \mathfrak{U}$ ist, ersetzen wir $\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{U}^* = \{\mathfrak{U}, \overline{\mathfrak{B}'}\}$. $\mathfrak{U}^*$ ist mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar; enn $\mathfrak{U}$ und $\overline{\mathfrak{B}'}$ sind mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar, und zwar $\mathfrak{U}$ nach Voraussetzung, $\overline{\mathfrak{B}'}$ aber deswegen, weil $\mathfrak{B}'$ (und damit $\overline{\mathfrak{B}'}$) invariant gegenüber $\mathfrak{B}$ ist. Ferner ird nach (26) $j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}^*}) \leqq j(\mathfrak{G}, \{\underline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}'}\})$, und das ist $< j(\mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{U}})$, weil $\overline{\mathfrak{B}'} \nmid \mathfrak{U}$ ist. Also ist nach Induktionsvoraussetzung $\overline{\mathfrak{U}^*}$ mit $\overline{\mathfrak{B}}$ vertauschbar. Tun ist aber

$$\overline{\mathfrak{U}}\,\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{U}}\,\overline{\mathfrak{B}'}\,\overline{\mathfrak{B}} = \{\overline{\mathfrak{U}}, \overline{\mathfrak{B}'}\}\,\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\{\mathfrak{U}, \overline{\mathfrak{B}'}\}}\,\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{U}^*}\,\overline{\mathfrak{B}};$$

benso erkennt man, daß $\overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{U}} = \overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{U}^*}$ ist. Also ist $\overline{\mathfrak{U}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}}$ vertauschbar, ie unser Satz behauptet. — Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall, aß $\mathfrak{B}' < \mathfrak{U}$ ist. Es ist dann $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$, denn der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ it $\mathfrak{B}$ kann nicht größer sein als der von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{B}$, d. h. als $\mathfrak{B}'$.

Der Index von $\mathfrak{U}$ in $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$ ist p. Denn zunächst ist wegen der Vertausch- arkeit von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ das Erzeugnis $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\} = \mathfrak{U}\mathfrak{B}$. Dann und nur dann ist $U_1 V_1)(U_2 V_2)^{-1} \subset \mathfrak{U}$, wenn $V_1 V_2^{-1} \subset \mathfrak{U}$, also $\subset (\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$ ist. Daher t der Index von $\mathfrak{U}$ unter $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$ gleich dem Index von $\mathfrak{B}'$ unter $\mathfrak{B}$, d. h. leich p.

$\mathfrak{U}$ ist ein Normalteiler von $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$. Da $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$, ist der Durchschnitt $\mathfrak{M}, \{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\})$ ein Normalteiler von $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$; er enthält zwar $\mathfrak{U}$, aber nicht $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$; er muß gleich $\mathfrak{U}$ sein, da zwischen $\mathfrak{U}$ und $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$ keine Gruppe liegt.

$\overline{\mathfrak{U}}$ *und* $\overline{\mathfrak{B}}$ *sind vertauschbar.* Da $\mathfrak{U} \lhd \{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$ ist, ist $\mathfrak{U}$ gegenüber $\mathfrak{B}$ invariant. Daher ist auch $\overline{\mathfrak{U}}$ gegenüber $\mathfrak{B}$ invariant und insbesondere mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Nach dem Hilfssatz (30) ist $\overline{\mathfrak{U}}$ auch mit $\overline{\mathfrak{B}}$ vertauschbar. Damit ist der Beweis von Satz (31) beendet.

VII.

Von nun an beschränken wir uns auf Gruppen endlicher Ordnung. Für den Index einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ benutzen wir das Zeichen $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, so daß $i(\mathfrak{G}, E)$ die Ordnung von $\mathfrak{G}$ bedeutet.

Wir knüpfen an die in Abschnitt V zunächst ganz unpräzis angedeutete Bemerkung an, daß eine „kleine" perfekte nachinvariante Untergruppe einer „großen" Gruppe „nahezu invariant" ist. Wir zeigen zuerst, daß man dieser Behauptung einen genauen Sinn beilegen kann. Dann untersuchen wir, ob man Ähnliches für beliebige nachinvariante Untergruppen aussagen kann. Zum Schluß des Abschnitts wenden wir die erhaltenen Ergebnisse auf das Problem der nachinvarianten Einbettung einer vorgegebenen Gruppe an.

Wir beginnen mit dem Satz:

(32) *$\mathfrak{A}$ sei eine einköpfige perfekte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ sei ihr Normalisator. Dann gilt für die Ordnung von $\mathfrak{N}$ die Abschätzung*

$$i(\mathfrak{N}, E) \geqq \frac{g}{\gamma_{60}}$$

$(g = i(\mathfrak{G}, E), \quad \gamma_{60} = \underset{60}{\log} g).$

Dabei wird unter dem Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{A}$, wie üblich, die Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}$ verstanden, die mit $\mathfrak{A}$ als Ganzem vertauschbar sind. Hervorzuheben ist, daß die angegebene Schranke von $\mathfrak{A}$ gar nicht abhängt.

Beweis von (32). $\mathfrak{G}$ enthält $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})$ voneinander verschiedene zu $\mathfrak{A}$ ähnliche Untergruppen. Nach (21) besitzt $\mathfrak{G}$ mindestens $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})$ nichtabelsche Kompositionsfaktorgruppen. Da die Ordnung einer nichtabelschen einfachen Gruppe $\geqq 60$ ist, ergibt sich $g \geqq 60^{i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})}$, also $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}) \leqq \gamma_{60}$. Damit ist (32) bewiesen, denn es ist $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})\, i(\mathfrak{N}, E) = g$. — Wir lassen jetzt die Voraussetzung der Einköpfigkeit fallen:

(33) *$\mathfrak{A}$ sei eine perfekte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ sei ihr Normalisator. Ist $\mathfrak{G} \neq E$, so gilt für die Ordnung von $\mathfrak{N}$ die Abschätzung*

$$i(\mathfrak{N}, E) \geqq \frac{g}{\gamma_{60}^{\alpha_{60}}}$$

$(g = i(\mathfrak{G}, E), \quad \gamma_{60} = \underset{60}{\log} g, \quad \alpha_{60} = \underset{60}{\log}\, i(\mathfrak{A}, E)).$

Beweis. Ist $\mathfrak{A} = E$, so ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ und $\alpha_{60} = 0$, also die Behauptung richtig. Ist $\mathfrak{A} \neq E$, so ist $\mathfrak{A}$ nach Satz (22) das Erzeugnis der in $\mathfrak{A}$ enthaltenen einköpfigen perfekten nachinvarianten Untergruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$. Wir bezeichnen den Normalisator von $\mathfrak{A}_\lambda$ in $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}_\lambda$. Nach (32) ist $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_\lambda) \leqq \gamma_{60}$. Nun gilt für je zwei Untergruppen $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Durchschnitt $\mathfrak{D}$:

$$i(\mathfrak{G}, \mathfrak{D}) \leqq i(\mathfrak{G}, \mathfrak{U})\, i(\mathfrak{G}, \mathfrak{V}).$$

Daher gilt für den Index des Durchschnitts $\mathfrak{N}^* = (\ldots, \mathfrak{N}_\lambda, \ldots)$ die Abschätzung $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}^*) \leqq \gamma_{60}^l$. Offensichtlich ist $\mathfrak{N}^* < \mathfrak{N}$, daher ist auch $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}) \leqq \gamma_{60}^l$. Ferner ist nach (21) $i(\mathfrak{A}, E) \geqq 60^l$, d. h. $l \leqq \alpha_{60}$. Damit ist (33) bewiesen.

Die in Satz (33) angegebene Schranke für $i(\mathfrak{N}, E)$ strebt, bei festgehaltenem $\mathfrak{A}$, mit wachsendem g gegen ∞, sogar fast so stark wie g selbst. Das zeigt, daß bei der nachinvarianten Einbettung einer festen perfekten Gruppe $\mathfrak{A}$ in eine hinreichend große Gruppe $\mathfrak{G}$ der Normalisator von $\mathfrak{A}$ beliebig groß wird. Es ist hervorzuheben, daß die Voraussetzung der Perfektheit wesentlich ist. Es gibt Gruppen $\mathfrak{G}$ beliebig hoher Primzahlpotenzordnung p^n mit einer nachinvarianten Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung p, in denen der Normalisator von $\mathfrak{A}$ die (kleinste mögliche) Ordnung p^2 hat. Wir geben folgendes Beispiel:

Die abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Typus $(p^k, p^k, \ldots, p^k)$ $(k > 0)$ mit $p - 1$ Erzeugenden besitzt, wie unten gezeigt wird, einen Automorphismus σ der Ordnung p, der genau p Elemente von $\mathfrak{H}$ ungeändert läßt. Wählt man für $\mathfrak{G}$ die Erweiterung von $\mathfrak{H}$ mit σ, die zum Faktorsystem 1 gehört, und für $\mathfrak{A}$ die von σ erzeugte Gruppe der Ordnung p, so hat zunächst einmal der Zentralisator von $\mathfrak{A}$, d. h. die Gruppe der mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{G}$, die Ordnung p^2. Andererseits stimmen aber in einer Gruppe der Ordnung p^n bekanntlich Normalisator und Zentralisator einer Untergruppe der Ordnung p überein. Daher hat der Normalisator von $\mathfrak{A}$ die Ordnung p^2.

Einen Automorphismus σ von $\mathfrak{H}$, der die Ordnung p hat und nur p Elemente fest läßt, erhält man folgendermaßen: Man stellt die Elemente von $\mathfrak{H}$ durch eine feste Basis von $\mathfrak{H}$ dar und übt auf die Exponenten die lineare Substitution aus, deren Matrix gleich $E + M$ ist, wobei E die Einheitsmatrix des Grades $p - 1$ bedeutet und

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\binom{p}{1} & -\binom{p}{2} & -\binom{p}{3} & \ldots & -\binom{p}{p-1} \end{pmatrix}$$

gesetzt ist. σ^p ist der identische Automorphismus von $\mathfrak{H}$, weil M seiner Cayleyschen Gleichung[10])

$$M^{p-1} + \binom{p}{p-1} M^{p-2} + \ldots + \binom{p}{2} M + \binom{p}{1} E = 0$$

und damit der Gleichung

$$(E + M)^p = E$$

genügt. Ferner muß die Spalte $\mathfrak{x}$ der Exponenten eines Elementes von $\mathfrak{H}$, das von σ nicht geändert werden soll, der Bedingung $M\mathfrak{x} \equiv 0 \pmod{p^k}$ genügen. Für die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ von $\mathfrak{x}$ gilt daher

$$-\binom{p}{1} x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_{p-1} \equiv 0 \pmod{p^k}.$$

Die Anzahl der mod p^k verschiedenen Lösungen dieses Kongruenzsystems ist p. Daher läßt σ genau p Elemente von $\mathfrak{H}$ fest.

Wie dieses Beispiel zeigt, kann der Normalisator einer nachinvarianten Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ beschränkte Ordnung haben, auch wenn die Ordnung von $\mathfrak{G}$ beliebig groß wird. Diesen Fall untersuchen wir jetzt genauer; es wird sich herausstellen, daß $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler enthalten muß, dessen Ordnung eine große Primzahlpotenz ist. Wir gehen schrittweise vor, indem wir zuerst den Fall erledigen, daß die Ordnung von $\mathfrak{A}$ eine Primzahlpotenz ist, dann den Fall eines auflösbaren und schließlich den eines beliebigen $\mathfrak{A}$.

(34) *Es sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und $i(\mathfrak{A}, E) = p^r$ (p Primzahl, $r > 0$). Bezeichnet $\mathfrak{N}$ den Normalisator von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ das Erzeugnis der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so gilt*

$$i(\mathfrak{K}, E) = p^k > [i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{r}}.$$

Beweis. Daß die Ordnung von $\mathfrak{K}$ eine Potenz von p ist, folgt aus Satz (10). Wir unterscheiden die Fälle $r = 1$ und $r > 1$.

a) Es sei $r = 1$. Dann ist $\mathfrak{A}$ zyklisch. A^* sei ein erzeugendes Element von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}^*$ sein Normalisator in $\mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{N}^* < \mathfrak{N}$, daher $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}^*) \geqq i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})$. In $\mathfrak{G}$ gibt es genau $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}^*)$ zu A^* ähnliche Elemente; sie liegen sämtlich in $\mathfrak{K}$. Dazu kommt mindestens noch E; daher ist, wie behauptet, $i(\mathfrak{K}, E) > i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})$.

b) Es sei $r > 1$. Dann betrachten wir eine Hauptreihe[11]) von $\mathfrak{A}$:

$$E = \mathfrak{A}_0 \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \ldots \lhd \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}.$$

Es ist $\mathfrak{A}_\varrho \lhd \mathfrak{A}$ und $i(\mathfrak{A}_{\varrho+1}, \mathfrak{A}_\varrho) = p$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}_0$ die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$, mit $\mathfrak{N}_1$ den Normalisator von $\mathfrak{A}_1$ in $\mathfrak{N}_0$, mit $\mathfrak{N}_2$ den Normalisator

[10]) Vgl. z. B. Schreier und Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra II (Leipzig und Berlin 1935), S. 123.

[11]) Vgl. z. B. Speiser, Satz 81.

von $\mathfrak{A}_2$ in $\mathfrak{N}_1$ (wobei zu beachten ist, daß $\mathfrak{A}_2 < \mathfrak{N}_1$ ist), usw.; schließlich bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_r$ den Normalisator von $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{N}_{r-1}$. Es ist $\mathfrak{N}_r < \mathfrak{N}$, daher $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_r) \geqq i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})$. Da

$$\prod_{\varrho=0}^{r-1} i(\mathfrak{N}_\varrho, \mathfrak{N}_{\varrho+1}) = i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_r)$$

ist, muß für mindestens ein ϱ einmal

$$i(\mathfrak{N}_\varrho, \mathfrak{N}_{\varrho+1}) \geqq [i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{r}}$$

sein. Für dieses ϱ betrachten wir die Faktorgruppe $\mathfrak{N}_\varrho/\mathfrak{A}_\varrho$. Sie enthält eine nachinvariante Untergruppe der Ordnung p, nämlich $\mathfrak{A}_{\varrho+1}/\mathfrak{A}_\varrho$. Der Index des Normalisators $\mathfrak{N}_{\varrho+1}/\mathfrak{A}_\varrho$ von $\mathfrak{A}_{\varrho+1}/\mathfrak{A}_\varrho$ in $\mathfrak{N}_\varrho/\mathfrak{A}_\varrho$ ist $i(\mathfrak{N}_\varrho, \mathfrak{N}_{\varrho+1})$. Das Erzeugnis aller zu $\mathfrak{A}_{\varrho+1}/\mathfrak{A}_\varrho$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{N}_\varrho/\mathfrak{A}_\varrho$ hat nach a) eine Ordnung $> i(\mathfrak{N}_\varrho, \mathfrak{N}_{\varrho+1})$. Erst recht hat das Erzeugnis aller zu $\mathfrak{A}_{\varrho+1}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{N}_\varrho$ eine Ordnung $> i(\mathfrak{N}_\varrho, \mathfrak{N}_{\varrho+1})$. Da dieses Erzeugnis in $\mathfrak{R}$ liegt, ist, wie behauptet,

$$i(\mathfrak{R}, E) > i(\mathfrak{N}_\varrho, \mathfrak{N}_{\varrho+1}) \geqq [i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{r}}.$$

Ähnlich, aber schwieriger, verläuft die Behandlung des allgemeineren Falles, daß $\mathfrak{A}$ auflösbar ist. Wir schicken drei Hilfssätze voraus:

(35) *Die Anzahl der Automorphismen einer endlichen Gruppe $\mathfrak{A}$ ist $\leqq a^{\alpha_2}$* $\quad (a = i(\mathfrak{A}, E),\ \alpha_2 = \log_2 a)$.

Beweis. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sei ein System unabhängiger erzeugender Elemente von $\mathfrak{A}$. Zwei Automorphismen von $\mathfrak{A}$ stimmen überein, wenn sie für jedes μ dem Element A_μ beide dasselbe Bild zuordnen. Daher ist die Anzahl der Automorphismen von $\mathfrak{A}$ höchstens a^m. Ferner ist $m \leqq \alpha_2$. Denn da $\mathfrak{K}_\mu = \{A_1, \ldots, A_\mu\}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{K}_{\mu+1}$ ist, ist $i(\mathfrak{K}_{\mu+1}, \mathfrak{K}_\mu) \geqq 2$, daher

$$a = i(\mathfrak{K}_m, E) = \prod_{\mu=0}^{m-1} i(\mathfrak{K}_{\mu+1}, \mathfrak{K}_\mu) \geqq 2^m.$$

(36) *$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien beliebige Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Es sei $\mathfrak{A} \lhd \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$. Dann gilt für die Ordnung des Zentralisators $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ die Abschätzung*

$$i(\mathfrak{Z}, E) \geqq \frac{i(\mathfrak{B}, E)}{a^{\alpha_2}}$$

$(a = i(\mathfrak{A}, E),\ \alpha_2 = \log_2 a)$.

Unter dem Zentralisator $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ wird, wie schon erwähnt, die Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{B}$ verstanden, die mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind; es ist $\mathfrak{Z} \lhd \mathfrak{B}$. Der Beweis von (36) ergibt sich unmittelbar aus (35), wenn man jedem Element B von $\mathfrak{B}$ den Automorphismus $A \to B^{-1}AB$ von $\mathfrak{A}$ zuordnet.

(37) *$\mathfrak{A}$ sei ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, sein Index $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ sei eine Potenz der Primzahl p. Die Ordnung von $\mathfrak{G}$ sei durch p^l teilbar ($l \geqq 0$). Dann enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{P}$ der Ordnung*

$$i(\mathfrak{P}, E) = p^m \geqq \frac{p^l}{a^{\alpha_2}}$$

($m \geqq 0$, $a = i(\mathfrak{A}, E)$, $\alpha_2 = \log_2 a$), der mit $\mathfrak{A}$ elementweise vertauschbar ist.

Beweis: $\mathfrak{P}^*$ sei eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}$ ist gegenüber $\mathfrak{P}^*$ invariant. $\mathfrak{P}$ sei der Zentralisator von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{P}^*$; es ist $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{P}^*$; $\mathfrak{P}$ ist invariant gegenüber $\mathfrak{A}$ (sogar elementweise). Daher ist $\mathfrak{P}$ gegenüber dem Erzeugnis $\mathfrak{G}' = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{P}^*\}$ invariant. Dieses Erzeugnis ist aber $\mathfrak{G}$. Denn weil $\mathfrak{G}'$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ enthält, ist $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ zu p teilerfremd; weil $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}'$ ist, ist $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ eine Potenz von p; daher ist $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}') = 1$. Es ist also, wie unser Satz behauptet, $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{G}$. Ferner ist wegen $\mathfrak{P} < \mathfrak{P}^*$ die Ordnung $i(\mathfrak{P}, E)$ von $\mathfrak{P}$ eine Potenz von p. Sie genügt, weil $i(\mathfrak{P}^*, E) \geqq p^l$ ist, nach (36) der behaupteten Abschätzung.

Jetzt untersuchen wir die nachinvariante Einbettung einer auflösbaren Gruppe:

(38) *Es sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ auflösbar und $\mathfrak{A} \neq E$. Es bezeichne $\mathfrak{N}$ den Normalisator von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ das Erzeugnis der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Dann enthält $\mathfrak{K}$ eine nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung*

$$i(\mathfrak{P}, E) = p^l > \frac{[i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}{a^{\alpha_2}}$$

(p Primzahl, $l \geqq 0$, $a = i(\mathfrak{A}, E)$, $\alpha_2 = \log_2 a$).

Zum Beweis betrachten wir eine Hauptreihe von $\mathfrak{A}$:

$$E = \mathfrak{A}_0 \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \ldots \lhd \mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}.$$

Es ist $\mathfrak{A}_\sigma \lhd \mathfrak{A}$, und $i(\mathfrak{A}_{\sigma+1}, \mathfrak{A}_\sigma) = p_\sigma^{r_\sigma}$ ist eine Primzahlpotenz ($r_\sigma > 0$)[12]). Wir setzen $\sum_{\sigma=0}^{s-1} r_\sigma = r$. Da r gleich der Anzahl der Primfaktoren von a ist, ist $r \leqq \alpha_2$.

Wir setzen wieder $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{G}$ und erklären der Reihe nach $\mathfrak{N}_{\sigma+1}$ als den Normalisator von $\mathfrak{A}_{\sigma+1}$ in $\mathfrak{N}_\sigma$ ($\sigma = 0, 1, \ldots, s-1$). Es ist $\mathfrak{N}_s < \mathfrak{N}$, daher $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_s) \geqq i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})$. Da

$$\prod_{\sigma=0}^{s-1} i(\mathfrak{N}_\sigma, \mathfrak{N}_{\sigma+1}) = i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_s)$$

ist, ist für mindestens ein σ einmal

$$i(\mathfrak{N}_\sigma, \mathfrak{N}_{\sigma+1}) \geqq [i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{r_\sigma}{r}}.$$

[12]) Vgl. z. B. Speiser, Satz 33.

Für dieses σ betrachten wir die Faktorgruppe $\mathfrak{N}_\sigma/\mathfrak{A}_\sigma$. Sie enthält die nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{A}_{\sigma+1}/\mathfrak{A}_\sigma$ der Ordnung $p_\sigma^{r_\sigma}$. Der Normalisator $\mathfrak{N}_{\sigma+1}/\mathfrak{A}_\sigma$ von $\mathfrak{A}_{\sigma+1}/\mathfrak{A}_\sigma$ in $\mathfrak{N}_\sigma/\mathfrak{A}_\sigma$ hat den Index $i(\mathfrak{N}_\sigma, \mathfrak{N}_{\sigma+1})$. Daher hat nach (34) das Erzeugnis $\mathfrak{K}_\sigma/\mathfrak{A}_\sigma$ der zu $\mathfrak{A}_{\sigma+1}/\mathfrak{A}_\sigma$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{N}_\sigma/\mathfrak{A}_\sigma$ eine Ordnung

$$i(\mathfrak{K}_\sigma, \mathfrak{A}_\sigma) = p_\sigma^{k_\sigma} > [i(\mathfrak{N}_\sigma, \mathfrak{N}_{\sigma+1})]^{\frac{1}{r_\sigma}} \geqq [i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{r}} \geqq [i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Wenden wir auf $\mathfrak{K}_\sigma$ und seinen Normalteiler $\mathfrak{A}_\sigma$ Hilfssatz (37) an, so ergibt sich: $\mathfrak{K}_\sigma$ enthält einen Normalteiler $\mathfrak{P}$ der Ordnung

$$i(\mathfrak{P}, E) = p_\sigma^l \geqq \frac{p_\sigma^{k_\sigma}}{\bar{a}^{\bar{\alpha}_2}} \qquad (\bar{a} = i(\mathfrak{A}_\sigma, E),\ \bar{\alpha}_2 = \log_2 \bar{a}).$$

Nun ist $\bar{a}^{\bar{\alpha}_2} \leqq a^{\alpha_2}$; zieht man noch die oben bewiesene Abschätzung für $p_\sigma^{k_\sigma}$ heran, so erhält man die gewünschte Ungleichung

$$p_\sigma^l > \frac{[i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}{a^{\alpha_2}}.$$

Um den Beweis des Satzes zu vollenden, haben wir nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P} \lhd\lhd \mathfrak{K}$ ist. Es ist $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{K}_\sigma$; weiter ist $\mathfrak{K}_\sigma \lhd\lhd \mathfrak{G}$, da $\mathfrak{K}_\sigma$ das Erzeugnis gewisser zu $\mathfrak{A}_\sigma$ ähnlicher Untergruppen ist und $\mathfrak{A}_\sigma \lhd\lhd \mathfrak{G}$ ist; schließlich ist $\mathfrak{K}_\sigma < \mathfrak{K}$, da $\mathfrak{K}$ sogar das Erzeugnis aller zu $\mathfrak{A}_\sigma$ ähnlichen Untergruppen enthält.

Jetzt behandeln wir den allgemeinen Fall:

(39) *Es sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A} \neq E$. Es bezeichne $\mathfrak{N}$ den Normalisator von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ das Erzeugnis der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Dann enthält $\mathfrak{K}$ eine nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung*

$$i(\mathfrak{P}, E) = p^m > \frac{[i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\gamma_{60}^c\, a^{2\alpha_2}}$$

(p Primzahl, $m \geqq 0$; $\gamma_{60} = \log_{60} i(\mathfrak{G}, E)$, $a = i(\mathfrak{A}, E)$, $\alpha_2 = \log_2 a$, $c = \log_{60} 2$). $\mathfrak{P}$ kann so gewählt werden, daß der kleinste Normalteiler $\mathfrak{A}^{(p)}$ von $\mathfrak{A}$, dessen Index $i(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(p)}) = p^n$ ($n \geqq 0$) eine Potenz von p ist, mit $\mathfrak{P}$ elementweise vertauschbar ist.

Beweis. Wir betrachten den kleinsten Normalteiler $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ auflösbar ist. $\mathfrak{A}'$ ist eine perfekte nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wir haben die Fälle $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$ zu unterscheiden.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, so setzen wir $\mathfrak{P} = E$. Nach (33) ist $i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}) \leqq \gamma_{60}^{\alpha_{60}}$, daher ist, wie unser Satz es behauptet,

$$i(\mathfrak{P}, E) = 1 > \frac{\gamma_{60}^c}{\gamma_{60}^c\, a^{2\alpha_2}} \geqq \frac{[i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\gamma_{60}^c\, a^{2\alpha_2}}.$$

Nun sei $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$. Bezeichnet $\mathfrak{G}'$ den Normalisator von $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{G}$, so ist nach (33), wenn $\alpha'_{60} = \log_{60} i(\mathfrak{A}', E)$ gesetzt wird,

$$i(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}') \leqq \gamma_{60}^{\alpha'_{60}} \leqq \gamma_{60}^{\alpha_{60}}.$$

Wir betrachten die Faktorgruppe $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}'$. Sie enthält die auflösbare nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$. Da $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$ ist, können wir Satz (38) anwenden: Der Normalisator von $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}'$ ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{A}'$; bezeichnet $\mathfrak{K}'$ das Erzeugnis der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}'$, so enthält $\mathfrak{K}'$ eine nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{P}'$, die ihrerseits $\mathfrak{A}'$ enthält und für die

$$i(\mathfrak{P}', \mathfrak{A}') = p^l > \frac{[i(\mathfrak{G}', \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha''_2}}}{a''^{\alpha''_2}}$$

ist ($a'' = i(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$, $\alpha''_2 = \log_2 a''$). Nun ist $a'' \leqq a$, $\alpha''_2 \leqq \alpha_2$. Ferner ist

$$i(\mathfrak{G}', \mathfrak{N}) = \frac{i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})}{i(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')} \geqq \frac{i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})}{\gamma_{60}^{\alpha_{60}}}.$$

Daher ist

$$p^l > \frac{[i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\gamma_{60}^{c} a^{\alpha_2}}.$$

Nun bezeichne $\mathfrak{A}^{(p)}$ die kleinste nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{A}$, deren Index $i(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(p)})$ eine Potenz von p ist; nach (6) ist $\mathfrak{A}^{(p)} \lhd \mathfrak{A}$. Wir setzen $\{\mathfrak{A}^{(p)}, \mathfrak{P}'\} = \mathfrak{H}$ und behaupten:

$i(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}^{(p)})$ ist eine Potenz von p. Es ist $\mathfrak{A}^{(p)} \lhd \mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}' \lhd\lhd \mathfrak{K}' \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Nach (9) tritt jeder der Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{H}$ bis $\mathfrak{A}^{(p)}$ unter denen von $\mathfrak{P}'$ bis zum Durchschnitt $(\mathfrak{A}^{(p)}, \mathfrak{P}')$ auf. Dieser Durchschnitt enthält $\mathfrak{A}'$. Also sind die Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{P}'$ bis $(\mathfrak{A}^{(p)}, \mathfrak{P}')$ ein Teil derjenigen von $\mathfrak{P}'$ bis $\mathfrak{A}'$, also sämtlich p. Daher sind auch die Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{H}$ bis $\mathfrak{A}^{(p)}$ sämtlich p.

Es ist $\mathfrak{A}^{(p)} \lhd \mathfrak{H}$. Das folgt unmittelbar aus Satz (25), angewandt auf $\mathfrak{A}^{(p)}$ und $\mathfrak{P}'$.

Die Ordnung von $\mathfrak{H}$ ist durch p^l teilbar. Denn es ist $\mathfrak{A}' < \mathfrak{P}' < \mathfrak{H}$ und $i(\mathfrak{P}' \mathfrak{A}') = p^l$.

Nun folgt aus Hilfssatz (37), daß $\mathfrak{H}$ einen mit $\mathfrak{A}^{(p)}$ elementweise vertauschbaren Normalteiler $\mathfrak{P}$ der Ordnung

$$i(\mathfrak{P}, E) = p^m \geqq \frac{p^l}{a^{*\alpha_2^*}}$$

nthält ($a^* = i(\mathfrak{A}^{(p)}, E)$, $\alpha_2^* = \log_2 a^*$). Benutzt man $a^* \leqq a$, $\alpha_2^* \leqq \alpha_2$ und ie oben bewiesene Abschätzung für p^l, so erhält man die gewünschte Un-leichung

$$p^m > \frac{[i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\gamma_{60}^c \, a^{2\alpha_2}}.$$

s ist

$$\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{H} \lhd\lhd \mathfrak{K}' \lhd\lhd \mathfrak{K}.$$

amit ist Satz (39) bewiesen.

Aus diesem Satz folgt, grob gesprochen, daß bei der nachinvarianten inbettung einer kleinen Gruppe $\mathfrak{A}$ in eine große Gruppe $\mathfrak{G}$ entweder der Nor-alisator von $\mathfrak{A}$ groß ist oder $\mathfrak{G}$ eine nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{P}$ von roßer Primzahlpotenzordnung p^m enthält. In dieser Formulierung darf man tatt „nachinvariante Untergruppe $\mathfrak{P}$“ ohne weiteres „Normalteiler $\mathfrak{P}^*$“ agen, indem man an Stelle von $\mathfrak{P}$ das Erzeugnis $\mathfrak{P}^*$ aller zu $\mathfrak{P}$ ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ nimmt, dessen Ordnung nach (10) eine Potenz $p^{m^*} \geqq p^m$ ist.

Mit Hilfe von Satz (39) kann man die Frage beantworten, ob sich eine orgegebene Gruppe $\mathfrak{A}$ in beliebig große Gruppen $\mathfrak{G}$ nachinvariant derart ein-etten läßt, daß der Zentralisator von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ nur aus dem Einheitselement esteht. Dazu beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

40) *$\mathfrak{A}$ sei eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. p sei eine Primzahl. $\mathfrak{A}^{(p)}$ sei der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{A}$, dessen Index $i(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{(p)}) = p^n$ eine Potenz von p ist ($n \geqq 0$). $\mathfrak{Z}$ sei der Zentralisator von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}'$ der Zentralisator von $\mathfrak{A}^{(p)}$ in $\mathfrak{G}$. Falls dann die Ordnung von $\mathfrak{Z}'$ durch p teilbar ist, ist auch die Ordnung von $\mathfrak{Z}$ durch p teilbar.*

Beweis. Wir betrachten das Erzeugnis $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}'\}$. Es ist $\mathfrak{A}^{(p)} \lhd \mathfrak{K}$ nd $\mathfrak{Z}' \lhd \mathfrak{K}$. Es bezeichne $\mathfrak{S}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}$ eine $\mathfrak{S}$ enthaltende -Sylowgruppe von $\mathfrak{K}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{P} = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Z}')$ ist eine p-Sylowgruppe on $\mathfrak{Z}'$, also ist nach Voraussetzung $\mathfrak{P} \neq E$. Ferner ist $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{Q}$, weil $\mathfrak{Z}' \lhd \mathfrak{K}$ t. Nun enthält $\mathfrak{P}$ als ein von E verschiedener Normalteiler der p-Gruppe $\mathfrak{Q}$ in Element $P_0 \neq E$, das im Zentrum von $\mathfrak{Q}$ liegt. P_0 ist insbesondere it jedem Element von $\mathfrak{S}$ vertauschbar, aber auch mit jedem Element on $\mathfrak{A}^{(p)}$, weil $P_0 \subset \mathfrak{Z}'$. Es ist $\{\mathfrak{A}^{(p)}, \mathfrak{S}\} = \mathfrak{A}$, weil der Index von $\{\mathfrak{A}^{(p)}, \mathfrak{S}\}$ n $\mathfrak{A}$ zugleich eine Potenz von p und zu p teilerfremd ist. Daher ist P_0 it jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar, d. h. $P_0 \subset \mathfrak{Z}$. Da die Ordnung on P_0 eine positive Potenz von p ist, ist die Ordnung von $\mathfrak{Z}$ durch p eilbar.

Jetzt können wir die Frage nach den Einbettungen ohne Zentralisator entscheiden:

(41) *Ist* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \neq E$, *und besteht der Zentralisator von* $\mathfrak{A}$ *nur aus dem Einheitselement, so ist die Ordnung* g *von* $\mathfrak{G}$ *durch* $\mathfrak{A}$ *allein beschränkt:*

$$g < a^{3\alpha_2^3}$$

$(a = i(\mathfrak{A}, E),\ \alpha_2 = \log_2 a)$.

Beweis. $\mathfrak{N}$ sei der Normalisator von $\mathfrak{A}$. Nach (39) enthält $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung

$$i(\mathfrak{P}, E) = p^m > \frac{[i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})]^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\gamma_{60}^c a^{2\alpha_2}} \qquad (c = \log_{60} 2),$$

welche im Zentralisator von $\mathfrak{A}^{(p)}$ liegt. Wäre $m > 0$, so wäre nach (40) die Ordnung des Zentralisators von $\mathfrak{A}$ durch p teilbar, was der Voraussetzung unseres Satzes widerspricht. Daher ist $m = 0$, und wir erhalten die Ungleichung

$$i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}) < \gamma_{60}^{\alpha_{60}} a^{2\alpha_2^3}.$$

Zu dieser Schranke für den Index von $\mathfrak{N}$ gesellt sich auf Grund von Satz (36) die folgende Schranke für die Ordnung von $\mathfrak{N}$:

$$i(\mathfrak{N}, E) \leqq a^{\alpha_2}.$$

So ergibt sich für $g = i(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})\, i(\mathfrak{N}, E)$ die Schranke

(A) $$g < \gamma_{60}^{\alpha_{60}} a^{2\alpha_2^3 + \alpha_2},$$

die allerdings noch schwach von g abhängt, nämlich von $\gamma_{60} = \log_{60} g$. Die Schranke des Satzes (41) ergibt sich so: Bei uns ist $a \geqq 6$, da sonst $\mathfrak{A}$ schon ein Zentrum haben würde; also ist $\alpha_2 > 2$. Nehmen wir nun im Gegensatz zu der Behauptung von Satz (41) an, es sei

(B) $$g \geqq a^{3\alpha_2^3},$$

so ergibt sich unter Benutzung von (A)

$$a^{3\alpha_2^3} < \gamma_{60}^{\alpha_{60}} a^{2\alpha_2^3 + \alpha_2}, \quad \text{daher} \quad \gamma_{60}^{\alpha_{60}} > a^{\alpha_2^3 - \alpha_2}.$$

Die rechte Seite ist $> a^{\alpha_2}$ (wegen $\alpha_2 > 2$), und dies ist $> a^{5\alpha_{60}}$ (wegen $60 > 2^5$). Also ist $\gamma_{60} > a^5$, $g > 60^{a^5}$.

Nun fällt die Funktion $x^{-\frac{1}{a}} \log_{60} x$ monoton für $x \geqq e^a$, und es ist $g > 60^{a^5} > e^a$. Also ist

$$g^{-\frac{1}{a}} \gamma_{60} < 60^{-a^4} a^5.$$

Die rechte Seite ist < 1 für alle $a \geqq 1$, daher ist

$$\gamma_{60} < g^{\frac{1}{a}}.$$

Daher wird nach (A)

$$g < g^{\frac{\alpha_{60}}{a}}\, a^{2\alpha_2^2+\alpha_2}.$$

Nun ist für $a \geqq 6$

$$\frac{\alpha_{60}}{a} < \frac{\log 60}{6} < \frac{1}{6}.$$

Daher wird

$$g < g^{\frac{1}{6}}\, a^{2\alpha_2^2+\alpha_2}, \qquad g < a^{\frac{6}{5}(2\alpha_2^2+\alpha_2)},$$

also nach (B) $3\,\alpha_2^2 < \frac{6}{5}(2\,\alpha_2^2 + \alpha_2)$, was der Ungleichung $\alpha_2 > 2$ widerspricht. Damit ist Satz (41) bewiesen.

VIII.

Wir wenden die Ergebnisse des vorigen Abschnitts auf den Automorphismengruppenturm einer endlichen Gruppe ohne Zentrum an. Zunächst erörtern wir die einzelnen Schritte beim Aufbau dieses Turms.

(42) *$\mathfrak{A}$ sei eine endliche Gruppe ohne Zentrum, $\mathfrak{A}_1$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathfrak{A}$. Dann läßt sich $\mathfrak{A}$ invariant und ohne Zentralisator in $\mathfrak{A}_1$ einbetten.*

Beweis. Wir bezeichnen die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{J}$. Man weiß[13]), daß $\mathfrak{J} \lhd \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A} \backsim \mathfrak{J}$ ist. Identifiziert man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, so ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}_1$. Die Behauptung über den Zentralisator ergibt sich so: Ist der Automorphismus σ von $\mathfrak{A}$ mit jedem inneren Automorphismus von $\mathfrak{A}$ vertauschbar, so ist für je zwei Elemente A, B von $\mathfrak{A}$ $(A^{-1}BA)^\sigma = A^{-1}B^\sigma A$, daher

$$(A^\sigma)^{-1}\, B^\sigma\, A^\sigma = A^{-1}\, B^\sigma\, A.$$

Das besagt, daß $A^\sigma A^{-1}$ mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar ist. Da das Zentrum von $\mathfrak{A}$ nur aus E besteht, ist $A^\sigma A^{-1} = E$. Also ist σ der identische Automorphismus von $\mathfrak{A}$, das Einheitselement von $\mathfrak{A}_1$: der Zentralisator von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_1$ ist E.

Aus der letzten Bemerkung folgt insbesondere, daß $\mathfrak{A}_1$ wiederum kein Zentrum hat. Man kann $\mathfrak{A}_1$ daher als Normalteiler und ohne Zentralisator in eine Automorphismengruppe $\mathfrak{A}_2$ einbetten. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man den Automorphismengruppenturm von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \mathfrak{A}_2 \lhd \ldots \lhd \mathfrak{A}_\varrho \lhd \ldots.$$

[13]) Vgl. z. B. Speiser, S. 121—122.

Die Frage ist, ob dieser Turm ins Unendliche wachsen kann. Um Anschluß an die Sätze des vorigen Abschnitts zu bekommen, beweisen wir den Hilfssatz:

(43)* *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{B} \lhd \mathfrak{G}$. *Der Zentralisator von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ *sei* E, *der Zentralisator von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{G}$ *sei* $\mathfrak{Z}$. *Dann ist* $\mathfrak{Z}$ *auch der Zentralisator von* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{G}$.

Der Beweis erfolgt durch einen Induktionsschluß in bezug auf $j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$. Für $j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = 0$ ist die Behauptung trivial richtig. Ist $j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) > 0$, so schieben wir zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine Gruppe $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$ ein, so daß $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}' \lhd\lhd \mathfrak{B}$. Wir setzen $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{Z}\} = \mathfrak{G}'$ und $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}') = \mathfrak{B}'$. Es ist $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{Z}$ der Zentralisator von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}'$. Daher ist auch $\mathfrak{Z} \lhd \mathfrak{G}'$, ferner ist $\mathfrak{B}' \lhd \mathfrak{G}'$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{Z}$ fremd zu $\mathfrak{B}'$. Daher ist $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{B}'$, insbesondere mit $\mathfrak{A}'$, elementweise vertauschbar. $\mathfrak{Z}$ ist der Zentralisator von $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{G}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathfrak{Z}$ auch der Zentralisator von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}$. — Es folgt:

(44)* *Es sei* $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. *Der Zentralisator von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ *sei* E, *der Zentralisator von* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{G}$ *sei* E. *Dann ist* E *auch der Zentralisator von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Wir schalten zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}$ eine Normalkette ein:

$$\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{B} \lhd \mathfrak{B}_1 \lhd \ldots \lhd \mathfrak{B}_r = \mathfrak{G}.$$

Aus Hilfssatz (43) folgt für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ der Reihe nach, daß E der Zentralisator von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}_\varrho$ ist. — Nun sind wir am Ziel:

(45) *Der Automorphismengruppenturm* $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{A}_1 \lhd \mathfrak{A}_2 \lhd \ldots \lhd \mathfrak{A}_r$ *einer endlichen Gruppe* $\mathfrak{A}$ *ohne Zentrum bricht ab. Ist* $\mathfrak{A} \neq E$, *so ist die Ordnung von* $\mathfrak{A}_r$ *beschränkt durch die Ungleichung*:

$$i(\mathfrak{A}_r, E) < a^{3^{\alpha_2^2}}$$

$(a = i(\mathfrak{A}, E),\ \alpha_2 = \log_2 a)$.

Beweis. Nach (42) ist jede in dem Automorphismengruppenturm auftretende Gruppe invariant und ohne Zentralisator in der folgenden enthalten. Nach (44) ist daher $\mathfrak{A}$ nachinvariant und ohne Zentralisator in $\mathfrak{A}_r$ enthalten. Nun liefert (41) die behauptete Abschätzung für $i(\mathfrak{A}_r, E)$.

(Eingegangen am 8. Dezember 1938.)

Die Lösungen der Integralgleichung

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie.

Von

Heinz Söhngen in Berlin-Adlershof.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E.V., Berlin-Adlershof, Abt. Theoretische Aerodynamik und Flugmechanik des Instituts für Flugmechanik.

Die Aufgabe, eine Strecke (Eindecker) mit Wirbeln einer geeigneten Dichte $f(x)$ derart zu belegen, daß das zugehörige Geschwindigkeitsfeld in jedem Punkte dieser Strecke eine vorgegebene Normalkomponente $g(x)$ erzeugt, führt zu der Integralgleichung (1). *Entsprechend findet dieselbe Aufgabe für ein zweifach geschlitztes Gebiet tandemartiger Anordnung (ungestaffelter Doppelflügel) ihren Ausdruck in dem Integralgleichungssystem* (47), (48). *Die Lösungen der Gleichung* (1) *und des Gleichungssystems* (47), (48) *werden in geschlossener Form angegeben.*

Gliederung.

§ 1. Vorbemerkungen.
§ 2. Lösung der Integralgleichung.
§ 3 Reihenentwicklungen der Lösung.
§ 4. Die spezielle Lösung der Theorie dünner Profile.
§ 5. Das Integralgleichungssystem des Doppeldeckers.
§ 6. Lösung des Integralgleichungssystems.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Die singuläre und im Sinne des *Cauchyschen Hauptwertes* zu deutende Integralgleichung[1])

(1) $$g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi \qquad (-a < x < a)$$

[1]) Singuläre Integrale, für die der Cauchysche Hauptwert genommen werden soll, werden im folgenden stets mit $\oint$ bezeichnet.

ist im Hinblick auf flugtechnische Anwendungen schon des öfteren behandelt worden[2]). In diesen Untersuchungen werden aber, wenn auch meistens stillschweigend, Voraussetzungen über die Lösung $f(x)$ und damit über die gegebene Funktion $g(x)$ gemacht[3]), die für viele Anwendungen nicht mehr zutreffen[4]). Aus diesem Grunde soll hier die Integralgleichung (1) unter *schwächeren* Annahmen über $g(x)$ untersucht werden.

Wir wollen voraussetzen, daß die vorgegebene Funktion $g(x)$ in dem offenen Intervall $(-a, a)$ nebst der Funktion $g^2(x)\sqrt{a^2-x^2}$ integrierbar ist, und daß es dort — mit endlich vielen Ausnahmen — um jeden Punkt x ein abgeschlossenes Intervall gibt, in dem die Funktion $g(x)$ gleichmäßig einer Hölder-Bedingung

$$|g(x+h)-g(x)| < C|h|^{\lambda} \quad (0<\lambda<1) \tag{2}$$

mit einem Exponenten λ genügt, der von Intervall zu Intervall variieren darf. Die Punkte, in denen eine derartige Hölder-Bedingung erfüllt ist, wollen wir als *H-Punkte* bezeichnen.

Zunächst werden wir die Gesamtheit derjenigen Funktionen $f(x)$ bestimmen, die in jedem H-Punkt der Integralgleichung (1) genügen, und die nebst den Funktionen $f^2(x)\sqrt{a^2-x^2}$ integrierbar sowie in der Umgebung eines jeden H-Punktes stetig sind.

Neben diesen hier aus physikalischen Gründen allein zuzulassenden „Lösungen" gibt es natürlich noch unendlich viele andere der Integralgleichung (1) genügende Funktionen. Denn man kann ja jede Lösung noch in endlich vielen Punkten (oder unter Verwendung des Lebesgueschen Integralbegriffs sogar in einer Menge vom Maße Null) beliebig abändern, ohne daß sie dadurch ihren Charakter als lösende Funktion im allgemeineren Sinne einbüßt; für die Anwendungen jedoch dürften derartige Mannigfaltigkeiten kein Interesse haben.

Die oben formulierte Aufgabe wird in § 2 auf ein potentialtheoretisches Randwertproblem für den Kreis zurückgeführt, dessen Lösung sich geschlossen durch Poisson-Integrale darstellen läßt. Dieser potentialtheoretische Weg hat

---

[2]) A. Betz, Tragflügeltheorie, Berichte und Abhandlungen der WGL. 1920, Heft 2. — M. Munk, General Theory of Thin Wing Sections, U. S. N. A. C. A.-Report, No. 142, 1922 und U. S. N. A. C. A.-Report, No. 191, 1924. — H. Glauert, A Theory of Thin Airfoils, ARCR. and M. 910, 1924/25. — Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik, Bd. II, 2. Aufl., S. 82f. — G. Hamel, Integralgleichungen 1937, S. 145f.

[3]) Es muß $g(x)$ stetig sein und gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften aufweisen.

[4]) H. Glauert, Theoretical Relationships for an Airfoil with Hinged Flap, ARC. and M. 1095, 1927/28. — W. G. A. Perring, The Theoretical Relationships for an Aerofoil with a Multiply Hinged Flap System, ARC. and M. 1171, 1928/29. — In diesen beiden Untersuchungen ist $g(x)$ nur stückweise stetig; in anderen Anwendungen weist diese Funktion sogar Unendlichkeitsstellen auf.

vor einer reinintegraltheoretischen Behandlung[5]) der Aufgabe den Vorteil, daß sich viele Lösungseigenschaften unmittelbar aus bekannten Sätzen über das Poisson-Integral ergeben, so z. B. die in den Anwendungen oft benutzten Reihenentwicklungen (§ 3) der Funktion $f(x)$. Die Lösungen selbst unterscheiden sich rein formal nicht von den schon bekannten, allerdings unter engeren Voraussetzungen abgeleiteten Darstellungen.

In § 4 wird dann diejenige spezielle Lösung untersucht, die für die Theorie der dünnen Profile von besonderem Interesse ist[6]).

Eine weitergehende Anwendung (§ 5) der vorangehenden Darlegungen stellt die Behandlung (§ 6) des Integralgleichungssystems (47), (48) dar, das für die Theorie der Doppelflügel von Bedeutung ist.

§ 2.

Lösung der Integralgleichung.

Wir gehen zunächst von der Annahme aus, daß eine den oben gestellten Forderungen genügende Lösung $f(x)$ der Integralgleichung (1) existiert und wollen auf dem Wege über ein potentialtheoretisches Randwertproblem zeigen, daß dann $f(x)$ eine ganz bestimmte Gestalt haben muß. Dazu bilden wir das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ derjenigen ebenen wirbelfreien Strömung, die von der mit Wirbeln der Dichte $f(x)$ belegten Strecke $(-a, a)$ in der x, y-Ebene erzeugt wird, d. h. also den Ausdruck

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} f(\xi) \operatorname{arctg} \frac{y}{x - \xi} \, d\xi. \tag{3}$$

Setzt man

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(\xi) \, d\xi,$$

so kann die Funktion $\varphi(x, y)$ mittels partieller Integration in der Form

$$\varphi(x, y) = -\frac{F(-a)}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x + a} - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} F(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} \, d\xi \tag{4}$$

bzw.

$$\varphi(x, y) = -\frac{F(-a)}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x + a} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^{a} F(\xi) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}} \, d\xi \tag{5}$$

---

[5]) Vgl. K. Schröder, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1938.

[6]) Vgl. W. Birnbaum, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 3 (1923), S. 290—297.

geschrieben werden, der man unmittelbar entnimmt, daß die durch die Gleichung (3) dargestellte Funktion eine im ganzen Außengebiet der längs $(-a, a)$ aufgeschlitzten x, y-Ebene mit Ausnahme des Unendlichfernen reguläre, daselbst beschränkte Potentialfunktion ist. Weiter ersieht man aus den Darstellungen (4) und (5), daß sich diese Funktion bei einmaliger Umlaufung des Schlitzes um die Größe $-F(-a)$ ändert. Für die im ganzen Außengebiet regulären und eindeutigen, im Unendlichen verschwindenden Potentialfunktionen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ gelten alsdann die Darstellungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} f(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \tag{6a}$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} f(\xi) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi. \tag{6b}$$

Der Zusammenhang der Potentialfunktion $\varphi(x, y)$ mit dem Ausgangsproblem wird ersichtlich, wenn man das Verhalten der Randwerte von $\varphi(x, y)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ untersucht.

Die Funktion $\varphi(x, y)$ ist wegen der Darstellung (5) bis auf das Potential eines isolierten Wirbels gleich der Normalableitung eines logarithmischen Potentials der einfachen Schicht der mit stetiger Dichte $F(x)$ belegten Strecke $[-a, a]$. Demnach gelten für die inneren Punkte dieses Intervalls die Beziehungen

$$\begin{aligned} \lim_{y \to +0} \varphi(x, y) &= -\tfrac{1}{2} F(x) \pm \nu F(-a), \\ \lim_{y \to -0} \varphi(x, y) &= +\tfrac{1}{2} F(x) \pm \mu F(-a), \end{aligned} \qquad (\nu, \mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

wobei die letzten Bestandteile von dem vieldeutigen Potential des isolierten Wirbels herrühren. Entsprechend ergeben sich für die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ die in den H-Punkten gültigen Gleichungen

$$\lim_{y \to +0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\lim_{y \to -0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\tfrac{1}{2} f(x). \tag{8}$$

Um den Randwert der Normalableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ zu bestimmen, berücksichtige man, daß nach Voraussetzung in den H-Punkten die Integralgleichung (1) besteht, die zusammen mit (6b) zu der Relation

$$\lim_{y \to +0} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = g(x) \tag{9}$$

führt.

Beachtet man nun, daß $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ die zu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ konjugierte Potentialfunktion ist, deren Randwert nach Gleichung (9) durch die gegebene Funktion $g(x)$ festgelegt wird, während der Randwert von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ die Funktion $f(x)$ bestimmt, so ist es naheliegend, die in § 1 formulierte Aufgabe als ein zweites Randwertproblem der Potentialtheorie zu behandeln. Dazu bilden wir mittels

$$z = x + iy = \frac{a}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \quad (\zeta = r \cdot e^{i\vartheta}) \tag{10}$$

bzw.

$$x = \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\vartheta, \qquad y = \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\vartheta \tag{11}$$

das Außengebiet des Schlitzes in der x, y-Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf das *Außen*gebiet des Einheitskreises ab. Den Potentialfunktionen φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ entsprechen bei dieser Abbildung wiederum Potentialfunktionen, die wir hier der Einfachheit halber durch dieselben Symbole kennzeichnen wollen. Weiter gelten die Verknüpfungsrelationen

$$\begin{aligned} r\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} &= -\frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{12}$$

aus denen sich an jeder Stelle ϑ, die einem H-Punkt entspricht, für die im ganzen Außengebiet des Einheitskreises regulären sowie eindeutigen Potentialfunktionen $r\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ und $-\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}$ die Randwertbeziehungen

$$\left[r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right]_{r \to 1} = a \cdot \sin\vartheta\, g(\vartheta) \quad \text{falls } -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi \tag{13}$$

und

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right]_{r \to 1} = \frac{1}{2} a \cdot \sin\vartheta\, f(\vartheta) \text{ falls } -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi \tag{14}$$

ergeben. Dabei machen wir von der vereinfachten Schreibweise

$$\begin{cases} g(\vartheta) = g(x) & \text{mit } x = a \cdot \cos\vartheta \text{ für } -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi, \\ f(\vartheta) = \begin{cases} f(x) \text{ mit } x = a \cdot \cos\vartheta \text{ für } 0 < \vartheta < \pi \\ -f(x) \text{ mit } x = a \cdot \cos\vartheta \text{ für } -\pi < \vartheta < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{15}$$

Gebrauch, die

$$g(-\vartheta) = g(\vartheta) \qquad \text{und} \qquad f(-\vartheta) = -f(\vartheta)$$

bedingt; ferner definieren wir analog zu $f(\vartheta)$ die $F(x)$ entsprechende ungerade Funktion $F(\vartheta)$, so daß also im Falle $F(-a) = 0$ für jeden Wert von ϑ die Grenzrelation

$$\lim_{r \to 1} \varphi(r, \vartheta) = -\tfrac{1}{2} F(\vartheta)$$

richtig ist.

Sind die beiden Funktionen $r\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ und $g(\vartheta)$ *beschränkt*, so ist die Potentialfunktion $r\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ nach einem bekannten potentialtheoretischen Satz durch ihre Randwerte $g(\vartheta)$ bestimmt, und es gilt die Gleichung

$$(16) \qquad r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\frac{(r^2-1)\sin\psi}{1+r^2-2r\cos(\psi-\vartheta)}\,d\psi \quad (r>1).$$

Beachtet man noch, daß die Potentialfunktion $\varphi(r, \vartheta)$ im Unendlichen beschränkt ist und sich nach der auf Seite 248 hinsichtlich der Vieldeutigkeit gemachten Bemerkung in der Form

$$(17) \qquad \varphi(r,\vartheta) = -\frac{F(-a)}{2\pi}\vartheta + \varphi_0(r,\vartheta)$$

mit $\varphi_0(r, \vartheta)$ als einer eindeutigen und im ganzen Außengebiet regulären Potentialfunktion schreiben läßt, so ergibt sich aus (16) für die zu $r\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ konjugierte Potentialfunktion $-\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}$ der Ausdruck

$$(18) \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{F(-a)}{2\pi} + \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\cdot\sin\psi\,\frac{2r\sin(\psi-\vartheta)}{1+r^2-2r\cos(\psi-\vartheta)}\,d\varphi \quad (r>1),$$

der wiederum die Relation

$$(19) \quad \varphi(r,\vartheta) = -\frac{F(-a)}{2\pi}\vartheta + \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\sin\psi\cdot\ln[1+r^2-2r\cos(\psi-\vartheta)]\,d\psi + C \qquad (r>1)$$

mit einer noch unbestimmten Konstanten C zur Folge hat. Wir werden später sehen, daß $C = 0$ sein muß.

Unter Verwendung eines tiefer liegenden Satzes der Potentialtheorie wollen wir nun zeigen, daß die soeben gewonnenen Darstellungen (16), (18) und (19) auch noch unter den in § 1 gemachten allgemeineren Voraussetzungen über die Vorgabe $g(\vartheta)$ gelten. Wir können uns dabei auf den durch die Gleichung (17) gegebenen eindeutigen Bestandteil $\varphi_0(r, \vartheta)$ beschränken, dessen stetiger Randwert eine ungerade Funktion in ϑ und das unbestimmte Integral seiner quadratisch integrierbaren Ableitung ist. Diese Aussagen über den Randwert reichen aber für die Darstellbarkeit [7]) der Potentialfunktion $\varphi_0(r, \vartheta)$ durch ein logarithmisches Potential der einfachen Schicht mit

---

[7]) Vgl. L. Lichtenstein, Über das Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials. J. f. Math. **141** (1912), S. 12—42 und **142** (1913), S. 189—190; siehe insbesondere S. 32—33 und S. 189.

uadratisch integrierbarer Dichte $g^*(\vartheta)$ der Masse Null aus, d. h. es gilt eine Beziehung der Form

$$\varphi_0(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^*(\psi)\ln[1 + r^2 - 2r\cdot\cos(\psi-\vartheta)]\,d\psi$$

nit

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^*(\psi)\,d\psi = 0.$$

Diese Relation hat nun zur Folge, daß die Potentialfunktion $r\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}$ als ein Poisson-Integral über $g^*(\vartheta)$ geschrieben werden kann, mithin, außer höchstens n einer Menge vom Maße Null, den Randwert $g^*(\vartheta)$ annimmt, so daß also n diesen Punkten nach Gleichung (13)

$$g^*(\vartheta) = a\cdot\sin\vartheta\,.\,g(\vartheta)$$

ein muß. Damit ist die obige Behauptung vollständig bewiesen und zugleich ezeigt, daß die in der Gleichung (19) auftretende Konstante C verschwindet.

Für den Randwert $\frac{1}{2}a\cdot\sin\vartheta\,f(\vartheta)$ der Funktion $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$ ergibt sich schließlich us einer von Lichtenstein [8]) angegebenen Relation in den H-Punkten die Darstellung

20) $$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right]_{r\to 1} = \frac{1}{2}a\cdot\sin\vartheta\cdot f(\vartheta) = -\frac{F(-a)}{2\pi} + \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[g(\vartheta)\sin\vartheta - g(\psi)\sin\psi]\frac{\sin(\psi-\vartheta)}{1-\cos(\psi-\vartheta)}\,d\psi$$

zw. wegen

21) $$\oint_{-a}^{a}\frac{1}{x-\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} = 0$$

ie Gleichung

22) $$f(x) = \frac{\Gamma}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{2}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\oint_{-a}^{a}\frac{g(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{x-\xi}\,d\xi,$$

ie die Abhängigkeit der Funktion $f(x)$ von der Vorgabe $g(x)$ in Evidenz setzt. n der letzten Gleichung haben wir die Konstante $-F(-a)$ mit Γ bezeichnet, a nach Gleichung (18) die Größe

23) $$-F(-a) = \Gamma$$

---

[8]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [7]), S. 26—29. Aus der dort gegebenen Darstellung [7]) erhält man wegen $\int_{-\pi}^{\pi}\sin\vartheta\,.\,g(\vartheta)\,d\vartheta = 0$ die Gleichung (20) durch eine leichte mformung.

die Bedeutung der Gesamtzirkulation für das durch das Gleichungssystem (6a), (6b) definierte Geschwindigkeitsfeld hat.

Wir sind von der Annahme ausgegangen, daß die Funktion $f(x)$ eine Lösung der Integralgleichung in dem oben festgelegten Sinne ist und haben dann gezeigt, daß $f(x)$ notwendig die Form (22) haben muß. Es bleibt nun zu untersuchen, ob auch umgekehrt jede durch die rechte Seite von (22) gegebene Funktion $f(x)$ den gestellten Forderungen genügt. Zu diesem Zweck gehen wir von der durch (19) gegebenen Potentialfunktion $\varphi(r, \vartheta)$ aus, deren partielle Ableitungen für $r > 1$ den Gleichungen (16) und (18) genügen, während das Randverhalten dieser Ableitungen durch die Beziehungen (13) und (20) gekennzeichnet ist, wobei jetzt $f(\vartheta)$ die durch (22) und (15) definierte Funktion bedeutet.

Die Stetigkeit dieser Funktion $f(\vartheta)$ in den H-Punkten entnimmt man leicht aus einem von H. Schubert[9]) bewiesenen Hilfssatz. Danach genügt mit $\left[r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right]_{r \to 1} = a \cdot \sin \vartheta \cdot g(\vartheta)$ auch der Randwert $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right]_{r \to 1}$ in der Umgebung eines jeden H-Punktes gleichmäßig einer H-Bedingung mit demjenigen Exponenten λ, der an dieser Stelle zu $\sin \vartheta \cdot g(\vartheta)$ gehört, woraus sich dieselbe Eigenschaft auch für die Funktion $\sin \vartheta \cdot f(\vartheta)$ und damit für die Funktion $f(x)$ ergibt (die Intervallenden $x = \pm a$ bzw. die ihnen entsprechenden Stellen $\vartheta = 0, \pm \pi$ zählen ja nach Verabredung nicht zu den H-Punkten). Insbesondere ist also die Funktion $f(x)$ in der Umgebung eines jeden H-Punktes stetig.

Die von den Funktionen $f(x)$ und $f^2(x)\sqrt{a^2 - x^2}$ geforderte Integrabilität ist sichergestellt, wenn man weiß, daß die durch (20) gegebene Funktion $\frac{1}{2} a \cdot \sin \vartheta f(\vartheta)$ samt ihrem Quadrat nach ϑ integrabel ist. Dies besagt aber gerade ein Satz von Lichtenstein[10]). Damit ist dann auch die Existenz des Integrals $\int_{-a}^{a} \frac{f(\xi)\, d\xi}{x - \xi} d\xi$ in den H-Punkten garantiert, denn wir haben ja bereits gezeigt, daß $f(x)$ in diesen Punkten einer H-Bedingung genügt.

Abschließend bleibt nunmehr nur noch zu beweisen, daß der soeben als existierend nachgewiesene Hauptwert auch der Integralgleichung (1) genügt. Beachtet man dazu, daß die Potentialfunktion $\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}$ einerseits in den H-Punkten den Randwert $\frac{1}{2} a \sin \vartheta \cdot f(\vartheta)$ nat und andererseits in der Form (18) dargestellt werden kann, so gilt auch die Gleichung[10])

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{a}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin \psi \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \vartheta)} d\psi, \tag{24}$$

[9]) Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von H. Schubert.

[10]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [7]), S. 22—24.

ie durchaus nicht trivial ist, da die Randwerte $\frac{1}{2} a \sin \vartheta \cdot f(\vartheta)$ nicht beschränkt zu sein brauchen. Aus (24) ergibt sich dann für die konjugierte Potentialfunktion $r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, die wegen $g(-\vartheta) = g(\vartheta)$ im Unendlichen verschwindet, der Ausdruck

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin \psi \frac{2 r \sin(\psi - \vartheta)}{1 + r^2 - 2 r \cos(\psi - \vartheta)} d\psi,$$

er in Verbindung mit der Relation (16) für die H-Punkte die Beziehung

$$g(\vartheta) \sin \vartheta = \frac{a}{4\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} \sin \psi f(\psi) \frac{\sin(\psi - \vartheta)}{1 - \cos(\psi - \vartheta)} d\psi$$

ur Folge hat. Diese Gleichung besagt aber, daß $f(x)$ in den H-Punkten der ntegralgleichung (1) genügt.

Damit haben wir den folgenden Satz vollständig bewiesen.

Satz I. *Ist die Funktion $g(x)$ nebst der Funktion $g^2(x) \sqrt{a^2 - x^2}$ in dem offenen Intervall $(-a, a)$ integrierbar, und gibt es mit endlich vielen Ausnahmen um jede Stelle dieses Intervalls ein abgeschlossenes Teilintervall, in dem die Funktion $g(x)$ gleichmäßig eine H-Bedingung mit einem Exponenten $0 < \lambda < 1$ erfüllt, so wird durch die Gleichung* (22) *diejenige Funktion $f(x)$ beschrieben, die als einzige die folgenden Eigenschaften aufweist:*

Die Funktionen $f(x)$ und $f^2(x) \sqrt{a^2 - x^2}$ sind in $(-a, a)$ integrabel. Die Funktion $f(x)$ ist in jedem H-Punkt stetig, genügt dort der Integralgleichung (1) *und hat die vorgegebene Gesamtzirkulation*

$$\Gamma = \int_{-a}^{a} f(\xi) d\xi.$$

Überdies genügt dann $f(x)$ in einer vollen Umgebung eines jeden H-Punktes gleichmäßig einer H-Bedingung mit demjenigen Exponenten, der an dieser Stelle zu $g(x)$ gehört.

Neben der Funktion $f(x)$ wollen wir schließlich noch die beiden Integrale

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(\xi) d\xi \text{ und } L(x) = \int_{a}^{y} F(\xi) d\xi,$$

ie in der Tragflügeltheorie als Auftriebe bzw. Momente eine Rolle spielen, n handlicher Form angeben. Dabei sollen diejenigen Funktionen, die zu der *irkulationsfreien* Lösung $f_0(\vartheta)$ mit $\Gamma = 0$ gehören, stets durch den Index 0 ekennzeichnet werden, so daß wir also nach Gleichung (22)

$$F(x) = -\Gamma \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} + F_0(x) \tag{25}$$

chreiben können.

Die in dem abgeschlossenen Intervall $[-a, a]$ stetige und in jedem H-Punkt stetig differenzierbare Funktion $F_0(x)$ bzw. die ihr entsprechende Funktion $F_0(\vartheta)$ ist nach Gleichung (7) durch den Randwert der Potentialfunktion $\varphi_0(x, y)$ bzw. $\varphi_0(r, \vartheta)$ vollkommen festgelegt[11]), und wir erhalten, da die Darstellung (19) dieser Funktion auch noch für $r = 1$ richtig ist, für die Funktion $F_0(\vartheta)$ den Ausdruck

$$(26) \qquad F_0(\vartheta) = -\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\psi \cdot g(\psi) \ln\left[2(1-\cos(\vartheta-\psi))\right] d\psi,$$

der zu der Darstellung

$$(27) \qquad F_0(\vartheta) = -\frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(\psi) \cdot \sin\psi \cdot \ln\frac{1-\cos(\psi-\vartheta)}{1-\cos(\varphi+\vartheta)} d\psi$$

bzw.

$$(28) \qquad F_0(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} g(\xi) \cdot \ln\frac{a^2 - x\xi - \sqrt{(a^2-x^2)(a^2-\xi^2)}}{a^2 - x\xi + \sqrt{(a^2-x^2)(a^2-\xi^2)}} d\xi$$

führt, die in der flugtechnischen Literatur als Betzsche-Umkehrformel bekannt ist.

Ein Vergleich von (28) mit demjenigen Ausdruck für $F_0(x)$, den man aus Gleichung (22) durch Integration erhält, zeigt, daß bei der Integration von $f_0(x)$ die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf.

Für das Integral $L_0(x)$ von $F_0(x)$ ergibt sich aus den Gleichungen (25) und (26) wegen

$$(29) \quad \int \ln\{a[1-\cos(x-\alpha)]\} \cdot \sin(n x)\, dx$$
$$= \frac{1}{n}\{\cos(n\alpha) - \cos(n x)\} \cdot \ln\{a[1-\cos(x-\alpha)]\} + \frac{1}{n^2}\cos(n x)$$
$$- \frac{x}{n}\sin(n\alpha) + \frac{2}{n}\sum_{1}^{n-1}{}' \frac{1}{n-\nu}\cos[(n-\nu)x + \nu\alpha]$$

der Ausdruck

$$L(\vartheta) = a\frac{\Gamma}{\pi}(\sin\vartheta - \vartheta\cdot\cos\vartheta) + L_0(\vartheta)$$

mit

$$(30) \quad L_0(\vartheta) = \frac{a^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\sin\psi\left\{[\cos\psi - \cos\vartheta]\ln\frac{1-\cos(\vartheta-\psi)}{1-\cos(\vartheta+\psi)} - 2\vartheta\sin\psi\right\} d\psi.$$

---

[11]) Ist die Funktion $g(\vartheta)$ beschränkt, so genügt der Randwert von $\varphi_0(r, \vartheta)$ und damit auch die Funktion $F_0(\vartheta)$ sogar gleichmäßig auf dem ganzen Einheitskreis einer H-Bedingung mit jedem Exponenten $\lambda < 1$ und ist in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe entwickelbar. Vgl. hierzu H. Schmidt, Strenge Lösungen der Theorie der tragenden Linie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **17** (1937), S. 106; insbesondere Anmerkung 8 und 9.

Weiter entnimmt man den Gleichungen (29) und (30), daß sich die Funktion $L(\vartheta)$ und damit auch die Funktionen $F(\vartheta)$ und $f(\vartheta)$ geschlossen berechnen lassen, falls $\sin\vartheta \cdot g(\vartheta)$ die Form

$$\sin\vartheta \cdot g(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leqq \vartheta < -\vartheta_1 \\ B_m \cdot \sin(m\vartheta) & \text{für } -\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_1 \\ 0 & \text{für } \vartheta_1 < \vartheta \leqq \pi \end{cases} \tag{31}$$

hat. Diese Aussage bleibt wegen der Linearität der Lösungsgrößen $f(\vartheta)$, $F(\vartheta)$, $L(\vartheta)$ in der Vorgabe $\sin\vartheta \cdot g(\vartheta)$ auch dann noch gültig, wenn sich die Funktion $\sin\vartheta \cdot g(\vartheta)$ als lineare Superposition von Ausdrücken der Form (31) darstellen läßt, so daß also insbesondere — wegen bekannter trigonometrischer Identitäten — die geschlossene Berechnung der Lösung $f(x)$ für stückweise ganz rational gegebene Funktionen $g(x)$ möglich ist.

§ 3.

Reihenentwicklungen der Lösung.

Die oft benutzten Reihenentwicklungen der Funktion $f(\vartheta)$ ergeben sich am einfachsten aus der Tatsache, daß $-\frac{a}{2}\sin\vartheta \cdot f(\vartheta)$ der Randwert einer Potentialfunktion ist, für deren Konjugierte wegen (16) die Entwicklung

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = a\sum_1^\infty \frac{a_n}{r^n}\sin(n\vartheta) \qquad (r > 1) \tag{32}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\vartheta \cdot g(\vartheta) \cdot \sin(n\vartheta)\, d\vartheta \tag{33}$$

gilt. Demnach erhält man für die zu $r\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ konjugierte Potentialfunktion die Gleichung

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -\frac{\Gamma}{2\pi} + a\sum_1^\infty \frac{a_n}{r^n}\cos(n\vartheta) \qquad (r > 1). \tag{34}$$

Nach dem Kriterium von Dini[12]) konvergiert nun die zu $\sin\vartheta \cdot g(\vartheta)$ gehörige Fourier-Reihe in jedem H-Punkt und stellt dort den Funktionswert dar, so daß also an dieser Stelle die Beziehung

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_{r\to 1} = a\sum_1^\infty a_n \cdot \sin(n\vartheta) = a\sin\vartheta \cdot g(\vartheta) \tag{35}$$

[12]) Vgl. W. Rogosinski, Fouriersche Reihen (Göschen), S. 57—58.

richtig ist. Beachtet man weiter, daß in jedem derartigen Punkt nach dem Kriterium von Pringsheim[13]) die zu $\sin\vartheta \cdot g(\vartheta)$ konjugierte Reihe ebenfalls konvergiert, so liefert der Abelsche Grenzwertsatz zusammen mit (34) die Gleichung

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right]_{r \to 1} = \frac{\Gamma}{2\pi} - a \sum_{1}^{\infty n} a_n \cdot \cos(n\vartheta), \tag{36}$$

aus der sich nach (14) für alle H-Punkte die gesuchte Entwicklung

$$f(\vartheta) = \frac{\Gamma}{a\pi \sin\vartheta} - \frac{2}{\sin\vartheta} \sum_{1}^{\infty n} a_n \cdot \cos(n\vartheta) \tag{37}$$

ergibt. Man beachte aber, daß diese Reihenentwicklung keineswegs für alle Werte von ϑ gilt, daß vielmehr die Darstellung (37) an den Sprungstellen von $\sin\vartheta \cdot g(\vartheta)$ divergiert.

Im Hinblick auf mancherlei Anwendungen ist es zweckmäßig, an Stelle der Fourier-Koeffizienten a_n der Funktion $\sin\vartheta\, g(\vartheta)$ die Koeffizienten der geraden Funktion $g(\vartheta)$ selbst zu verwenden, wobei wir allerdings die *zusätzliche* Annahme der absoluten Integrabilität von $g(\vartheta)$ nach ϑ machen müssen. Dann ist

$$a_n = -\tfrac{1}{2}(A_{n+1} - A_{n-1})$$

mit

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\psi) \cdot \cos(n\psi)\, d\psi, \tag{38}$$

so daß sich durch einige für jedes feste $r > 1$ gültige Umformungen aus (34) der Ausdruck

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{\Gamma}{2\pi} - \frac{a}{2} A_1 - \frac{a}{2} A_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos\vartheta + \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \sin\vartheta \sum_{1}^{\infty n} \frac{A_n}{r^n} \sin(n\vartheta) \tag{39}$$

$$+ \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \cos\vartheta \cdot \sum_{1}^{\infty n} \frac{A_n}{r^n} \cdot \cos(n\vartheta)$$

ergibt, der genau wie oben zu den in den H-Punkten gültigen Entwicklungen

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right] = \frac{a}{2}\left(\frac{\Gamma}{a\pi} - A_1 + A_0\right) - \frac{a}{2} A_0 (1 + \cos\vartheta) + a \sin\vartheta \cdot \sum_{1}^{\infty n} A_n \sin(n\vartheta) \tag{40}$$

und

$$f(\vartheta) = \left(\frac{\Gamma}{a\pi} - A_1 + A_0\right) \frac{1}{\sin\vartheta} - A_0 \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} + 2 \sum_{1}^{\infty n} A_n \sin(n\vartheta) \tag{41}$$

führt.

---

[13]) Vgl. W. Rogosinski, Fouriersche Reihen (Göschen), S. 68.

Es sei noch hervorgehoben, daß man zu der Entwicklung (41) auch auf em in den meisten Beweisen gegangenen Weg über rein formale Fourier- ntwicklungen gelangen kann. Diese Darstellungen sind mathematisch natürlich öchstens dann zulässig, wenn die dabei auftretenden Reihen überall konver- eren[14]), was wiederum sehr starke und in den Anwendungen nicht immer zu- reffende Voraussetzungen über $g(x)$, z. B. Stetigkeit, bedingt.

§ 4.

Die spezielle Lösung der Theorie der dünnen Profile.

In der Tragflügeltheorie interessieren insbesondere zwei spezielle Lösungen er Integralgleichung (1). Dies ist einmal die schon oben hervorgehobene rkulationsfreie Lösung $f_0(x)$, die bei der Bestimmung der Auftriebsverteilung ber die Spannweite maßgebend[15]) ist. Die entsprechende Aufgabe für die erteilung über die Tiefe eines dünnen Profils führt dagegen zu einer anderen ösung $f_1(x)$, denn hier wird verlangt, daß das Geschwindigkeitsfeld (6) in er Umgebung der Hinterkante endlich bleibt. Wir zeigen nun, daß es genau *ne* derartige Lösung gibt, wenn man voraussetzt, daß die Vorgabe $g(x)$ in er Umgebung dieser Stelle eine H-Bedingung mit einem Exponenten $> \frac{1}{2}$ erfüllt. Diese Annahme bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da der Theorie der dünnen Profile die Funktion $g(x)$ bis auf eine additive onstante gleich der Ableitung der Skelettlinie des Profils ist[6]), die wir im lgemeinen sogar als stückweise ganz rational annehmen dürfen.

Aus der geforderten Endlichkeit der Funktionen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in der Um- ebung der Stelle $x = -a$ ergibt sich mit den Verknüpfungsrelationen (12) as Verschwinden der Größen $\left[r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right]_{r \to 1}$ und $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right]_{r \to 1}$ für $\vartheta = \pi$. Während e erste dieser Forderungen nach Gleichung (13) bereits erfüllt ist $-g(\vartheta)$ ist nach Voraussetzung in der Umgebung von $\vartheta = \pi$ beschränkt —, führt die weite Bedingung zusammen mit der Gleichung (20) zu einer Festlegung von Γ, ämlich $\Gamma = \Gamma_1$ mit

$$2) \qquad \Gamma_1 = -2\pi \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial \vartheta}\right]_{\vartheta = \pi} = -a \int_{-\pi}^{\pi} g(\psi) \sin \psi \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} d\psi$$

---

[14]) Man wird sogar noch wegen der dort vorgenommenen gliedweisen Integration e gleichmäßige Konvergenz der auftretenden Reihen verlangen müssen. Aber auch nn bleibt es noch offen, ob Summations- und Integrationsprozeß miteinander ver- uschbar sind, denn es handelt sich ja hier nicht um gewöhnliche Integrale, sondern n Cauchysche Hauptwerte singulärer Integrale.

[15]) Vgl. z. B. H. Gebelein, Über die Integralgleichung der Prandtlschen Tragflügel- eorie. Ing. Arch. 7 (1936), und K. Schröder, loc. cit. [5]).

oder

$$\Gamma_1 = -2\int_{-a}^{a} g(\xi)\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\,d\xi \tag{43}$$

bzw. unter Benutzung der Fourier-Koeffizienten (38)

$$\Gamma_1 = a\pi(A_1 - A_0). \tag{44}$$

Mithin ergibt sich aus den Beziehungen (22) und (43) in den H-Punkten für die Funktion $f_1(x)$ die Integraldarstellung

$$f_1(x) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\oint_{-a}^{a} g(\xi)\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\cdot\frac{d\xi}{x-\xi} \tag{45}$$

bzw. aus den Gleichungen (41) und (44) die Reihenentwicklung

$$f_1(\vartheta) = -A_0\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} + 2\sum_{1}^{\infty} A_n \sin(n\vartheta). \tag{46}$$

Umgekehrt erzeugt diese Wirbeldichte auch in der Umgebung der Hinterkante ein endliches Geschwindigkeitsfeld (6), da dort $f(x)$, wie man der Zerlegung

$$f_1(x) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\left\{\int_{-a}^{a}\frac{g(\xi)-g(x)}{x-\xi}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\,d\xi + g(x)\oint_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\frac{d}{x-\xi}\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\left\{\int_{-a}^{a}\frac{g(\xi)-g(x)}{x-\xi}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}\,d\xi + \pi g(x)\right\}$$

entnimmt, wie $\sqrt{a+x}$ verschwindet.

Ist $g(x)$ stückweise ganz rational, so können, wie in § 2 bemerkt wurde die Funktionen $f_1(x)$, $F_1(x)$ und $L_1(x)$, d. h. Wirbeldichte, Teilauftriebe und Teilmomente, geschlossen berechnet werden.

§ 5.

Das Integralgleichungssystem des Doppeldeckers.

Sind die beiden Funktionen $f_1(x_1)$ bzw. $f_2(x_2)$ in den punktefremden Intervallen $a \leqq x_1 \leqq b$ bzw. $-c \leqq x_2 \leqq c$ mit $b < -c$ der reellen Achse absolut integrabel definiert, und genügen sie in den inneren Punkten der betreffenden Intervalle einer lokalen H-Bedingung, so erzeugen die mit den Wirbeldichten $f_1(x_1)$ bzw. $f_2(x_2)$ belegten Strecken $[a, b]$ und $[-c, c]$ im Außengebiet der zweifach aufgeschlitzten x, y-Ebene ein reguläres und au

iner Potentialfunktion ableitbares Geschwindigkeitsfeld, dessen y-Kompo-
ente (Normalkomponente) auch noch in den inneren Punkten der einzelnen
chlitze einen Sinn hat und dort durch die Ausdrücke

47) $$\frac{1}{2\pi}\oint_a^b \frac{f_1(\xi_1)\,d\xi_1}{x_1-\xi_1}+\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{f_2(\xi_2)\,d\xi_2}{x_1-\xi_2}=g_1(x_1)$$

zw.

48) $$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{f_1(\xi_1)\,d\xi_1}{x_2-\xi_1}+\frac{1}{2\pi}\oint_{-c}^{c}\frac{f_2(\xi_2)\,d\xi_2}{x_2-\xi_2}=g_2(x_2)$$

egeben ist.

Wir befassen uns hier mit der umgekehrten Aufgabe, nämlich mit der Bestimmung der Wirbeldichten $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ zu vorgegebenen Normalkomponenten, d. h. mit der Lösung des Integralgleichungssystems (47), (48). Als Lösungen bzw. Vorgaben lassen wir dabei nur solche Funktionenpaare $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ bzw. $g_1(x_1)$, $g_2(x_2)$ zu, die den oben (I, § 1) gestellten und hier sinngemäß zu übertragenden Forderungen genügen.

Die Lösungen gewinnen wir ganz elementar durch Zurückführung auf Integralgleichungen der Form (1).

Es wird zunächst die Gleichung (48) mittels der Umkehrformeln (1) und (22) nach $f_2(x_2)$ aufgelöst, und so diese Funktion in Abhängigkeit von $f_1(x_1)$ dargestellt. Geht man dann mit dieser Beziehung in die Gleichung (47) ein, so ergibt sich für die Funktion $f_1(x_1)$ eine Integralgleichung, die wieder auf die Form (1) gebracht und nach $f_1(x_1)$ aufgelöst werden kann.

Deutet man das hier vorgelegte Problem als eine spezielle zweite Randwertaufgabe — die Normalkomponente $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ verhält sich beim Durchgang des Aufpunktes durch einen Schlitzpunkt stetig — für das zweifach geschlitzte Gebiet andemartiger Anordnung, so besagt der hier eingeschlagene Weg, daß diese Aufgabe mittels der Lösung derselben Randwertaufgabe eines einfach geschlitzten Gebietes gelöst werden kann. Die grundsätzliche Möglichkeit eines derartigen Vorgehens ergibt sich auch aus einem Satz von P. Koebe[16]), wonach sich die Lösung der ersten Randwertaufgabe für das Kreisringgebiet durch Poisson-Integrale darstellen läßt. Von diesem Ergebnis wurde hier jedoch kein Gebrauch gemacht, da der Lösung der Randwertaufgabe zunächst eine Abbildung des Schlitzgebietes auf ein Kreisringgebiet vorangehen müßte, die wegen der dabei auftretenden elliptischen Integrale die numerische Auswertung der Resultate sicherlich nicht handlicher macht.

---

[16]) Vgl. P. Koebe, Leipz. Ber. 65 (1913) und L. Lichtenstein, Neuere Ergebnisse der Potentialtheorie, Enc. d. m. Wiss., Bd. II, 3, S. 228, Anmerkung 162.

§ 6.

Lösung des Integralgleichungssystems.

Stellt das Funktionenpaar $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ eine Lösung des Integralgleichungssystems in dem oben näher beschriebenen Sinne dar, so gilt insbesondere die Beziehung

$$(49) \qquad \frac{1}{2\pi} \oint_{-c}^{c} \frac{f_2(\xi_2)}{x_2 - \xi_2} d\xi_2 = g_2(x_2) - \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{f_1(\xi_1)}{x_2 - \xi_1} d\xi_1,$$

in der die rechte Seite den an die Funktion $g(x)$ in Satz I gestellten Forderungen genügt. Mithin ergibt sich nach demselben Satz für die Funktion $f_2(x_2)$ eine Darstellung der Form

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{(c^2 - x_2^2)}} \left\{ \Gamma_2 - 2 \oint_{-c}^{c} \frac{\sqrt{(c^2 - \xi_2^2)}}{x_2 - \xi_2} g_2(\xi_2) \cdot d\xi_2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \oint_{-c}^{c} \frac{\sqrt{(c^2 - \xi_2^2)}}{x_2 - \xi_2} \int_a^b \frac{f_1(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} d\xi_1 \cdot d\xi_2 \right\},$$

die mit einer hier erlaubten Vertauschung der Integrationsreihenfolge zu dem Ausdruck

$$(50) \qquad f_2(x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{(c^2 - x_2^2)}} \left\{ \Gamma_1 + \Gamma_2 - 2 \oint_{-c}^{b} \frac{\sqrt{(c^2 - \xi_2^2)}}{x_2 - \xi_2} g_2(\xi_2) \cdot d\xi_2 \right.$$

$$\left. - \int_a^b \frac{\sqrt{(\xi_1^2 - c^2)}}{x_2 - \xi_1} f_1(\xi_1) \cdot d\xi_1 \right\}$$

führt, der die Abhängigkeit der Funktion $f_2(x_2)$ von $f_1(x_1)$ in Evidenz setzt. Die Konstanten Γ_1 und Γ_2 haben dabei die Bedeutung von Gesamtintegralen, nämlich

$$\Gamma_1 = \int_a^b f_1(x_1) dx_1 \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = \int_{-c}^{c} f_2(x_2) dx_2.$$

Setzt man den für $f_2(x)$ gefundenen Ausdruck (50) in die Gleichung (47) ein, so gelangt man zu der Integralgleichung

$$(51) \qquad \frac{1}{2\pi^2} \int_{-a}^{a} \frac{1}{x_1 - \xi_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(c^2 - \xi_2^2)}} \left\{ \Gamma_1 + \Gamma_2 - \int_a^b \frac{f_1(\xi_1)\sqrt{(\xi_1^2 - c^2)}}{\xi_2 - \xi_1} d\xi_1 \right.$$

$$\left. - 2 \oint_{-c}^{c} \frac{g_2(\xi_2)\sqrt{(c^2 - \xi_2)}}{\xi_2 - \xi_2} d\xi_2 \right\} d\xi_2 + \frac{1}{2\pi} \oint_a^b \frac{f_1(\xi_1)}{x_1 - \xi_1} d\xi_1 = g_1(x),$$

der man durch einige einfache Umformungen die Gestalt

$$(52)\qquad \frac{1}{2\pi}\oint_a^b \frac{f_1(\xi_1)\sqrt{\xi_1^2-c^2}}{x_1-\xi_1}\,d\xi_1 = \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1+\Gamma_2)+g_1(x_1)\sqrt{x_1^2-c^2} - \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{g_2(\xi_2)\sqrt{c^2-\xi_2^2}}{x_1-\xi_2}\,d\xi_2$$

geben kann, so daß sich also wiederum nach Satz I für die Funktion $f_1(x_1)$ die Darstellung

$$(53)\quad f_1(x_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{(x_1^2-c^2)(b-x_1)(x_1-a)}}\Big\{\overline{\Gamma}_1 + 2\int_{-c}^{c} g_2(\xi_2)\sqrt{c^2-\xi_2^2}\,d\xi_2 - (\Gamma_1+\Gamma_2)\Big(x_1-\frac{a+b}{2}\Big) - 2\oint_a^b \frac{g_1(\xi_1)\sqrt{(b-\xi_1)(\xi_1-a)(\xi_1^2-c^2)}}{x_1-\xi_1}\,d\xi_1 + 2\int_{-c}^{c}\frac{g_2(\xi_2)\sqrt{(c^2-\xi_2^2)(\xi_2-a)(\xi_2-b)}}{x_1-\xi_2}\,d\xi_2\Big\}$$

mit

$$\overline{\Gamma}_1 = \int_a^b f_1(\xi_1)\sqrt{\xi_1^2-c^2}\,d\xi_1$$

ergibt. Die Beziehungen (50) und (53) liefern dann für die Funktion $f_2(x_2)$ den Ausdruck

$$(54)\quad f_2(x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x_2^2)(x_2-a)(x_2-b)}}\Big\{2\int_a^b \frac{g_1(\xi_1)\sqrt{(b-\xi_1)(\xi_1-a)(\xi_1^2-c^2)}}{x_2-\xi_1}\,d\xi_1 - 2\oint_{-c}^{c}\frac{g_2(\xi_2)\sqrt{(c^2-\xi_2^2)(\xi_2-a)(\xi_2-b)}}{x_2-\xi_2}\,d\xi_2 - \overline{\Gamma}_1 - 2\int_{-c}^{c} g_2(\xi_2)\sqrt{c^2-\xi_2^2}\,d\xi_2 + (\Gamma_1+\Gamma_2)\Big(x_2-\frac{a+b}{2}\Big)\Big\}.$$

Abschließend bleibt nunmehr noch zu untersuchen, ob auch umgekehrt die für ein Lösungspaar $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ des Integralgleichungssystems (47), (48) sich als notwendig ergebenden Darstellungen (53), (54) für jede beliebige Wahl der Konstanten $\overline{\Gamma}_1$ und $\Gamma_1+\Gamma_2$ hinreichend sind, d. h. Lösungen mit den hier vorgeschriebenen Eigenschaften liefern.

Zunächst sieht man unmittelbar, daß die durch die Gleichungen (53) und (54) dargestellten Funktionen die an ein Lösungspaar hinsichtlich der Stetigkeit und Integrabilität gestellten Forderungen sicher erfüllen, denn es

haben ja diese Funktionen bis auf reguläre Faktoren bzw. Summanden die Form der durch den Ausdruck (22) dargestellten Lösung der Integralgleichung (1). Zugleich ist damit gezeigt, daß die Funktionen $f_1(x_1)$ bzw. $f_2(x_2)$ in der Umgebung eines jeden H-Punktes von $g_1(x_1)$ bzw. $g_2(x_2)$ eine H-Bedingung mit dem zu $g_1(x_1)$ bzw. $g_2(x_2)$ gehörenden Exponenten gleichmäßig erfüllen. Weiter ergibt sich aus dem oben eingeschlagenen Konstruktionsverfahren unmittelbar, daß diese Funktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ für jede Wahl von $\bar{\Gamma}_1$ und $\Gamma_1 + \Gamma_2$ die Gleichungen (52) und (50) befriedigen. Die Beziehung (50) führt aber nach Satz I zu der Relation (48), während der Gleichung (52) auch die Form (51) gegeben werden kann, die dann mit (50) die Integralbeziehung (47) liefert, was zu beweisen war.

In Analogie zu Satz I können wir demnach zusammenfassend den folgenden Satz aussprechen:

Satz II. *Erfüllen die Funktionen $g_1(x_1)$ bzw. $g_2(x_2)$ in den ihnen zugeordneten Intervallen (a, b) bzw. $(-c, c)$ mit $b < -c$ die an die Funktion $g(x)$ des Satzes* I *gestellten Voraussetzungen, so wird durch die Gleichungen* (53) *und* (54) *für jede Wahl der Konstanten $\bar{\Gamma}_1$ und $\Gamma_1 + \Gamma_2$ genau diejenige Mannigfaltigkeit von Funktionenpaaren $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ beschrieben, die nebst den Funktionen $f_1^2(x_1)\sqrt{(b - x_1)(x_1 - a)}$ und $f_2^2(x_2)\sqrt{c^2 - x_2^2}$ in den entsprechenden Intervallen integrabel sowie in jedem H-Punkt stetig sind und dort dem Integralgleichungssystem* (47), (48) *genügen.*

Die Funktionen $f_1(x_1)$ bzw. $f_2(x_2)$ befriedigen dann überdies in der Umgebung eines jeden H-Punktes von (a, b) bzw. $(-c, c)$ eine H-Bedingung mit dem zu der Funktion $g_1(x_1)$ bzw. $g_2(x_2)$ gehörenden Exponenten.

Die Freiheit in der Wahl der Konstanten $\bar{\Gamma}_1$ und $\Gamma_1 + \Gamma_2$ kann, wie man sich leicht überzeugt, einerseits dazu dienen, Lösungen mit vorgeschriebenen Einzelzirkulationen Γ_1 und Γ_2 zu bestimmen, andererseits gewährt sie die Möglichkeit, dem Lösungspaar Nullstellen an vorgegebenen Stellen x_1 und x_2 beizulegen. So stellen z. B. die beiden Funktionen

$$f_1^{(1)}(x_1) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(x_1 + c)(x_1 - a)}{(x_1 - c)(b - x_1)}}\left\{\int_a^b \frac{g_1(\xi_1)}{x_1 - \xi_1}\sqrt{\frac{(b - \xi_1)(\xi_1 - c)}{(\xi_1 - a)(\xi_1 + c)}}\,d\xi_1 + \int_{-c}^{c} \frac{g_2(\xi_2)}{x_1 - \xi_2}\sqrt{\frac{(\xi_2 - b)(c - \xi_2)}{(\xi_2 - a)(c + \xi_2)}}\,d\xi_2\right\},$$

(61)

$$f_2^{(1)}(x_1) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(x_2 - a)(c - x_2)}{(x_2 - b)(c - x_2)}}\left\{\int_a^a \frac{g_1(\xi_1)}{x_2 - \xi_1}\sqrt{\frac{(b - \xi_1)(\xi_1 - c)}{(\xi_1 - a)(c + \xi_1)}}\,d\xi_1 + \int_{-c}^{c} \frac{g_2(\xi_2)}{x_2 - \xi_2}\sqrt{\frac{(\xi_2 - b)(c - \xi_2)}{(\xi_2 - a)(c + \xi_2)}}\,d\xi_2\right\}$$

für den Fall, daß $g_1(x_1)$ und $g_2(x_2)$ in der Umgebung der Hinterkanten $x_1 = a$, $x_2 = -c$ regulär sind, genau dasjenige Lösungspaar des Integralgleichungssystems dar, das in den Hinterkanten verschwindet.

Diese Lösungen (61), die in der Theorie der Doppelflügel von Interesse sind, wollen wir noch unter der zusätzlichen Annahme konstanter Vorgaben $g_1(x_1) = g_1$ und $g_2(x_2) = g_2$ vereinfachen und beweisen dazu die beiden Relationen

$$(62)\quad \begin{aligned} &\oint_a^b \frac{1}{x_1-\xi_1}\sqrt{\frac{(b-\xi_1)(\xi_1-c)}{(\xi_1-a)(\xi_1+c)}}\,d\xi_1 + \int_{-c}^{c} \frac{1}{x_1-\xi_2}\sqrt{\frac{(\xi_2-b)(c-\xi_2)}{(\xi_2-a)(c+\xi_2)}}\,d\xi_2 = \pi,\\ &\int_a^b \frac{1}{x_2-\xi_1}\sqrt{\frac{(b-\xi_1)(\xi_1-c)}{(\xi_1-a)(\xi_1+c)}}\,d\xi_1 + \oint_{-c}^{c} \frac{1}{x_2-\xi_2}\sqrt{\frac{(\xi_2-b)(c-\xi_2)}{(\xi_2-a)(c+\xi_2)}}\,d\xi_2 = \pi, \end{aligned}$$

deren Gültigkeit sich im Rahmen dieser Untersuchungen folgendermaßen ergibt.

Nach Satz I genügt die Funktion

$$F(x_1) = \frac{2}{\pi\sqrt{(b-x_1)(x_1-a)}}\left\{\int_a^b G(\xi_1)\sqrt{\frac{\xi_1-a}{b-\xi_1}}\,d\xi_1 - \oint_a^b \frac{G(\xi_1)}{x_1-\xi_1}\sqrt{(b-\xi_1)(\xi_1-a)}\cdot d\xi_1\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{b-x_1}{x_1-a}}\oint_a^b \frac{G(\xi_1)}{x_1-\xi_1}\sqrt{\frac{\xi_1-a}{b-\xi_1}}\,d\xi_1$$

der Integralgleichung

$$(63)\qquad G(x_1) = \frac{1}{2\pi}\oint_a^b \frac{F(\xi_1)}{x_1-\xi_1}\,d\xi_1.$$

Setzt man nun speziell für die Funktion $G(x_1)$ den Ausdruck

$$G(x_1) = \int_{-c}^{c} \frac{1}{x_1-\xi_2}\sqrt{\frac{(\xi_2-b)(c-\xi_2)}{(\xi_2-a)(c+\xi_2)}}\,d\xi_2$$

ein, so erhält man für $F(x_1)$ die Darstellung

$$F(x_1) = 2\pi\sqrt{\frac{b-x_1}{x_1-a}} - 2\pi\sqrt{\frac{(b-x_1)(x_1-c)}{(x_1-a)(x_1+c)}},$$

die wegen

$$\oint_a^b \frac{1}{x_1-\xi_1}\sqrt{\frac{b-\xi_1}{\xi_1-a}}\,d\xi_1 = \pi$$

in Verbindung mit Gleichung (63) zu der ersten Relation (62) führt. Der Beweis für die zweite Relation verläuft ganz analog.

Die Gleichungen (61) und (62) liefern nunmehr die von der Cauchyschen Hauptwertbildung freien Darstellungen

$$f_1^{(1)}(x_1) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(x_1-a)(x_1+c)}{(b-x_1)(x_1-c)}}\left\{\pi g_1 + (g_2-g_1)\int_{-c}^{c}\frac{1}{x_1-\xi_2}\sqrt{\frac{(\xi_2-b)(c-\xi_2)}{(\xi_2-a)(c+\xi_2)}}\right\}d\xi_2,$$

(64)

$$f_2^{(1)}(x_2) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(x_2-a)(c+x_2)}{(x_2-b)(c-x_2)}}\left\{\pi g_2 + (g_1-g_2)\int_{a}^{b}\frac{1}{x_2-\xi_1}\sqrt{\frac{(b-\xi_1)(\xi_1-c)}{(\xi_1-a)(c+\xi_1)}}\right\}d\xi_1,$$

in denen nur noch vollständige elliptische Integrale auftreten, die sich nach einem Satz von Legendre durch Normalintegrale erster und zweiter Gattung, d. h. also durch tabulierte Funktionen, ausdrücken lassen[17]).

[17]) Eine Anwendung dieser Ergebnisse auf den symmetrischen Doppelflügel ist bereits in Angriff genommen und erscheint demnächst in „Luftfahrtforschung".

(Eingegangen am 8. Dezember 1938.)

Metrische Fragen der Gewebegeometrie.

Von

Robert Sauer in Aachen.

§ 1.

Fragestellung.

1. In der vorliegenden Arbeit werden topologische Begriffe der Differentialgeometrie mit metrischen Fragestellungen verknüpft. Wir schicken zunächst einige der topologischen Differentialgeometrie[1]) entnommene Definitionen voraus:

Sechseckgewebe. 3 Kurvenscharen eines einfach zusammenhängenden und bezüglich der 3 Kurvenscharen konvexen Gebietes einer Fläche *(Gewebegebiet)* bilden ein *Sechseckgewebe*, wenn es eine topologische Abbildung des Gewebegebietes auf ein *Bildgebiet* der Euklidischen Ebene gibt, bei der die 3 Gewebekurvenscharen in 3 Parallelgeradenbüschel[2]) *(Bildgeraden)* übergehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß die 3 Bildgeradenbüschel paarweise den Winkel $\pi/3$ einschließen.

Gewebemaschen. Aus Gewebekurven kann man *Dreieckmaschen* erzeugen. Durch Zusammenfassen von je 2 bzw. 6 Dreieckmaschen entstehen *Viereck-*

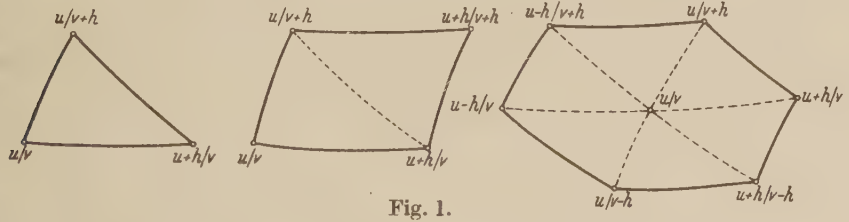


Fig. 1.

maschen bzw. *Sechseckmaschen* (Fig. 1). Diesen Gewebemaschen entsprechen im Bildgebiet gleichseitige Dreiecke, Rauten mit den Innenwinkeln $\pi/3$, $2\,\pi/3$ und regelmäßige Sechsecke. Jede Viereck- bzw. Sechseckmasche hat 1 bzw. 3 Gewebekurven als Diagonalen (in Fig. 1 gestrichelt).

Gewebeverschiebungen. Den Parallelverschiebungen im Bildgebiet entsprechen gewisse Transformationen im Gewebegebiet, die wir als *Gewebe-*

[1]) Vgl. Blaschke-Bol, Geometrie der Gewebe, Grundlehren der math. Wiss., Bd. 49.

[2]) Die Geraden sind jeweils nur soweit zu rechnen, als sie dem Bildgebiet angehören.

verschiebungen bezeichnen wollen. Die in Fig. 2 angedeutete Konstruktion der Gewebeverschiebung des Kurvenstücks AB in das Kurvenstück $A'B'$ zeigt, wie die Gewebeverschiebungen im Gewebegebiet selbst, ohne durch topologische Abbildung auf das Bildgebiet zurückzugehen, definiert werden können; gleichbezifferte Kurven sind Gewebekurven derselben Schar.

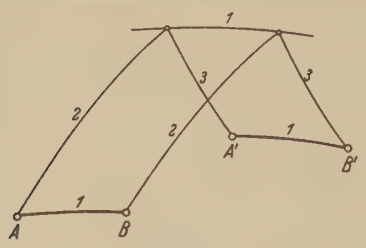


Fig. 2.

Äquivalente Gewebemaschen. Gewebemaschen heißen *äquivalent*, wenn sie durch eine Gewebeverschiebung miteinander zur Deckung gebracht werden können. Im Bildgebiet entsprechen ihnen parallelgestellte kongruente Maschen.

Dreiecksnetze. Aus diskreten Folgen von Gewebekurven lassen sich *Dreiecksnetze* erzeugen; im Bildgebiet entsprechen ihnen regelmäßige, d. h. aus kongruenten gleichseitigen Dreiecken aufgebaute Dreiecksnetze (Fig. 3). Ein

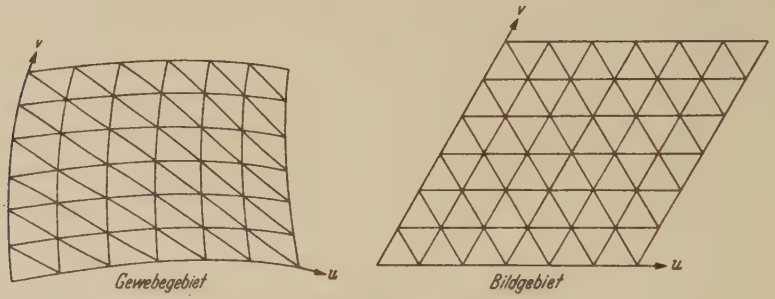


Fig. 3.

Dreiecksnetz enthält 2 Klassen äquivalenter Dreieckmaschen, 3 Klassen äquivalenter Viereckmaschen und lauter äquivalente Sechseckmaschen; dasselbe gilt für die „weiteren" Maschen eines Dreiecksnetzes, z. B. für die von je 4 Netzdreiecken gebildeten weiteren Dreieckmaschen usf.

2. Wir verknüpfen nun die in Nr. 1 zusammengestellten topologischen Begriffe der Gewebegeometrie mit einem metrischen Begriff, nämlich dem Umfang der Gewebemaschen[3]). Dabei soll es sich durchwegs um Fragen der Metrik in den Geweben bzw. in ihren Trägerflächen handeln, nicht aber um die Einbettung der Gewebe und ihrer Trägerflächen in den dreidimensionalen Raum; Gewebe gelten daher als nichtverschieden, wenn sie durch eine isometrische Abbildung der Trägerflächen ineinander übergeführt werden können.

[3]) Über eine ähnliche Fragestellung vgl. H. Graf und R. Sauer, Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 362—386.

Unsere Untersuchung bezieht sich auf folgende beiden Fragen:

(A) Gesucht sind die allgemeinsten, von bloßer isometrischer Abbildung verschiedenen Deformationen eines vorgegebenen Sechseckgewebes, bei denen die Umfänge aller Gewebemaschen eines gewissen Typs erhalten bleiben (§ 2).

(B) Gesucht sind die allgemeinsten Sechseckgewebe, bei denen äquivalente Gewebemaschen eines gewissen Typs stets konstanten Umfang haben (§ 3).

Die in (A) gesuchten Deformationen bezeichnen wir als *längentreu*, die in (B) gesuchten Sechseckgewebe als *längenhomogen* in bezug auf den betreffenden Maschentyp. Wir behandeln die Fragen (A), (B) der Reihe nach für die verschiedenen Maschentypen, nämlich a) für Viereckmaschen, b) für Dreieckmaschen und c) für Sechseckmaschen.

Im letzten Teil der Arbeit (§ 4) werden die in den §§ 2, 3 durchgeführten differentialgeometrischen Untersuchungen über Sechseckgewebe durch analoge *differenzengeometrische* Betrachtungen über Dreiecksnetze ergänzt. Man gewinnt dadurch einen unmittelbareren Einblick in die differentialgeometrischen Zusammenhänge.

§ 2.

Längentreue Deformationen eines Sechseckgewebes.

3. *Analytische Darstellung der Sechseckgewebe.*

Der Einfachheit halber verabreden wir: Alle vorkommenden Funktionen sind regulär, d. h. in konvergente Potenzreihen entwickelbar. Unsere sämtlichen Ergebnisse bleiben jedoch für beliebige stetige Funktionen gültig (Nr. 22).

Auf der Trägerfläche eines Sechseckgewebes führen wir solche Parameter u, v ein, daß die Gewebekurven der 3 Scharen durch

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad u + v = \text{const}$$

gegeben sind; im Bildgebiet bedeuten die u, v affine Koordinaten (Fig. 3). Neben den Parametern u, v der 2 ersten Gewebekurvenscharen werden wir auch

$$w = -(u + v)$$

als Parameter der dritten Gewebekurvenschar benützen. Für die Parameter dreier sich in einem Punkt schneidenden Gewebekurven gilt dann

$$u + v + w = 0.$$

Dreieckmaschen. Die Eckpunkte einer *Dreieckmasche* 1. bzw. 2. Art haben die Koordinaten u/v, $u + h/v$, $u/v + h$ bzw. u/v, $u - h/v$, $u/v - h$ mit $h > 0$. Vergleiche die in Fig. 3 links dargestellte Dreieckmasche 1. Art.

Viereckmaschen. Je nachdem die diagonale Gewebekurve der Schar $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ oder $w = \text{const}$ angehört, sprechen wir von einer *Viereckmasche der* 1., 2. *oder* 3. *Art.* Jede Viereckmasche enthält je eine Dreieckmasche 1. und 2. Art. Die Eckpunkte einer Viereckmasche 3. Art (Fig. 3, Mitte) haben die Koordinaten u/v, $u+h/v$, $u/v+h$, $u+h/v+h$ mit $h>0$.

Sechseckmaschen. Jede Sechseckmasche ist aus je 3 Dreiecken 1. und 2. Art zusammengesetzt. „Mittelpunkt" und Eckpunkte einer Sechseckmasche haben die Koordinaten u/v und $u \pm h/v$, $u/v \pm h$, $u \pm h/v \mp h$ mit $h>0$ (Fig. 3, rechts).

Äquivalente Gewebemaschen. Wir bezeichnen die positive Konstante h als *Maschenweite.* Dann gilt: *Äquivalente Gewebemaschen haben dieselbe Maschenweite.*

4. *Umfang der Gewebemaschen.*

Wir setzen in üblicher Weise

$$E = \mathfrak{x}_u^2, \qquad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v, \qquad G = \mathfrak{x}_v^2$$

und führen die stets positiven Funktionen

$$e = \sqrt{E}, \qquad f = \sqrt{E - 2F + G}, \qquad g = \sqrt{G}$$

ein, die der Ungleichung

$$|e - g| < f < e + g$$

genügen.

Für den Umfang $U(u, v, h)$ einer Viereckmasche 3. Art, den Umfang $D(u, v, h)$ bzw. $T(u, v, h)$ einer Dreieckmasche 1. bzw. 2. Art und den Umfang $S(u, v, h)$ einer Sechseckmasche mit den in Nr. 3 angegebenen Eckpunkten hat man

$$(1) \quad U = \int_u^{u+h} \{e(u,v) + e(u, v+h)\}\, du + \int_v^{v+h} \{g(u,v) + g(u+h, v)\}\, dv,$$

$$(2) \quad \begin{aligned} D &= \int_u^{u+h} e(u,v)\, du + \int_v^{v+h} g(u,v)\, dv + \int_u^{u+h} f(u, -w+h-u)\, du, \\ T &= \int_{u-h}^{u} e(u,v)\, du + \int_{v-h}^{v} g(u,v)\, dv + \int_{u-h}^{u} f(u, -w-h-u)\, du, \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} S = &\int_{u-h}^{u} e(u, v+h)\, du + \int_{v-h}^{v} g(u+h, v)\, dv + \int_{u-h}^{u} f(u, -w-h-u)\, du \\ &+ \int_u^{u+h} e(u, v-h)\, du + \int_v^{v+h} g(u-h, v)\, dv + \int_u^{u+h} f(u, -w+h-u)\, du, \end{aligned}$$

wobei für die Integration jeweils v, u bzw. w konstant ist. Die Potenzentwicklung nach h liefert

$$(4) \qquad U = 2h(e+g) + h^2(e_u + g_v + e_v + g_u) + \frac{h^3}{6}\{2(e_{uu} + g_{vv}) + 3(e_{vv} + g_{uu} + e_{uv} + g_{uv})\} + \ldots,$$

$$(5) \qquad \left.\begin{matrix} D \\ T \end{matrix}\right| = h(e+f+g) \pm \frac{h^2}{2}(e_u + g_v + f_u + f_v) + \ldots,$$

$$(6) \quad S = 2h(e+f+g) + \frac{h^3}{3}\{(e_{uu} + g_{vv}) + 3(e_{vv} + g_{uu} - e_{uv} - g_{uv}) + (f_{uu} + f_{vv} + f_{uv})\} + \frac{h^5}{60}\{(e_{uuuu} + g_{vvvv}) - 5(g_{uuuv} + g_{uvvv}) + 10(e_{uuvv} + g_{uuvv} - e_{uvvv} - g_{uuuv}) + 5(e_{vvvv} + g_{uuuu}) + (f_{uuuu} + f_{uuuv} + f_{uuvv} + f_{uvvv} + f_{vvvv})\} + \ldots;$$

die Funktionen e, f, g und ihre Ableitungen sind hierbei immer an einer Ecke bzw. dem Mittelpunkt u/v der Gewebemasche wie in Nr. 3 zu nehmen.

5. *Deformation eines Gewebes.*

Eine Gewebedeformation ist gegeben durch

$$\mathfrak{x}^*(u,v) = \mathfrak{x}(u,v) + \bar{\mathfrak{x}}(u,v);$$

dabei sind $\mathfrak{x}(u,v)$ bzw. $\mathfrak{x}^*(u,v)$ die Ortsvektoren der Gewebepunkte vor bzw. nach der Deformation. Die Funktionen e, f, g werden bei der Deformation transformiert in

$$e^* = e + \bar{e}, \quad f^* = f + \bar{f}, \quad g^* = g + \bar{g},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$(7) \quad \bar{e} = \bar{\mathfrak{x}}_u^2 + 2\mathfrak{x}_u\bar{\mathfrak{x}}_u, \qquad \bar{f} = \bar{\mathfrak{x}}_u\bar{\mathfrak{x}}_v + \mathfrak{x}_u\bar{\mathfrak{x}}_v + \mathfrak{x}_v\bar{\mathfrak{x}}_u, \qquad \bar{g} = \bar{\mathfrak{x}}_v^2 + 2\mathfrak{x}_v\bar{\mathfrak{x}}_v.$$

Da es sich bei unseren Untersuchungen immer nur um die Metrik in den Geweben und ihren Trägerflächen handelt und daher isometrische Gewebe als identisch gelten, ist eine Gewebedeformation für uns gekennzeichnet durch die *Deformationsfunktionen* $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$; die nachfolgenden Überlegungen beziehen sich ausschließlich auf diese Funktionen.

Die Änderung der Umfänge der Gewebemaschen bei einer Deformation läßt sich leicht aus den Formeln (1) bis (6) entnehmen. Da nämlich e, f, g und ihre Ableitungen in diesen Formeln linear vorkommen, ergibt sich:

Die durch die Deformation (7) bewirkte Änderung der Umfänge der Gewebemaschen wird durch (1), (2), (3) bzw. (4), (5), (6) gegeben, wenn man statt e, f, g die Deformationsfunktionen $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ und deren Ableitungen einsetzt.

Wir sind nun in der Lage, die Frage (A) nach den allgemeinsten längentreuen Deformationen zu beantworten, d. h. diejenigen Deformationen zu ermitteln, bei denen die Umfänge U, D, T bzw. S invariant bleiben. Zu diesem

Zweck sind die Deformationsfunktionen $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ so zu bestimmen, daß die Faktoren von h, h^2, h^3 usf. in (4), (5) bzw. (6) sämtlich verschwinden, wenn man e, f, g durchwegs durch $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ ersetzt. Dadurch bekommt man für $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ zunächst unendlich viele lineare homogene partielle Differentialgleichungen. Sie lassen sich jedoch auf zwei bzw. drei unabhängige Gleichungen zurückführen, deren allgemeine Lösung leicht anzugeben ist. Wir behandeln jetzt die Aufgabe der Reihe nach für die verschiedenen Maschentypen.

6. *Längentreue Deformationen bezüglich der Viereckmaschen.*

Man kann leicht einsehen, daß es, von bloßen isometrischen Abbildungen abgesehen, keine Deformationen gibt, bei denen die Viereckmaschen aller drei Arten (Nr. 3) den Umfang nicht ändern. Wir fordern daher die Längentreue nur bezüglich der Viereckmaschen einer Art, z. B. der 3. Art.

Aus (4) ergibt sich durch Nullsetzen der Faktoren von h und h^3

$$(8) \qquad \bar{e} + \bar{g} = 0, \qquad 2(\bar{e}_{uu} + \bar{g}_{vv}) + 3(\bar{e}_{vv} + \bar{g}_{uu} + \bar{e}_{uv} + \bar{g}_{uv}) = 0,$$

also

$$\bar{g} = -\bar{e} \qquad \text{und} \qquad \bar{e}_{uu} - \bar{e}_{vv} = 0.$$

Das allgemeine Integral lautet

$$(9) \qquad \boxed{\bar{e} = -\bar{g} = \varphi(u+v) + \psi(u-v).}$$

Da die rechte Seite von (1) bei Einsetzen von (9) an Stelle e und g identisch verschwindet, ist (9) für die Längentreue nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend und die Faktoren sämtlicher Potenzen von h in (4) müssen sich aus den beiden in (8) benützten durch Differentiation und Linearkombination ergeben. Wir haben somit

Satz 1. *Die in bezug auf die Viereckmaschen 3. Art längentreuen Deformationen sind durch (9) mit den zwei willkürlichen Funktionen $\varphi(u+v)$, $\psi(u-v)$ gekennzeichnet.*

Da die Forderung der Längentreue sich nur auf die Gewebekurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ bezieht, muß natürlich die dritte Deformationsfunktion $\bar{f}(u, v)$ ganz unbestimmt bleiben. Als trivialer Sonderfall sind daher in (9) die „*Tschebytscheff-Transformationen*“ $\bar{e} = \bar{g} = 0$, $\bar{f} \neq 0$ enthalten, bei denen nicht nur die Umfänge der Viereckmaschen, sondern sogar die Längen der einzelnen Maschenseiten erhalten bleiben, während sich die Maschenwinkel im allgemeinen ändern.

Durch passende Wahl der willkürlichen Funktion $\bar{f}(u, v)$ der beiden Veränderlichen u, v kann, wenn wir von einschränkenden Realitätsbedingungen absehen, jede längentreue Deformation (9) so ergänzt werden, daß das deformierte Gewebe eine beliebig vorgegebene Fläche als Trägerfläche bekommt.

Neben den Viereckmaschen 3. Art führen wir jetzt noch die *Viereckkreuze 3. Art* ein: Ein Viereckkreuz 3. Art mit der Gesamtlänge $L(u, v, h)$ wird gebildet von den beiden sich in u/v schneidenden Gewebekurven $v = \text{const}$ und $u = \text{const}$ zwischen den Punkten $u - h$ und $u + h$ bzw. $v - h$ und $v + h$ (Fig. 4); es enthält also die vier Seiten, die den vier in u/v zusammenstoßenden Maschenvierecken paarweise gemeinsam sind. Für die Kreuzlänge $L(u, v, h)$ gilt die zu (4) analoge Entwicklung

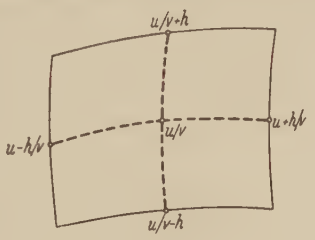


Fig. 4.

$$L = 2h(e + g) + \frac{h^3}{3}(e_{uu} + g_{vv}) + \ldots. \tag{10}$$

Deformationen, bei denen die Längen L ungenähert bleiben, bezeichnen wir als *längentreu bezüglich der Viereckkreuze 3. Art*. Sie sind durch die mit (8) gleichwertigen Bedingungen

$$\bar{e} + \bar{g} = 0, \qquad \bar{e}_{uu} + \bar{g}_{vv} = 0$$

gekennzeichnet und man hat sonach

Satz 2. *Die bezüglich der Viereckmaschen einer Art sowie die bezüglich der Viereckkreuze derselben Art längentreuen Deformationen sind miteinander identisch* (vgl. Satz 15).

7. *Längentreue Deformationen bezüglich der Dreieckmaschen.*

Die Forderung ungeändert bleibender Umfänge $D(u, v, h)$ der Maschendreiecke 1. Art bzw. $T(u, v, h)$ der Maschendreiecke 2. Art führt durch Nullsetzen der Faktoren von h und h^2 in (5) beide Male auf dieselben Bedingungen

$$\bar{e} + \bar{f} + \bar{g} = 0, \qquad \bar{e}_v + \bar{g}_u = 0. \tag{11}$$

Das allgemeine Integral

$$\boxed{\bar{e} = \varphi_u(u, v), \quad \bar{f} = -\varphi_u(u, v) + \varphi_v(u, v), \quad \bar{g} = -\varphi_v(u, v)} \tag{12}$$

bringt, für e, f, g eingesetzt, die rechten Seiten von (2) zum Verschwinden. Daher gilt

Satz 3. *Die in bezug auf die Dreieckmaschen längentreuen Deformationen sind durch* (12) *mit der willkürlichen Funktion $\varphi(u, v)$ gekennzeichnet. Die Längentreue bezüglich der Dreieckmaschen der einen Art hat die Längentreue auch bezüglich der Dreieckmaschen der anderen Art als notwendige Folge* (vgl. Satz 17).

Da $\varphi(u, v)$ als Funktion der zwei Veränderlichen u, v willkürlich bleibt, gibt es, wenn wir von einschränkenden Realitätsbedingungen absehen, stets eine längentreue Deformation (12), bei der eine beliebig vorgegebene Fläche Trägerfläche des deformierten Gewebes wird.

8. *Umwege in Sechseckgeweben.*

In engem Zusammenhang mit den Umfängen der Dreieckmaschen steht der Begriff der *Umwege in Sechseckgeweben*:

Irgend zwei Punkte u_0/v_0 und u_1/v_1 des Gewebebereichs lassen sich verbinden durch unbegrenzt viele *Gewebewege*, die jeweils aus endlich vielen Bögen von Gewebekurven zusammengesetzt sind. Wir rechnen die Wegstücke auf den Gewebekurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ positiv, wenn sie im Sinne zunehmender v, w bzw. u durchlaufen werden. Die Differenz der Weglänge irgend zweier die Punkte u_0/v_0 und u_1/v_1 verbindenden Gewebewege I, II (Fig. 5) soll ihr *Umweg* heißen.

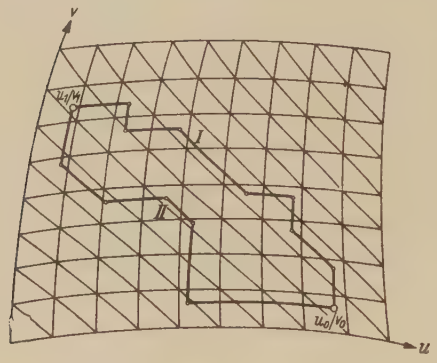


Fig. 5.

Bei der Deformation (12) bleiben alle Umwege ungeändert; denn jeder zwei Punkte u_0/v_0 und u_1/v_1 verbindende Gewebeweg erfährt den nämlichen Zuwachs $\varphi(u_0, v_0) - \varphi(u_1, v_1)$. Es genügt, dies für je ein Wegstück auf einer Gewebekurve jeder der drei Scharen zu beweisen: Aus (12) folgt

für $u = \text{const}$:

$$\int_{v_0}^{v_1} \bar{g}(u_0, v)\, dv = -\int_{v_0}^{v_1} \frac{\partial}{\partial v} \varphi(u_0, v)\, dv = \varphi(u_0, v_0) - \varphi(u_0, v_1),$$

für $v = \text{const}$:

$$-\int_{u_0}^{u_1} \bar{e}(u, v_0)\, du = -\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, v_0)\, du = \varphi(u_0, v_0) - \varphi(u_1, v_0),$$

für $w = \text{const}$:

$$\int_{u_0}^{u_1} \bar{f}(u, -u + u_0 + v_0)\, du = -\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, -u + u_0 + v_0)\, du = \varphi(u_0, v_0) - \varphi(u_1, v_1).$$

Da auch umgekehrt aus der Erhaltung der Umwege die Erhaltung der Umfänge der Dreieckmaschen folgt, haben wir

Satz 4. *Die in bezug auf die Dreieckmaschen längentreuen Deformationen sind identisch mit den Deformationen, bei denen alle Umwege im Sechseckgewebe ungeändert bleiben.*

9. *Längentreue Deformationen bezüglich der Sechseckmaschen.*

Für die bezüglich der Sechseckmaschen längentreuen Deformationen ergibt sich aus (6) durch Nullsetzen der Faktoren von h, h^3 und h^5 nach einfachen Umformungen

$$\bar{e} + \bar{f} + \bar{g} = 0, \qquad \bar{e}_{vv} + \bar{g}_{uu} - 2(\bar{e}_{uv} + \bar{g}_{uv}) = 0,$$

$$4(\bar{e}_{vvvv} + \bar{g}_{uuuu}) - 6(\bar{e}_{uuuv} + \bar{g}_{uvvv}) + 9(\bar{e}_{uuvv} + \bar{g}_{uuvv}) - 11(\bar{e}_{uvvv} + \bar{g}_{uuuv}) = 0. \tag{13}$$

Durch nochmalige Ableitung der beiden ersten Gleichungen und Elimination von $\bar{f}$ kommt

$$\bar{e}_{vvvv} - 2\bar{e}_{uvvv} - \bar{e}_{uuvv} + 2\bar{e}_{uuuv} = 0,$$

$$\bar{g}_{uuuu} - 2\bar{g}_{uuuv} - \bar{g}_{uuvv} + 2\bar{g}_{uvvv} = 0.$$

Das allgemeine Integral

$$\bar{e} = -\varphi_3(-u-v) + \varphi_4(u+2v) - \varphi_6(u-v) + \varphi_1(u),$$

$$\bar{g} = -\varphi_5(-2u-v) + \varphi_7(-u-v) - \varphi_2(v) + \varphi_8(u-v)$$

spezialisiert sich wegen der zweiten Bedingung (13) mit

$$\varphi_3 \equiv \varphi_7, \qquad \varphi_6 \equiv \varphi_8.$$

Wir erhalten somit, indem wir $w = -(u+v)$ benutzen, als allgemeine Lösung von (13):

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{e} &= \varphi_1(u) - \varphi_3(w) + \varphi_4(v-w) - \varphi_6(u-v), \\ \bar{f} &= \varphi_2(v) - \varphi_1(u) + \varphi_5(w-u) - \varphi_4(v-w), \\ \bar{g} &= \varphi_3(w) - \varphi_2(v) + \varphi_6(u-v) - \varphi_5(w-u). \end{aligned}} \tag{14}$$

Da (14), für e, f, g eingesetzt, die rechte Seite von (3) zum Verschwinden bringt, haben wir

Satz 5. *Die in bezug auf die Sechseckmaschen längentreuen Deformationen sind durch* (14) *mit den sechs willkürlichen Funktionen* $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(w)$, $\varphi_4(v-w)$, $\varphi_5(w-u)$, $\varphi_6(u-v)$ *gekennzeichnet.*

Da hier keine willkürliche Funktion von zwei Veränderlichen in die Lösung eingeht, läßt sich ein Sechseckgewebe bei Erhaltung der Umfänge der Sechseckmaschen nur auf spezielle Trägerflächen deformieren. Die Forderung der Längentreue bezüglich der Sechseckmaschen ist also stärker als die entsprechende Forderung bezüglich der Viereckmaschen einer Art oder der Dreieckmaschen; denn in Nr. 6 und Nr. 7 konnten die Gewebe auf jede beliebige Fläche als Trägerfläche längentreu deformiert werden.

Neben den Sechseckmaschen führen wir jetzt noch die *Sechseckkreuze* ein, die von je drei diagonalen Gewebekurven der Sechseckmaschen gebildet werden, und die *Sechsecksterne*, die aus den Sechseckmaschen durch Verlängerung der Maschenseiten entstehen; vgl. in Fig. 6 links das gestrichelte

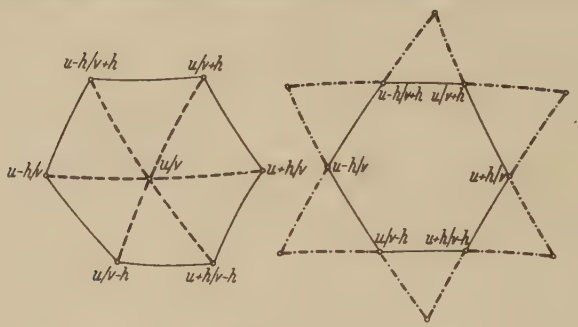


Fig. 6.

Sechseckkreuz und rechts den strichpunktierten Sechseckstern. Wir bezeichnen mit $K(u, v, h)$ bzw. $J(u, v, h)$ die Gesamtlänge des Sechseckkreuzes bzw. Sechsecksterns, die zur Sechseckmasche mit dem Umfang $S(u, v, h)$ gehören. Für $K(u, v, h)$ gilt die zu (6) analoge Entwicklung

$$(15)\qquad K = 2h(\bar{e} + \bar{f} + \bar{g}) + \frac{h^3}{3}(\bar{e}_{uu} + \bar{g}_{vv} + \bar{f}_{uu} - 2\bar{f}_{uv} + \bar{f}_{vv}) + \frac{h^5}{60}(\bar{e}_{uuuu} + \bar{g}_{vvvv} + \bar{f}_{uuuu} - 4\bar{f}_{uuuv} + 6\bar{f}_{uuvv} - 4\bar{f}_{uvvv} + \bar{f}_{vvvv}) + \ldots.$$

Die Forderung, daß eine Deformation die Längen K ungeändert läßt, oder, wie wir wieder sagen wollen, *längentreu bezüglich der Sechseckkreuze* ist, führt nach einer einfachen Umrechnung wieder zu den Bedingungen (13) und dasselbe stellt sich für die Längen J der Sechsecksterne heraus. Infolgedessen gilt

Satz 6. *Jede der drei Eigenschaften einer Deformation*: a) *Längentreue bezüglich der Sechseckmaschen*, b) *Längentreue bezüglich der Sechseckkreuze*, c) *Längentreue bezüglich der Sechsecksterne zieht die beiden anderen notwendig nach sich* (vgl. Satz 19).

10. *Spezielle längentreue Deformationen bezüglich der Sechseckmaschen.* a) Längentreue bezüglich der Sechseckmaschen und Dreieckmaschen.

Aus (11) und (13) folgt

$$(16)\quad \bar{e} + \bar{f} + \bar{g} = 0, \quad \bar{e}_v + \bar{g}_u = 0, \quad \bar{e}_{vv} + \bar{g}_{uu} - 2(\bar{e}_{uv} + \bar{g}_{uv}) = 0$$

mit dem allgemeinen Integral

$$(17)\quad \boxed{\bar{e} = \varphi_1(u) - \varphi_3(w), \quad \bar{f} = \varphi_2(v) - \varphi_1(u), \quad \bar{g} = \varphi_3(w) - \varphi_2(v).}$$

17) ergibt sich als Sonderfall aus (14) durch Konstantsetzen der willkürlichen Funktionen $\varphi_4(v-w)$, $\varphi_5(w-u)$, $\varphi_6(u-v)$.

b) Längentreue bezüglich der Dreierhaken.

Jedes Sechseckkreuz von der Länge $K(u, v, h)$ wird zerlegt in einen *Dreierhaken* 1. *Art* von der Länge $P(u, v, h)$ (in Fig. 7 gestrichelt) und in einen *Dreierhaken* 2. *Art* von der Länge $Q(u, v, h)$ (in Fig. 7 strichpunktiert). Die Forderung der Längentreue bezüglich der Sechseckkreuze, die nach Nr. 9 mit der Forderung der Längentreue bezüglich der Sechseckmaschen gleichwertig ist, ersetzen wir durch die stärkere Forderung, daß die Deformation *bezüglich der Dreierhaken beider Arten längentreu* sei, d. h. daß die Längen $P(u, v, h)$ und $Q(u, v, h)$ für sich ungeändert bleiben sollen. Wir erhalten dafür die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

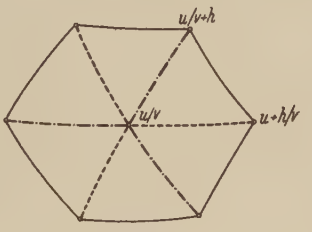


Fig. 7.

(18) $\bar{e}+\bar{f}+\bar{g}=0,\ 2(\bar{e}_u-\bar{g}_v)-(\bar{e}_v-\bar{g}_u)=0,\ \bar{e}_{vv}+\bar{g}_{uu}-2(\bar{e}_{uv}+\bar{g}_{uv})=0$

mit dem allgemeinen Integral

(19) $$\boxed{\bar{e}=\varphi_4(v-w)-\varphi_6(u-v),\ \bar{f}=\varphi_5(w-u)-\varphi_4(v-w),\ \bar{g}=\varphi_6(u-v)-\varphi_5(w-u).}$$

(19) ergibt sich als Sonderfall aus (14) durch Konstantsetzen der willkürlichen Funktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(w)$.

§ 3.

Längenhomogene Sechseckgewebe.

11. *Notwendige und hinreichende Bedingungen der Längenhomogenität.*

Wir wenden uns nun zur Frage (B) nach den allgemeinsten längenhomogenen Sechseckgeweben, d. h. zur Bestimmung aller Sechseckgewebe bei denen stets äquivalente Viereckmaschen einer Art oder äquivalente Dreieckmaschen oder äquivalente Sechseckmaschen denselben Umfang haben. Mit anderen Worten: Die Funktionen e, f, g sind so zu wählen, daß in (1), (2), (3) die Umfänge U bzw. D, T bzw. S nur noch von der Maschenweite h, aber nicht mehr vom Ort u/v abhängen. Zu diesem Zweck müssen in (4), (5), (6) die Faktoren der Potenzen von h konstant gesetzt werden. Wir kommen daher für e, f, g zu den nämlichen notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die wir in (8) bzw. (11) bzw. (13) für die Deformationsfunktionen $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ erhalten haben, mit dem Unterschiede, daß auf den rechten Seiten von (8), (11), (13) statt Null irgendwelche Konstanten stehen, d. h. an Stelle der homogenen Gleichungen (8), (11), (13) treten inhomogene Gleichungen. Wir bezeichnen diese Gleichungen fortan mit (8*), (11*), (13*).

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichungen (8*), (11*), (13*) ergibt sich aus einer speziellen Lösung durch Hinzufügen des allgemeinen Integrals des homogenen Systems (8), (11), (13). Da wir das allgemeine Integral des homogenen Systems nach § 2 als längentreue Deformationen deuten können, vereinfacht sich unsere Aufgabe (B) folgendermaßen:

Für die inhomogenen Gleichungssysteme (8*), (11*), (13*) braucht jeweils nur ein partikuläres Integral ermittelt zu werden. Aus den durch diese partikulären Integrale bestimmten Sechseckgeweben ergeben sich die sämtlichen gesuchten längenhomogenen Sechseckgewebe durch Ausübung der längentreuen Gewebedeformationen (8), (11) bzw. (13).

Auf den rechten Seiten der Gleichungen (8*) und (11*) bzw. (13*) kommen zwei bzw. drei Konstante vor. Die erste dieser Konstanten, d. h. die Konstante C in

(8*): $\bar{e} + \bar{g} = C$ bzw. (11*), (13*): $\bar{e} + \bar{f} + \bar{g} = C$

ist notwendig positiv und kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 2 bzw. 3 gesetzt werden; denn die Parametersubstitution

$$u = \varrho u', \quad v = \varrho v' \; (\varrho > 0)$$

führt e, f, g in ϱe, ϱf, ϱg, also C in C/ϱ über, so daß durch $\varrho = C/2$ bzw. $\varrho = C/3$ die verlangte Normierung erzwungen werden kann.

Die nach Normierung von C in (8*) und (11*) bzw. (13*) noch übrigbleibenden 1 bzw. 2 Konstanten kennzeichnen metrische Gewebeeigenschaften, die bei den längentreuen Deformationen (8), (11), (13) erhalten bleiben, und werden im folgenden kurz als die *Invarianten* der betreffenden längenhomogenen Sechseckgewebe bezeichnet.

Ebenso wie in § 2 die Forderung der Längentreue bezüglich der Viereckmaschen usf. gleichwertig war mit der Forderung der Längentreue bezüglich der Viereckkreuze usf., gilt hier

Satz 7. *Es sind gleichwertig* a) *die Längenhomogenität bezüglich der Viereckmaschen einer Art und die Längenhomogenität bezüglich der Viereckkreuze derselben Art,* b) *die Längenhomogenität bezüglich der Dreieckmaschen einer Art und die Längenhomogenität bezüglich der Dreieckmaschen der anderen Art,* c) *die Längenhomogenität bezüglich der Sechseckmaschen, die Längenhomogenität bezüglich der Sechseckkreuze und die Längenhomogenität bezüglich der Sechsecksterne.*

Außerdem folgt aus der Definition der längenhomogenen Sechseckgewebe und aus Nr. 1 unmittelbar

Satz 8. *Jedes längenhomogene Sechseckgewebe wird durch die längentreuen Deformationen einer zweiparametrigen kontinuierlichen Gruppe*[4]) *in sich transformiert. Die Gruppe besteht aus den Gewebeverschiebungen, die sich aus den Parallelverschiebungen des Bildgebiets ergeben, sowie aus den Deformationen, denen im Bildgebiet die Drehungen um Vielfache von $\pi/3$ und die Spiegelungen bzw. Gleitspiegelungen an den Winkelhalbierenden irgend zweier Bildgeraden oder an den Bildgeraden selbst entsprechen.*

Wir betrachten jetzt der Reihe nach die einzelnen Maschentypen.

12. *Längenhomogene Sechseckgewebe bezüglich der Viereckmaschen.*

Wie in Nr. 6 handelt es sich wieder ausschließlich um die Viereckmaschen 3. Art. Die durch Inhomogenmachen von (8) folgenden Bedingungen

$$e + g = 2, \quad 2(e_{uu} + g_{vv}) + 3(e_{vv} + g_{uu} + e_{uv} + g_{uv}) = 6a \tag{8*}$$

lassen das spezielle Integral

$$\boxed{e = 1 - 3au^2, \qquad g = 1 + 3au^2} \tag{20}$$

zu. Durch Einsetzen in (4) und (10) erhält man die Gleichungen

$$\boxed{U(h) = 4h + ah^3, \qquad L(h) = 4h - 2ah^3,} \tag{21}$$

die natürlich nicht nur für das spezielle Integral (20) gelten, sondern auch nach Hinzufügen des allgemeinen Integrals (9) bestehen bleiben. Durch Elimination von h ergibt sich

$$\boxed{\frac{U(h) - L(h)}{[2U(h) + L(h)]^3} = \text{const} = \frac{a}{576}.} \tag{22}$$

Wir fassen zusammen in

Satz 9. *Jedes in bezug auf die Viereckmaschen 3. Art längenhomogene Sechseckgewebe läßt sich durch eine längentreue Deformation* (9) *in ein Sechseckgewebe* (20) *überführen. Der Umfang $U(h)$ der Viereckmaschen und die Länge $L(h)$ der Viereckkreuze sind Polynome 3. Grades der Maschenweite h. Die Invariante a ist nach* (22) *durch eine Viereckmasche und ein Viereckkreuz gleicher Maschenweite bestimmt. Die Gewebe mit $a = 0$, also $U(h) = L(h)$, sind mittels einer längentreuen Deformation* (9) *in drei Parallelenbüschel transformierbar.*

13. *Längenhomogene Sechseckgewebe bezüglich der Dreieckmaschen.*

Die sich gegenseitig bedingenden Forderungen konstanter Umfänge D bzw. T äquivalenter Dreieckmaschen 1. bzw. 2. Art führen auf

$$e + f + g = 3, \quad e_v + g_u = -2c \tag{11*}$$

[4]) Strenggenommen handelt es sich nur um einen „Gruppenkeim"; vgl. hierzu etwa Blaschke-Bol, Geometrie der Gewebe, S. 65.

mit dem speziellen Integral

$$(23) \qquad \boxed{e = 1 + 2cu, \quad g = 1 - 2cu, \quad f = 0.}$$

Durch Einsetzen in (5) folgt

$$(24) \qquad \boxed{D(h) = 3h + ch^2, \qquad T(h) = 3h - ch^2.}$$

Die Elimination von h liefert

$$(25) \qquad \boxed{\frac{D(h) - T(h)}{[D(h) + T(h)]^2} = \text{const} = \frac{c}{18}.}$$

Wir fassen zusammen in

Satz 10. *Jedes bezüglich der Dreieckmaschen längenhomogene Sechseckgewebe läßt sich durch eine längentreue Deformation* (12) *in ein Sechseckgewebe* (23) *überführen. Die Umfänge $D(h)$ und $T(h)$ der Dreieckmaschen sind Polynome 2. Grades der Maschenweite h. Die Invariante c ist nach* (25) *durch je eine Dreieckmasche 1. und 2. Art gleicher Maschenweite bestimmt. Die Gewebe mit $c = 0$, also $D(h) = T(h)$, sind mittels einer längentreuen Deformation* (12) *in drei Parallelgeradenbüschel transformierbar.*

14. *Dreifach umweglose Sechseckgewebe.*

Die bezüglich der Dreieckmaschen längenhomogenen Sechseckgewebe mit $c = 0$ stehen in engem Zusammenhang mit den schon mehrfach [5]) untersuchten *umweglosen Kurvennetzen.*

Wir knüpfen an unsere Ausführungen in Nr. 8 an, betrachten jetzt aber immer nur solche Gewebewege, die aus Bögen von Gewebekurven zweier Scharen zusammengesetzt sind, und sprechen dann von *u, v- bzw. v, w- bzw. w, u-Gewebewegen.* Eine einfache Rechnung zeigt, daß das Verschwinden der Invarianten $c = -\frac{1}{2}(e_v + g_u)$ und das Verschwinden der Umwege aller u, v-Gewebewege sich gegenseitig bedingen. Da aber in Nr. 13 alle drei Gewebekurvenscharen gleichberechtigt sind, gilt dasselbe für die v, w- und w, u-Gewebewege und man erhält

Satz 11. *Die in bezug auf die Dreieckmaschen längenhomogenen Sechseckgewebe mit $c = 0$ sind identisch mit den „dreifach umweglosen" Sechseckgeweben, bei denen alle Umwege der u, v- und ebenso alle Umwege der v, w- sowie alle Umwege der w, u-Gewebewege verschwinden.*

---

[5]) Vgl. besonders G. Scheffers, Leipziger Berichte **57** (1905); Jahresber. d. DMV. **16** (1907); ferner R. Rothe, Berichte der Berliner Math. Ges. **5** (1906); **7** (1908); Jahresber. d. DMV. **17** (1908); **18** (1909); **20** (1911) und R. v. Lilienthal, Jahresber. d. DMV. **16** (1907).

Ferner kann jedes umweglose u, v-Kurvennetz [6]) durch eine Tschebytscheff-Transformation mit $f = 3 - e - g$ (vgl. Nr. 6), bei der die Längen auf allen Netzkurven ungeändert bleiben, in die Kurvenscharen $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ eines bezüglich der Dreieckmaschen längenhomogenen Sechseckgewebes mit $c = 0$ und demnach auch durch eine Deformation (12) in zwei Parallelgeradenbüschel transformiert werden. Auf diese Weise ordnen sich die Untersuchungen über umweglose Kurvennetze als Sonderfall dem Studium der Sechseckgewebe unter, die bezüglich der Dreieckmaschen längenhomogen sind.

15. *Längenhomogene Sechseckgewebe bezüglich der Sechseckmaschen.*

Das den homogenen Gleichungen (13) entsprechende inhomogene System

$$e + f + g = 3, \qquad e_{vv} + g_{uu} - 2\,(e_{uv} + g_{uv}) = 3\,a,$$

$$(13^*)\quad 4\,(e_{vvvv} + g_{uuuu}) - 6\,(e_{uuuv} + g_{uvvv}) + 9\,(e_{uuvv} + g_{uuvv}) - 11\,(e_{uvvv} + g_{uuuv}) = 60\,b$$

hat das spezielle Integral

$$(26)\quad \boxed{\begin{aligned} &e = 1 + \frac{3a}{32}(u-2v)^2 + \frac{5b}{24}(u-2v)^4,\ g = 1 + \frac{3a}{20}(u-2v)^2 - \frac{b}{3}(u-2v)^4, \\ &f = 1 - \frac{39a}{160}(u-2v)^2 + \frac{b}{8}(u-2v)^4. \end{aligned}}$$

Durch Einsetzen in (6) und (15) sowie durch die entsprechende Rechnung für die Längen J der Sechsecksterne erhält man

$$(27)\quad \boxed{S(h) = 6h + 2ah^3 + bh^5,\ K(h) = 6h - ah^3 + bh^5,\ J(h) = 12h - 2ah^3 - 28bh^5,}$$

woraus durch Elimination von h

$$(28)\quad \boxed{\frac{S(h) - K(h)}{[10S(h) + 18K(h) + J(h)]^3} = \text{const} = \frac{3a}{180^3},\ \frac{2K(h) - J(h)}{[10S(h) + 18K(h) + J(h)]^5} = \text{const} = \frac{30b}{180^5}}$$

folgt. Wir fassen zusammen in

Satz 12. *Jedes bezüglich der Sechseckmaschen längenhomogene Sechseckgewebe läßt sich durch eine längentreue Deformation* (14) *in ein Sechseckgewebe* (26) *überführen. Die Umfänge $S(h)$ der Sechseckmaschen sowie die Längen $K(h)$ und $J(h)$ der Sechseckkreuze und Sechsecksterne sind Polynome 5. Grades der Maschenweite h. Die Invarianten a, b sind nach* (28) *durch eine Sechseckmasche, ein Sechseckkreuz und einen Sechseckstern gleicher Maschenweite bestimmt. Die Gewebe mit $a = b = 0$, also $S(h) = K(h) = \frac{1}{2} J(h)$, sind mittels einer längentreuen Deformation* (14) *in drei Parallelgeradenbüschel transformierbar.*

[6]) Wie ein Kurvengewebe als topologisches Bild von drei Parallelgeradenbüscheln, ist ein „Kurvennetz" als topologisches Bild von zwei Parallelgeradenbüscheln definiert.

16. *Spezielle längenhomogene Sechseckgewebe bezüglich der Sechseckmaschen.*

a) Längenhomogene Sechseckgewebe bezüglich der Sechseckmaschen und Dreieckmaschen.

Statt (16) haben wir jetzt

$$(16^*) \quad e + f + g = 3, \quad e_v + g_u = -2c, \quad e_{vv} + g_{uu} - 2(e_{uv} + g_{uv}) = 3a$$

mit der speziellen Lösung

$$(29) \quad \boxed{\begin{gathered} e = 1 + c(u-v) + \frac{a}{4}(u-v)^2, \qquad f = 1 - \frac{a}{2}(u-v)^2, \\ g = 1 - c(u-v) + \frac{a}{4}(u-v)^2. \end{gathered}}$$

Für $S(h)$, $D(h)$ und $T(h)$ folgt

$$(30) \quad \boxed{S(h) = 6h + 2ah^3, \qquad D(h) = 3h + ch^2, \qquad T(h) = 3h - ch^2.}$$

Die beiden Invarianten a, c bestimmen sich aus

$$(31) \quad \boxed{\frac{D(h) - T(h)}{[D(h) + T(h)]^2} = \text{const} = \frac{c}{18}, \quad \frac{S(h) - D(h) - T(h)}{[D(h) + T(h)]^3} = \text{const} = \frac{a}{108}.}$$

b) Längenhomogene Sechseckgewebe bezüglich der Dreierhaken.

Aus den (18) entsprechenden Bedingungen

$$(18^*) \quad e + f + g = 3, \quad 2(e_u - g_v) - (e_v - g_u) = 2k,$$
$$e_{vv} + g_{uu} - 2(e_{uv} + g_{uv}) = 3a$$

erhält man als spezielles Integral

$$(32) \quad \boxed{e = 1 + ku - \frac{3}{4}au^2, \quad f = 1 - ku - \frac{3}{4}au^2, \quad g = 1 + \frac{3}{2}au^2.}$$

Daraus folgt für die Umfänge $P(h)$ und $Q(h)$ der Dreierhaken beider Arten und die Umfänge $S(h)$ der Sechseckmaschen

$$(33) \quad \boxed{P(h) = 3h + kh^2 - \frac{a}{2}h^3, \; Q(h) = 3h - kh^2 - \frac{a}{2}h^3, \; S(h) = 6h + 2ah^3}$$

und zur Bestimmung der beiden Invarianten a, k

$$(34) \quad \boxed{\frac{P(h) - Q(h)}{[S(h) + 2P(h) + 2Q(h)]^2} = \text{const} = \frac{2k}{18^2}, \quad \frac{S(h) - P(h) - Q(h)}{[S(h) + 2P(h) + 2Q(h)]^3} = \text{const} = \frac{3a}{18^3}.}$$

17. *Drehsymmetrische Normierung der längenhomogenen Sechseckgewebe.*

Wir bezeichnen ein Sechseckgewebe als *Drehgewebe*, wenn die Trägerfläche in eine Drehfläche verbogen werden kann derart, daß dabei jede der drei

Gewebekurvenscharen entweder in die Breitenkreise oder in kongruente, durch Drehung auseinander entstehende Kurven übergeht. Nun läßt sich bekanntlich jede Fläche, bei der die Funktionen E, F, G und damit auch e, f, g (Nr. 4) nur von einer einzigen Veränderlichen $\alpha u + \beta v$ (α, β = const) abhängen, in eine Drehfläche verbiegen; die Kurven $\alpha u + \beta v$ = const sind die Breitenkreise der Drehfläche, während die Kurven jeder Schar $\gamma u + \delta v$ = const mit $\gamma : \delta \neq \alpha : \beta$ kongruent sind und durch Drehung miteinander zur Deckung gebracht werden können.

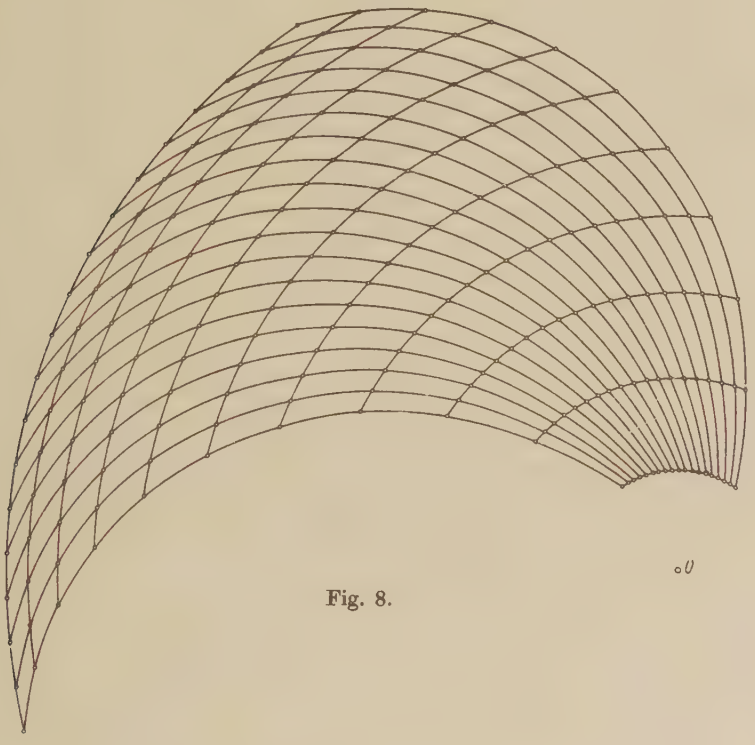


Fig. 8.

Da die Funktionen e, f, g in (20), (23) und (32) nur von u, in (26) nur von $u - 2v$ und in (29) nur von $u - v$ abhängen, sind alle durch diese e, f, g bestimmten Sechseckgewebe [7]) Drehgewebe. Somit haben wir

Satz 13. *Jedes längenhomogene Sechseckgewebe läßt sich durch eine längentreue Deformation als Drehgewebe normieren.*

---

[7]) Zu (20) ist f als willkürliche Funktion von u hinzuzunehmen.

Wegen Satz 8 gibt es nicht nur eine solche auf Drehgewebe normierende längentreue Deformation, sondern eine zweiparametrige kontinuierliche Gruppe derartiger Deformationen.

Bei Nr. 12 und 13 bleibt für die Normierung auf Drehgewebe jeweils eine Funktion $f(u)$ bzw. $\varphi(u)$ willkürlich; deshalb können in diesen Fällen die Sechseckgewebe als Drehgewebe auf einer beliebigen Drehfläche als Trägerfläche, also z. B. insbesondere als ebene Drehgewebe normiert werden.

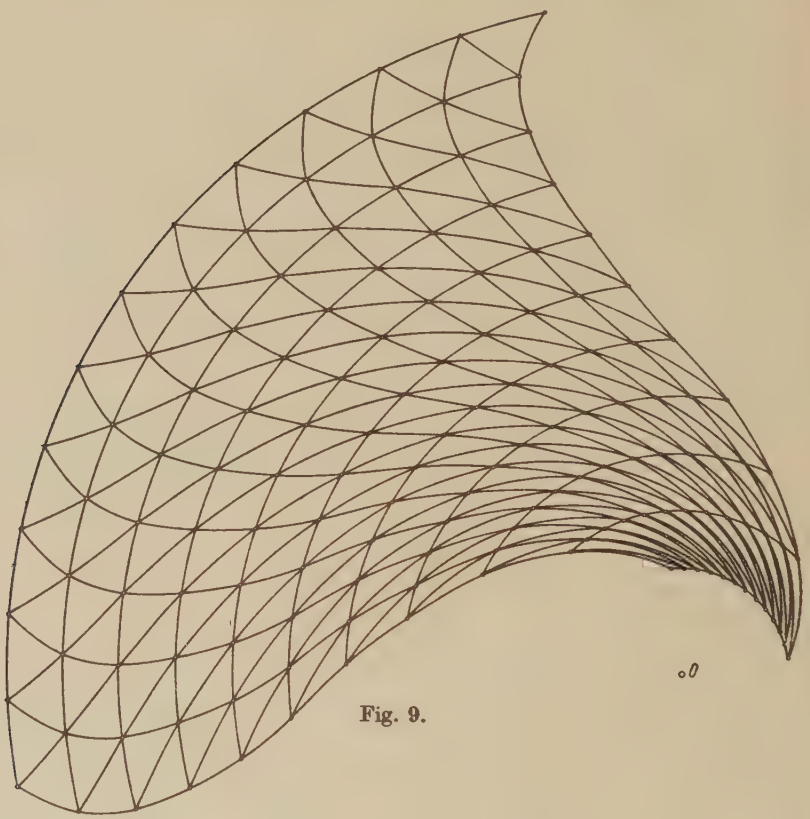


Fig. 9.

Die Fig. 8 und 9 beziehen sich auf solche ebene Drehgewebe. In Fig. 8 ist ein bezüglich der Viereckmaschen einer Art längenhomogenes ebenes Sechseckgewebe durch ein aus Viereckmaschen dieser Art aufgebautes Viereckesnetz, in Fig. 9 ein bezüglich der Dreieckmaschen längenhomogenes ebenes Sechseckgewebe durch ein Dreiecksnetz dargestellt. Das Drehzentrum ist mit O bezeichnet. Die Invariante a bzw. c ist von Null verschieden, man hat also $U(h) \neq L(h)$ bzw. $D(h) \neq T(h)$.

§ 4.

Längentreue und Längenhomogenität bei Dreiecksnetzen.

18. *Definition der Längentreue und Längenhomogenität für Dreiecksnetze.* Unser Ziel ist es, die in den §§ 2, 3 durchgeführten Untersuchungen, die die Differentialgeometrie der Sechseckgewebe betrafen, durch analoge Beziehungen in der Differenzengeometrie der Dreiecksnetze zu verdeutlichen. An Stelle der Menge aller Gewebemaschen mit kontinuierlich veränderlichen Parametern u, v, h betrachten wir also fortan lediglich ein aus dem Gewebe herausgegriffenes Dreiecksnetz (Fig. 3), d. h. u, v, h sind nur noch der diskreten Werte

$$u = u_0 \pm \varrho h_0, \quad v = v_0 \pm \sigma h_0 \ (\varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots), \quad h = h_0,\ 2h_0,\ 3h_0,\ \ldots$$

fähig. Wir setzen die Grundmaschenweite h_0 als so klein voraus, daß in dem Dreiecksnetzgebiet für jedes m, das wir gerade betrachten, noch Maschen der Maschenweite mh_0 existieren.

Für die Ecken $u_0 + \varrho h_0 / v_0 + \sigma h_0$ werden wir im folgenden kurz ϱ/σ und für den Umfang $U(u_0 + \varrho h_0, v_0 + \sigma h_0, mh_0)$ einer Viereckmasche 3. Art mit einer Ecke $u = u_0 + \varrho h_0 / v = v_0 + \sigma h_0$ (vgl. Fig. 1) und der Maschenweite $h = mh_0$ kurz $U_{\varrho\sigma}(m)$ schreiben; in entsprechender Bedeutung gebrauchen wir $L_{\varrho\sigma}(m)$, $S_{\varrho\sigma}(m)$ usf.

Der Umstand, daß das Dreiecksnetz einem Sechseckgewebe entnommen ist, hat für die nachfolgenden Untersuchungen keine Bedeutung; wir dürfen daher das Dreiecksnetz als unmittelbar mit willkürlichen Seitenlängen vorgegeben betrachten, wenn nur die Anordnung der Dreieckmaschen dieselbe ist wie in Fig. 3.

Ebenso wie in Nr. 2 handelt es sich auch hier durchwegs nur um Fragen der Metrik im Dreiecksnetz, d. h. um Längen auf den das Dreiecksnetz erzeugenden Kurven, nicht aber um die Einbettung des Dreiecksnetzes in den dreidimensionalen Raum. Dreiecksnetze sollen daher als nichtverschieden gelten, wenn sie durch eine isometrische Abbildung ineinander übergeführt werden können, d. h. wenn sie in den Längen aller Maschenseiten übereinstimmen; insbesondere ist es für unsere Untersuchungen ohne Belang, ob wir uns die Kurven des Dreiecksnetzes als gekrümmt oder etwa als Streckenzüge vorstellen.

Wir definieren nun für Dreiecksnetze *längentreue Deformationen* und *Längenhomogenität* ebenso wie in § 1 und gebrauchen diese Begriffe wieder bezüglich der Viereckmaschen, Dreieckmaschen und Sechseckmaschen sowie der Viereckkreuze, Sechseckkreuze und Sechsecksterne. Während aber in den §§ 2, 3 Längentreue und Längenhomogenität sich immer schlechthin auf jede beliebige Maschenweite h bezogen, sollen sie sich jetzt stets nur auf eine bestimmte Maschenweite mh_0 beziehen.

Im folgenden werden die längentreuen Deformationen und die längenhomogenen Dreiecksnetze der Reihe nach für die einzelnen Maschentypen behandelt.

19. *Längentreue und Längenhomogenität bezüglich der Viereckmaschen.* Für die Umfänge der Viereckmaschen und die Längen der Viereckkreuze gilt

$$(35)\qquad \left.\begin{aligned} U_{00}(m) &= \Sigma\, \alpha_{\varrho\sigma} U_{\varrho\sigma}(1) - \Sigma\, \bar{\alpha}_{\varrho\sigma} L_{\varrho\sigma}(1) \\ L_{00}(m) &= \Sigma\, \beta_{\varrho\sigma} L_{\varrho\sigma}(1) - \Sigma\, \bar{\beta}_{\varrho\sigma} U_{\varrho\sigma}(1) \end{aligned}\right\} \text{ mit } m = 2, 3, \ldots,$$

d. h.: Der Umfang jeder beliebig weiten Viereckmasche und ebenso die Länge jedes beliebig weiten Viereckkreuzes läßt sich linear zusammensetzen aus den Umfängen von Viereckmaschen und den Längen von Viereckkreuzen der Grundmaschenweite h_0, wobei die Koeffizienten $\alpha_{\varrho\sigma}$, $\beta_{\varrho\sigma}$ usf. von den Längen der Seiten des Dreiecksnetzes unabhängige Zahlen sind.

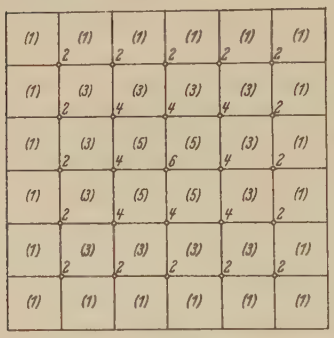


Fig. 10.

Der Kürze wegen geben wir den Beweis nur für (35_1) an: Die erste Summe in (35_1) erstreckt sich auf die m^2 Viereckmaschen, die zweite Summe auf die $(m-1)^2$ Viereckkreuze der Grundmaschenweite h_0 im Innern der großen Viereckmasche mit dem Umfang $U_{00}(m)$. Die Koeffizienten $\alpha_{\varrho\sigma}$ sind in der schematischen Fig. 10 eingeklammert in die einzelnen Maschen eingetragen, die Koeffizienten $\bar{\alpha}_{\varrho\sigma}$ stehen neben den Mittelpunkten der betreffenden Viereckkreuze. An Hand der Fig. 10 überzeugt man sich leicht, daß in der Differenz der beiden Summen alle Maschenseiten sich gegenseitig herausheben mit Ausnahme der den Umfang $U_{00}(m)$ erzeugenden Seiten.

Aus (35) folgt unmittelbar

Satz 14. *Wenn man Längentreue (bzw. Längenhomogenität) zunächst nur für die Maschenweite h_0, aber gleichzeitig bezüglich der Viereckmaschen und Viereckkreuze einer Art fordert, so folgt daraus Längentreue (bzw. Längenhomogenität) bezüglich der Viereckmaschen und Viereckkreuze derselben Art auch für jede größere Maschenweite $2h_0$, $3h_0$, …, mh_0.*

Ferner erhält man durch ähnliche Abzählungen wie bei (35) die Linearkombinationen

$$(36)\qquad \begin{aligned} U_{00}(m) &= \Sigma\, a_{\varrho\sigma} U_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma\, \bar{a}_{\varrho\sigma} U_{\varrho\sigma}(2) \quad \text{mit } m = 3, 4, \ldots, \\ L_{00}(m) &= \Sigma\, b_{\varrho\sigma} U_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma\, \bar{b}_{\varrho\sigma} U_{\varrho\sigma}(2) \quad \text{mit } m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

und damit

Satz 15. *Wenn man Längentreue (bzw. Längenhomogenität) zunächst nur bezüglich der Viereckmaschen einer Art, aber gleichzeitig für die Maschen-*

weiten h_0 und $2h_0$ fordert, so folgt daraus Längentreue (bzw. Längenhomogenität) sowohl bezüglich der Viereckmaschen als auch bezüglich der Viereckkreuze derselben Art für alle Maschenweiten $h_0, 2h_0, \ldots, mh_0$.

Wenn man durch den Grenzprozeß $h_0 \to 0$ von der Differenzengeometrie zur Differentialgeometrie zurückkehrt, so geht Satz 15 in die in Satz 2 enthaltene Aussage über: Die Längentreue bezüglich der Viereckmaschen eines Sechseckgewebes hat die Längentreue auch bezüglich der Viereckkreuze zur notwendigen Folge.

20. *Längentreue und Längenhomogenität bezüglich der Dreieckmaschen.*

Die Beziehungen

$$(37)\qquad \left.\begin{aligned} D_{00}(m) &= \Sigma D_{\varrho\sigma}(1) - \Sigma T_{\varrho\sigma}(1) \\ T_{00}(m) &= \Sigma T_{\varrho\sigma}(1) - \Sigma D_{\varrho\sigma}(1) \end{aligned}\right\} \text{ mit } m = 2, 3, \ldots,$$

die man sich leicht an Hand der Fig. 3 zurechtlegen kann, liefern

Satz 16. *Wenn man Längentreue (bzw. Längenhomogenität) zunächst nur für die Maschenweite h_0, aber gleichzeitig bezüglich der Dreieckmaschen beider Arten fordert, so folgt daraus Längentreue (bzw. Längenhomogenität) bezüglich der Dreieckmaschen beider Arten auch für jede größere Maschenweite $2h_0, 3h_0, \ldots, mh_0$.*

Ebenso ergibt sich aus

$$(38)\qquad \begin{aligned} D_{00}(m) &= \Sigma p_{\varrho\sigma} D_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{p}_{\varrho\sigma} D_{\varrho\sigma}(2) \qquad \text{mit } m = 3, 4, \ldots, \\ T_{00}(m) &= \Sigma q_{\varrho\sigma} D_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{q}_{\varrho\sigma} D_{\varrho\sigma}(2) \qquad \text{mit } m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Satz 17. *Wenn man Längentreue (bzw. Längenhomogenität) zunächst nur bezüglich der Dreieckmaschen einer Art, aber gleichzeitig für die Maschenweiten h_0 und $2h_0$ fordert, so folgt daraus Längentreue (bzw. Längenhomogenität) bezüglich der Dreieckmaschen beider Arten für alle Maschenweiten $h_0, 2h_0, \ldots, mh_0$.*

Mit $h_0 \to 0$ geht Satz 17 in den zweiten Teil des Satzes 3 über.

Auch die Ergebnisse über Erhaltung der Umwege (Nr. 8) und über Umweglosigkeit (Nr. 14) lassen sich auf Dreiecksnetze übertragen, wir verzichten jedoch darauf, dies näher auszuführen.

21. *Längentreue und Längenhomogenität bezüglich der Sechseckmaschen.*

Für die Umfänge der Sechseckmaschen und die Längen der Sechseckkreuze und Sechsecksterne gelten die Linearkombinationen

$$(39)\qquad \left.\begin{aligned} S_{00}(m) &= \Sigma \gamma_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{\gamma}_{\varrho\sigma} K_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{\bar{\gamma}}_{\varrho\sigma} J_{\varrho\sigma}(1) \\ K_{00}(m) &= \Sigma \delta_{\varrho\sigma} K_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{\delta}_{\varrho\sigma} J_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{\bar{\delta}}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(1) \\ J_{00}(m) &= \Sigma \varepsilon_{\varrho\sigma} J_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{\varepsilon}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(1) + \Sigma \bar{\bar{\varepsilon}}_{\varrho\sigma} K_{\varrho\sigma}(1) \end{aligned}\right\} \text{mit } m = 2, 3, \ldots.$$

Der Kürze halber geben wir den Beweis nur für (39_1) an:

Wir benutzen die Rekursionsformel

$$(40)\qquad S_{0\,0}(m)+S_{0\,0}(m-6)=\sum_{1}^{6}\{S_{\varrho\,\sigma}(m-1)+S_{\varrho\,\sigma}(m-5)\}$$
$$-3\{S_{0\,0}(m-2)+S_{0\,0}(m-4)\}-\sum_{1}^{12}\{S_{\lambda\,\mu}(m-2)+S_{\lambda\,\mu}(m-4)\}$$
$$-\sum_{1}^{13}\delta_{\varkappa\,\tau}S_{\varkappa\,\tau}(m-3),$$

die sich aus der durch die schematische Fig. 11 verdeutlichten Abzählung ergibt: Die 6 Punkte ϱ/σ sind in Fig. 11 links, die 12 Punkte λ/μ in Fig. 11 Mitte und die 13 Punkte $\varkappa/\tau$ in Fig. 11 rechts durch Nullkreise gekenn-

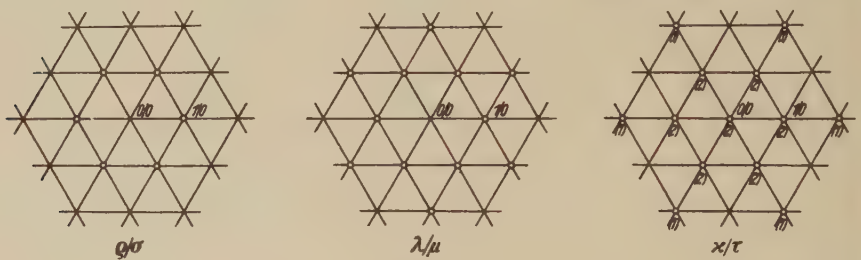


Fig. 11.

zeichnet; in Fig. 11 rechts sind außerdem die Koeffizienten $\delta_{\varkappa\,\tau}$ eingeklammert eingetragen. Die Rekursionsformel (40) gilt zunächst für $m>6$; sie bleibt aber auch für $m=4,5,6$ anwendbar, wenn man für $i\leqq 0$ verabredet

$$S(i)=-S(-i),\ \text{also insbesondere}\ S(0)=0.$$

Vermöge der Rekursionsformel (40) genügt es, die zu beweisende Gleichung (39_1) nur für $m=2$ und $m=3$ herzuleiten:

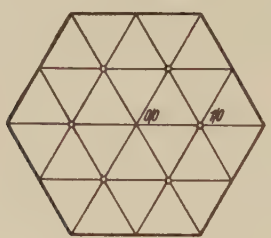


Fig. 12.

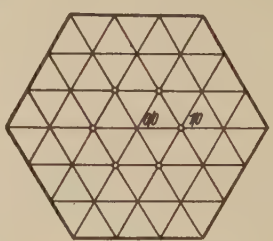


Fig. 13.

Für $m=2$ entnimmt man aus der schematischen Fig. 12

$$S_{0\,0}(2)=\sum_{1}^{6}S_{\varrho\,\sigma}(1)-2K_{0\,0}(1)-J_{0\,0}(1);$$

die 6 Punkte ϱ/σ sind durch Nullkreise gekennzeichnet.

Für $m=3$ erhält man gemäß Fig. 13

$$S_{0\,0}(3)=\sum_{1}^{19}S_{\lambda\,\mu}(1)-2J_{0\,0}(1)-\sum_{1}^{6}J_{\varrho\,\sigma}(1);$$

die 6 Punkte ϱ/σ sind wieder durch Nullkreise markiert, die 19 Punkte λ/μ sind die sämtlichen im Innern der stark ausgezogenen Sechseckmasche liegenden Netzpunkte.

Aus (39) erhält man

Satz 18. *Wenn man Längentreue (bzw. Längenhomogenität) zunächst nur für die Maschenweite h_0, aber gleichzeitig bezüglich der Sechseckmaschen, Sechseckkreuze und Sechsecksterne fordert, so folgt daraus Längentreue (bzw. Längenhomogenität) bezüglich der Sechseckmaschen, Sechseckkreuze und Sechsecksterne auch für jede größere Maschenweite $2h_0$, $3h_0$, ..., mh_0.*

Aus den durch ähnliche Abzählungen herleitbaren Beziehungen

$$S_{00}(m) = \sum c_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(1) + \sum \bar{c}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(2) + \sum \bar{\bar{c}}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(3) \text{ mit } m = 4, 5, \ldots,$$

$$(41)\quad \left.\begin{aligned} K_{00}(2m) &= \sum d_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(1) + \sum \bar{d}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(2) + \sum \bar{\bar{d}}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(3) \\ J_{00}(2m) &= \sum e_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(1) + \sum \bar{e}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(2) + \sum \bar{\bar{e}}_{\varrho\sigma} S_{\varrho\sigma}(3) \end{aligned}\right\} \text{ mit } m = 1, 2, \ldots$$

ergibt sich

Satz 19. *Wenn man Längentreue (bzw. Längenhomogenität) zunächst nur bezüglich der Sechseckmaschen, aber gleichzeitig für die Maschenweiten h_0, $2h_0$ und $3h_0$ fordert, so folgt daraus Längentreue (bzw. Längenhomogenität) bezüglich der Sechseckmaschen für alle Maschenweiten h_0, $2h_0$, ..., mh_0 und bezüglich der Sechseckkreuze und Sechsecksterne für die Maschenweiten $2h_0$, $4h_0$, ..., $2mh_0$.*

Mit $h_0 \to 0$ geht Satz 19 in die Aussage a) des Satzes 6 über.

22. *Existenz längentreuer Deformationen und längenhomogener Dreiecksnetze.*

Wir haben bisher die Existenz längentreuer Deformationen bzw. längenhomogener Dreiecksnetze stillschweigend vorausgesetzt. Es ist in der Tat leicht, bezüglich eines jeden Maschentyps die allgemeinsten längentreuen Deformationen eines beliebig vorgegebenen Dreiecksnetzes bzw. die allgemeinsten längenhomogenen Dreiecksnetze anzugeben. Wir wollen hier beispielsweise die allgemeinsten Dreiecksnetze ermitteln, die für alle Maschenweiten mh_0 ($m = 1, 2, 3, \ldots$) längenhomogen sind bezüglich der Viereckmaschen und Viereckkreuze einer Art:

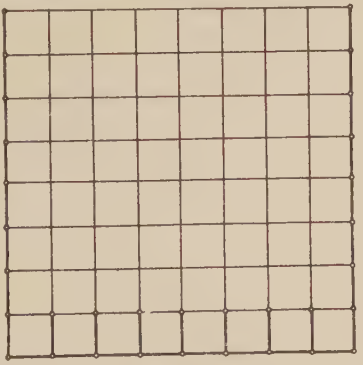


Fig. 14.

Nach Satz 14 genügt es, die Forderungen der Längenhomogenität lediglich für die Grundmaschenweiten h_0 zu erfüllen. Man kann daher die in Fig. 14 stark ausgezogenen Maschenseiten als „willkürliche Randbedingungen" vorgeben.

Die in Fig. 14 dünner gezeichneten Maschenseiten lassen sich dann schrittweise aus den Bedingungen

$$U_{\varrho\sigma}(1) = \text{const}, \qquad L_{\varrho\sigma}(1) = \text{const}$$

eindeutig bestimmen. Damit sich bei dieser Konstruktion für alle neu hinzutretenden Maschenseiten positive Längen ergeben, müssen die willkürlichen Randbedingungen in entsprechender Weise eingeschränkt werden.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß man die hier entwickelten differenzengeometrischen Beziehungen und Konstruktionen dazu verwenden kann, um die Differenzierbarkeitseigenschaften, die wir in den §§ 2, 3 für die Funktionen $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ bzw. e, f, g gefordert haben, entbehrlich zu machen. Alle unsere differentialgeometrischen Sätze bleiben dann gültig, wenn man für die Funktionen lediglich Stetigkeit verlangt (vgl. Nr. 3).

(Eingegangen am 9. Dezember 1938.)

Periodische Lösungen des ebenen Dreikörperproblems in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckslösung*).

Von

Paul Reisch in München.

§ 1. Einleitung 289
§ 2. Bewegungsgleichungen und Integrale 291
§ 3. Partikulärlösungen der Variationsgleichungen für das Mehrkörperproblem 296
§ 4. Integration der Variationsgleichungen für das Dreikörperproblem 298
§ 5. Die Lösungenschar mit Periodizitätsbedingungen 302
§ 6. Zwei Periodizitätsbedingungen als Folge der übrigen 305
§ 7. Berechnung der Funktionaldeterminante 307
§ 8. Schlußbemerkung 311

§ 1.

Einleitung.

Im Jahre 1772 fand Lagrange[1]) die ersten Partikulärlösungen des ebenen Dreikörperproblems, bei denen sich die drei Massenpunkte mit konstanten gegenseitigen Abständen und konstanter Geschwindigkeit in Kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen, und zwar bleiben sie bei dem einen Anordnungstyp stets in gerader Linie, bei dem andern bilden sie ein gleichseitiges Dreieck. Seitdem haben mehrere Mathematiker periodische Lösungen in der Nähe dieser Kreisbahnen untersucht. Unter periodischen Lösungen sind hier solche zu verstehen, bei denen die drei Massen in einem mit der Winkelgeschwindigkeit der Kreisbahnen rotierenden Koordinatensystem nach Ablauf einer gewissen Zeit gleichzeitig in ihr Anfangsstadium zurückkehren. Die Kreisbahnen selbst erscheinen in diesem Koordinatensystem natürlich als Fixpunkte. Die erwähnten Untersuchungen bezogen sich jedoch meist auf den Fall des eingeschränkten Problems, bei dem die Masse eines der drei Körper als infinitesimal angenommen wird[2]).

*) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München als Dissertation angenommen.

[1]) Lagrange, Essai sur le problème des trois corps. Oeuvres t. 6, p. 229.

[2]) Vgl. hierzu etwa F. R. Moulton, Periodic orbits. Publ. by the Carnegie Inst. of Washington, 1920; ferner O. Perron, Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem, Monatsh. f. Math. u. Phys. 43 (1936), S. 81.

Für den allgemeinen Fall dreier endlicher Massen fand Lagrange selbst als Verallgemeinerung jeder der angegebenen Partikulärlösungen eine Schar ähnlicher Ellipsenbahnen mit derselben Periode, die sich im rotierenden System als kleine Umläufe um die Fixpunkte darstellen. In neuester Zeit untersuchte Daniel Buchanan nach der Methode Poincarés asymptotische Bahnen zu der geradlinigen[3]) und der dreieckigen[4]) Lagrangeschen Lösung. Seine Behandlungsweise der charakteristischen Gleichung für die sogenannten Variationsgleichungen erweckte den Anschein, als ob es überhaupt keine periodischen Lösungen der hier betrachteten Art gebe; doch wurde der Sachverhalt klargestellt durch H. E. Buchanan, der zunächst die Existenz verschiedener Scharen von periodischen Bahnkurven um die geradlinigen Fixpunkte zeigte[5]) und die Anfangsglieder der definierenden Reihen berechnete[6]). Später wies H. E. Buchanan auch zwei neue Scharen von Umläufen um die dreieckigen Fixpunkte nach[7]) und diskutierte die hierfür notwendige Bedingungsungleichung zwischen den Massen[8]). Unabhängig von Buchanan gelangte auch G. Weiss[9]) zu zwei Scharen periodischer Bahnen um die geradlinigen Fixpunkte, die die Verbindungsgerade dieser Punkte stets senkrecht schneiden.

In der vorliegenden Arbeit sollen die von H. E. Buchanan gefundenen Bahnen in der Nähe der Dreieckslösung nochmals nachgewiesen werden. In der betreffenden[10]) Arbeit (auch in der erstzitierten desselben Verfassers) ist ein Versehen in der Aufstellung des Energiesatzes unterlaufen, dessen Beseitigung einige Weitläufigkeiten nötig macht. Ferner hat A. Wintner[11]) darauf aufmerksam gemacht, daß die auch von Buchanan angewandte Methode[12]), die eine komplexe lineare Transformation der Variablen wesentlich

[3]) D. Buchanan, Orbits asymptotic to the straight line equilibrium points in the problem of three finite bodies, Palermo Rend. **45** (1921), p. 332.

[4]) D. Buchanan, Asymptotic planetoids, Transactions of the Am. Math. Soc. **23** 1922), p. 409.

[5]) H. E. Buchanan, Periodic Oscillations of Three Finite Masses about the Lagrangian Circular Solutions, Amer. Journ. of Math. **45** (1923), p. 90.

[6]) H. E. Buchanan, The Construction of Certain Periodic Orbits of the Three Body Problem, Am. Journ. of Math. **47** (1925), p. 289.

[7]) H. E. Buchanan, Periodic Orbits of Three Finite Masses about the Equilateral Triangle Points, Am. Journ. of Math. **50** (1928), p. 613.

[8]) H. E. Buchanan, On a Certain Function of the Masses in the Problem of Three Bodies, Am. Journ. of Math. **51** (1929), p. 595.

[9]) G. Weiss, Eine neue Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems, Math. Zeitschr. **43** (1938), S. 446.

[10]) Siehe Anm. [7]).

[11]) A. Wintner, Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 641; insbesondere S. 643 und 661—662.

[12]) Herr Wintner hatte dabei Buchanans Vorgänger Moulton, Buck u. a. im Auge, die diese Methode auf das eingeschränkte Problem anwandten.

benutzt, die Frage im unklaren läßt, ob die damit nachgewiesenen Bahnen auch wirklich reell sind. Obwohl wir glauben, daß dieser Einwand sich beheben ließe, ziehen wir es vor, einen Weg einzuschlagen, bei dem wir stets im Reellen bleiben und komplexe Größen nur als zusammenfassende Schreibweise für reelle Beziehungen benutzen.

Zweckmäßigerweise werden wir die Entwicklungen anfangs allgemein für das Mehrkörperproblem durchführen und erst, wenn die Rechnung es erfordert, auf den Spezialfall des Dreikörperproblems zurückkommen.

§ 2.

Bewegungsgleichungen und Integrale.

Seien $m_0, m_1, \ldots, m_{n+1}$ die Massen von $n+2$ Massenpunkten, die sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen und in einer Ebene bewegen. Bezeichnet man die Relativkoordinaten des Punktes mit der Masse m_ν (kurz: des Punktes m_ν) $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ in bezug auf den letzten m_{n+1} in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit α rotierenden Koordinatensystem mit ξ_ν, η_ν und setzt

$$v_\nu = \xi_\nu + i\eta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

so lauten die Bewegungsgleichungen der Punkte $m_0, \ldots, m_n$ bei geeigneter Wahl der Zeiteinheit[13]):

1) $$\ddot{v}_\nu + 2i\alpha\dot{v}_\nu - \alpha^2 v_\nu = \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{v_\mu - v_\nu}{|v_\mu - v_\nu|^3} - \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{v_\mu}{|v_\mu|^3} - m_{n+1}\frac{v_\nu}{|v_\nu|^3}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Mit den konjugiert-komplexen bilden die Gleichungen (1) ein System von $2n+2$ Bewegungsgleichungen. Wir setzen

2) $$m_0 + m_1 + \ldots + m_{n+1} = M.$$

Die Gleichungen (1) besitzen das Energieintegral[14])

3) $$E \equiv \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu |\dot{v}_\nu + i\alpha v_\nu|^2 - \frac{1}{M}\Big|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu(\dot{v}_\nu + i\alpha v_\nu)\Big|^2$$
$$- 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{m_\mu m_\nu}{|v_\mu - v_\nu|} - 2\sum_{\mu=0}^{n}\frac{m_\mu m_{n+1}}{|v_\mu|} = h.$$

---

[13]) O. Perron, Periodische Lösungen des ebenen Drei- und Mehrkörperproblems, Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 593; insbesondere S. 599, Gleichung (14); dort steht $\dot{v}$ statt v. Ein Strich beim Summenzeichen bedeutet, daß ein Summand, dessen Nenner verschwinden würde, nicht zählt. Leere Summen bedeuten stets Null.

[14]) Perron, a. a. O., Gleichung (15).

Wir bezeichnen in üblicher Weise durch Überstreichen die konjugiert-komplexe Größe[15]) und setzen

$$\Re(v) = \frac{1}{2}(v + \bar{v}), \qquad \Im(v) = -\frac{i}{2}(v - \bar{v}). \tag{4}$$

Hiernach können wir das zu den Gleichungen (1) gehörige Flächenintegral folgendermaßen schreiben[16]):

$$F \equiv \Im\left\{\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{v}_\nu (\dot{v}_\nu + i\alpha v_\nu) - \frac{1}{M}\sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \bar{v}_\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu (\dot{v}_\nu + i\alpha v_\nu)\right\} = k. \tag{5}$$

h und k sind reelle Konstanten.

Die Differentialgleichungen (1) haben die konstante Lösung

$$v_\nu = a_\nu, \tag{6}$$

wo die $n+1$ Größen a_ν aus den $n+1$ Gleichungen

$$-\alpha^2 a_\nu = \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - m_{n+1}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3} \tag{7}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

berechnet werden. Durch diese Lösungen werden die im rotierenden System als Fixpunkte erscheinenden Kreisbahnen geliefert. Wir verstehen unter den a_ν eine festgewählte Lösung von (7).

Setzt man mit dem reellen Parameter λ

$$v_\nu = a_\nu + \lambda u_\nu, \tag{8}$$

so entsteht aus (1):

$$\lambda(\ddot{u}_\nu + 2i\alpha\dot{u}_\nu) - \alpha^2(a_\nu + \lambda u_\nu) = \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu + \lambda(u_\mu - u_\nu)}{|a_\mu - a_\nu + \lambda(u_\mu - u_\nu)|^3} \tag{8a}$$

$$- \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda u_\mu}{|a_\mu + \lambda u_\mu|^3} - m_{n+1}\frac{a_\nu + \lambda u_\nu}{|a_\nu + \lambda u_\nu|^3} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Die rechten Seiten können nach Potenzen von λ entwickelt werden; die entstehenden Reihen konvergieren sämtlich in dem durch

$$\operatorname{Max}\left(\left|\frac{\lambda(u_\mu - u_\nu)}{a_\mu - a_\nu}\right|, \quad \left|\frac{\lambda u_\nu}{a_\nu}\right|\right) < 1$$

[15]) Ausnahme vgl. Fußnote [19]), S. 297.

[16]) Perron, a. a. O., Gleichung (16).

bestimmten Bereich. Die Entwicklung der absoluten Beträge geschieht nach der Formel

$$(9)\qquad \frac{a+\lambda u}{|a+\lambda u|^3} = \frac{a}{|a|^3}\left(1+\lambda\frac{u}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\lambda\frac{\bar u}{\bar a}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{a}{|a|^3}\left(1-\frac{1}{2}\lambda\frac{u}{a}+\frac{3}{8}\lambda^2\frac{u^2}{a^2}-\ldots\right)\left(1-\frac{3}{2}\lambda\frac{\bar u}{\bar a}+\frac{15}{8}\lambda^2\frac{\bar u^2}{\bar a^2}-\ldots\right).$$

Werden die Gleichungen (8a) in dieser Weise behandelt, so fallen wegen (7) die Glieder ohne λ gerade weg, so daß nach Division mit λ das Gleichungssystem folgende Form erhält:

$$(10)\qquad \begin{aligned}\ddot u_\nu + 2i\alpha\dot u_\nu - \alpha^2 u_\nu = &-\frac{1}{2}{\sum_{\mu=0}^{n}}' m_\mu\frac{a_\mu-a_\nu}{|a_\mu-a_\nu|^3}\left(\frac{u_\mu-u_\nu}{a_\mu-a_\nu}+3\frac{\bar u_\mu-\bar u_\nu}{\bar a_\mu-\bar a_\nu}\right)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{n} m_\mu\frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{u_\mu}{a_\mu}+3\frac{\bar u_\mu}{\bar a_\mu}\right)+\frac{1}{2}m_{n+1}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{u_\nu}{a_\nu}+3\frac{\bar u_\nu}{\bar a_\nu}\right)\\ &+\lambda\sum_{\mu=0}^{\infty}P_{\nu\mu}\lambda^\mu \qquad (\nu=0,1,\ldots,n).\end{aligned}$$

Die $P_{\nu\mu}$ sind homogene Polynome vom Grad $\mu+2$ in den $u_\nu, \bar u_\nu$.

Durch die Substitution (8) gehen die Integrale (3), (5), wenn man sie noch mit M multipliziert, über in

$$(11)\qquad ME \equiv M\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu|\lambda\dot u_\nu+i\alpha(a_\nu+\lambda u_\nu)|^2-\Big|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu(\lambda\dot u_\nu+i\alpha(a_\nu+\lambda u_\nu))\Big|^2$$

$$-2M\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{m_\mu m_\nu}{|a_\mu-a_\nu+\lambda(u_\mu-u_\nu)|}+\sum_{\mu=0}^{n}\frac{m_\mu m_{n+1}}{|a_\mu-\lambda u_\mu|}\Big]=Mh,$$

$$(12)\qquad MF \equiv \Im\Big\{M\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu(a_\nu+\lambda u_\nu)(\lambda\dot u_\nu+i\alpha(a_\nu+\lambda u_\nu))$$

$$-\sum_{\mu=0}^{n} m_\mu(a_\mu+\lambda\dot u_\mu)\cdot\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu(\lambda\dot u_\nu+i\alpha(a_\nu+\lambda u_\nu))\Big\}=Mk.$$

Die linke Seite von (11) kann nach einer der Beziehung (9) ähnlichen Formel entwickelt, die linke Seite von (12) nach (4) behandelt werden. Man bemerkt, daß die von λ unabhängigen Glieder lauter reelle Konstanten sind und daher

in die Konstanten der rechten Seiten gezogen werden können. So bekommt man aus (11)

$$
\begin{aligned}
(13)\quad M E' \equiv \lambda \Big\{ & M \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \alpha^2 (u_\nu \bar{a}_\nu + \bar{u}_\nu a_\nu) - \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} m_\mu m_\nu \alpha^2 (u_\nu \bar{a}_\mu + \bar{u}_\nu a_\mu) \\
& - M \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu i \alpha (\dot{u}_\nu \bar{a}_\nu - \dot{\bar{u}}_\nu a_\nu) + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} m_\mu m_\nu i \alpha (\dot{u}_\nu \bar{a}_\mu - \dot{\bar{u}}_\nu a_\mu) \\
& - 2M \Big[\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|a_\mu - a_\nu|} \Big(- \frac{u_\mu - u_\nu}{2(a_\mu - a_\nu)} - \frac{\bar{u}_\mu - \bar{u}_\nu}{2(\bar{a}_\mu - a_\nu)} \Big) \\
& \qquad + m_{n+1} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{m_\mu}{|a_\mu|} \Big(- \frac{u_\mu}{2 a_\mu} - \frac{\bar{u}_\mu}{2 \bar{a}_\mu} \Big) \Big] \Big\} \\
& + (\lambda^2) = h'.
\end{aligned}
$$

Hier bedeutet (λ^2) eine Potenzreihe in λ, die mit der Potenz λ^2 beginnt und Polynome in den u_ν, $\bar{u}_\nu$, $\dot{u}_\nu$, $\dot{\bar{u}}_\nu$ zu Koeffizienten hat; h' ist eine reelle Konstante (in bezug auf die Zeit t, aber natürlich abhängig von λ).

Ebenso erhält man aus (12):

$$
\begin{aligned}
(14)\quad M F' \equiv \lambda \Big[& M \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \alpha (u_\nu \bar{a}_\nu + \bar{u}_\nu a_\nu) - \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} m_\mu m_\nu \alpha (u_\nu \bar{a}_\mu + \bar{u}_\nu a_\mu) \\
& - M \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \cdot \frac{i}{2} (\dot{u}_\nu \bar{a}_\nu - \dot{\bar{u}}_\nu a_\nu) + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} m_\mu m_\nu \frac{i}{2} (\dot{u}_\nu \bar{a}_\mu - \dot{\bar{u}}_\nu a_\mu) \Big] \\
& + (\lambda^2) = k',
\end{aligned}
$$

wo k' eine reelle Konstante ist.

Nun ist aber in (13) die dritte Zeile mit der ersten (abgesehen von λ) identisch. Zunächst sind nämlich beide homogene Polynome ersten Grades in den u_ν, $\bar{u}_\nu$. Wir betrachten beispielsweise den Koeffizienten von $\bar{u}_0$ in den beiden Zeilen (für die anderen u_ν, $\bar{u}_\nu$ geht die Rechnung analog). In der ersten Zeile sieht er so aus:

$$
(15)\qquad M m_0 \cdot \alpha^2 a_0 - m_0 \alpha^2 \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu a_\nu;
$$

in der dritten dagegen hat er folgende Gestalt:

$$
(16)\qquad M m_0 \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{|a_0 - a_\nu| (a_0 - \bar{a}_\nu)} + m_{n+1} \cdot \frac{1}{|a_0| \bar{a}_0} \Big).
$$

Nun ist nach (7) speziell für $\nu = 0$:

$$
(17)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_0 - a_\mu}{|a_\mu - a_0|^3} + m_{n+1} \frac{a_0}{|a_0|^3} = \alpha^2 a_0 - \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3};
$$

andererseits, wenn man (7) mit m_ν multipliziert und dann nach ν summiert:

$$-\alpha^2 \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n}{}' \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} m_\mu m_\nu - (M - m_{n+1}) \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}$$

(18)
$$- m_{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}$$

$$= - M \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3},$$

denn die Doppelsumme verschwindet. Vergleicht man (15), (16) mit Rücksicht auf (18), (17), so erkennt man, daß sie übereinstimmen. Ebenso ist es mit den Koeffizienten der übrigen $u_\nu, \bar{u}_\nu$, so daß die erste und dritte Zeile in (13) tatsächlich dasselbe bedeuten. Dann sieht man aber, daß die Koeffizienten von λ in (13) und (14) sich nur um den Faktor 2α unterscheiden. Also hat das Integral (13) $- 2\alpha$ (14) die Gestalt[17])

$$ME' - 2\alpha MF' \equiv (\lambda^2) = h' - 2\alpha k'.$$

Genauer bekommt man aus (11) und (12):

$$ME' - 2\alpha MF' \equiv \lambda^2 \Big[M \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left(|\dot{u}_\nu|^2 + i\alpha (u_\nu \dot{\bar{u}}_\nu - \bar{u}_\nu \dot{u}_\nu) \right)$$

$$- \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} m_\mu m_\nu \left(\dot{u}_\mu \dot{\bar{u}}_\nu + i\alpha (u_\mu \dot{\bar{u}}_\nu - \bar{u}_\mu \dot{u}_\nu) \right) \Big]$$

$$- 2\alpha\lambda^2 \Big[\frac{i}{2} M \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu (u_\nu \dot{\bar{u}}_\nu - \bar{u}_\nu \dot{u}_\nu) - \frac{i}{2} \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} m_\mu m_\nu (u_\mu \dot{\bar{u}}_\nu - \bar{u}_\mu \dot{u}_\nu) \Big]$$

$$+ \lambda^2 P + (\lambda^3) = h' - 2\alpha k'.$$

---

[17]) Daß ein Integral der Gleichungen (10) von der Gestalt

(19) $$(\lambda^2) = \text{const.}$$

existiert, kann in dem später behandelten Spezialfall des Dreikörperproblems vorausgesehen werden. Dort verschwinden nämlich von den „charakteristischen Exponenten" nur zwei, während, wenn (19) nicht stattfände, wenigstens drei verschwinden müßten. Die (dort spezialisierten) Gleichungen (10) enthalten nämlich die Zeit nicht explizit und besitzen die eindeutigen Integrale $E = \text{const.}$, $F = \text{const.}$ [Siehe Poincaré, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste t. I, p. 188, No. 67; der dort bewiesene Satz ist auch in unserem Falle anwendbar, da die „erzeugende Lösung" (6) von (1) beim Übergang auf ein nicht rotierendes Koordinatensystem nicht konstant ist, die charakteristischen Exponenten bei diesem Übergang aber nicht verändert werden.] — Übrigens legt das Ergebnis (19) die Vermutung sehr nahe, daß auch im Falle des Mehrkörperproblems nur zwei der charakteristischen Exponenten [für irgendeine Ausgangslösung der Gestalt (6)] Null sind.

Hier bedeutet P ein homogenes Polynom 2. Grades in den $u_\nu, \bar{u}_\nu$ allein, das wir nicht genauer brauchen; (λ^3) hat die entsprechende Bedeutung wie früher (λ^2).

Durch Zusammenfassung erhalten wir schließlich

$$(20)\qquad \boxed{M E' - 2\alpha M F' = \lambda^2 \Big[M \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu |\dot{u}_\nu|^2 - \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} m_\mu m_\nu \dot{u}_\mu \dot{\bar{u}}_\nu \Big] + \lambda^2 P + (\lambda^3) = h''.}$$

(14) und (20) sind die Integrale in der Gestalt, wie wir sie nachher brauchen werden.

§ 3.

Partikulärlösungen der Variationsgleichungen für das Mehrkörperproblem.

Läßt man in (10) die Glieder mit λ weg, so entsteht ein lineares System mit konstanten Koeffizienten, die Variationsgleichungen:

$$(21)\quad \begin{aligned} \ddot{u}_\nu + 2i\alpha\dot{u}_\nu - \alpha^2 u_\nu = &- \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} \left(\frac{u_\mu - u_\nu}{a_\mu - a_\nu} + 3 \frac{\bar{u}_\mu - \bar{u}_\nu}{\bar{a}_\mu - \bar{a}_\nu} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} \left(\frac{u_\mu}{a_\mu} + 3 \frac{\bar{u}_\mu}{\bar{a}_\mu} \right) \\ &+ \frac{1}{2} m_{n+1} \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3} \left(\frac{u_\nu}{a_\nu} + 3 \frac{\bar{u}_\nu}{\bar{a}_\nu} \right) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Die Lösungen von (21) sind Exponentialfunktionen, von deren „charakteristischen Exponenten" aber wenigstens zwei verschwinden[18]). In der Tat, wie durch Vergleich mit (7) ersichtlich, hat das System (21) die konstante Partikulärlösung

$$(22)\qquad u_{\nu 1} = i a_\nu, \quad \bar{u}_{\nu 1} = -i\bar{a}_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Eine zweite Partikulärlösung kann man versuchsweise in der Form

$$(23)\qquad u_{\nu 2} = i a_\nu t + \beta a_\nu, \quad \bar{u}_{\nu 2} = -i\bar{a}_\nu t + \beta \bar{a}_\nu$$

ansetzen, wobei man wegen der Lösung (22) β reell annehmen darf. Setzt man (23) in (21) ein, so fällt t heraus; dann machen die Glieder der rechten Seite gerade das (-2β)-fache der rechten Seite von (7) aus. Daraus folgt, daß $\beta = -\frac{2}{3\alpha}$; also ist

$$(23\text{a})\qquad u_{\nu 2} = i a_\nu t - \frac{2 a_\nu}{3\alpha}, \quad \bar{u}_{\nu 2} = -i\bar{a}_\nu t - \frac{2\bar{a}_\nu}{3\alpha}.$$

Wir betrachten jetzt die Gleichungen (21) und die konjugiert-komplexen (21) als ein System von $2n+2$ Differentialgleichungen mit den $2n+2$

[18]) Poincaré, Méth. nouv. I, p. 187, No. 66.

unabhängigen unbekannten Funktionen $u_0, \ldots, u_n$, $\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_n$ und suchen weitere Partikulärlösungen, die wir mit u_ν^*, $\bar{u}_\nu^*$ bezeichnen[19]). Erst nachträglich berücksichtigen wir, daß die Lösungen paarweise konjugiert-komplex sein sollen, und stellen durch Linearkombination Lösungen auf, für welche dies zutrifft. Wir machen also den Ansatz

$$u_\nu^* = A_\nu e^{\varrho t}, \qquad \bar{u}_\nu^* = B_\nu e^{\varrho t}. \tag{24}$$

Aus (21) und (21̄) entsteht dann

$$\left\{\begin{aligned}
(\varrho^2 + 2i\alpha\varrho - \alpha^2) A_\nu &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{A_\mu - A_\nu}{a_\mu - a_\nu} + 3\frac{B_\mu - B_\nu}{\bar{a}_\mu - \bar{a}_\nu}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{A_\mu}{a_\mu} + 3\frac{B_\mu}{\bar{a}_\mu}\right) + \frac{1}{2} m_{n+1}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{A_\nu}{a_\nu} + 3\frac{B_\nu}{\bar{a}_\nu}\right), \\
(\varrho^2 - 2i\alpha\varrho - \alpha^2) B_\nu &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{\bar{a}_\mu - \bar{a}_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{B_\mu - B_\nu}{\bar{a}_\mu - a_\nu} + 3\frac{A_\mu - A_\nu}{a_\mu - a_\nu}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{\bar{a}_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{B_\mu}{\bar{a}_\mu} + 3\frac{A_\mu}{a_\mu}\right) + \frac{1}{2} m_{n+1}\frac{\bar{a}_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{B_\nu}{\bar{a}_\nu} + 3\frac{A_\nu}{a_\nu}\right). \\
&\qquad\qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Eliminiert man die A_ν, B_ν, so erhält man die charakteristische Gleichung des Systems (21), (21̄). Es liegt jedoch nahe, Auflösungen von (25) von der Form

$$A_\nu = \gamma a_\nu, \qquad B_\nu = \delta \bar{a}_\nu \tag{26}$$

zu suchen. Durch Einsetzen erhält man mit Rücksicht auf (7)

$$(\varrho^2 + 2i\alpha\varrho - \alpha^2)\gamma a_\nu = \tfrac{1}{2}\alpha^2 a_\nu (\gamma + 3\delta),$$
$$(\varrho^2 - 2i\alpha\varrho - \alpha^2)\delta \bar{a}_\nu = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \bar{a}_\nu (\delta + 3\gamma).$$

Daraus folgt

$$(\varrho^2 + 2i\alpha\varrho - \tfrac{3}{2}\alpha^2)(\varrho^2 - 2i\alpha\varrho - \tfrac{3}{2}\alpha^2) - \tfrac{9}{4}\alpha^4 = 0,$$

also, wenn man von der bereits behandelten Doppelwurzel $\varrho = 0$ absieht, entweder

$$\varrho = i\alpha, \qquad \delta + 3\gamma = 0,$$

oder

$$\varrho = -i\alpha, \qquad \gamma + 3\delta = 0.$$

Diese beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung waren zu erwarten, da neben den vorausgesetzten Kreisbahnen, die als Fixpunkte erscheinen, stets

[19]) Bei allen mit einem Stern bezeichneten Größen bedeutet Überstreichen *nicht* den konjugiert-komplexen Wert.

die (Lagrangeschen) Ellipsen mit der Periode $\frac{2\pi}{\alpha}$ als kleine Schwankungen um die Fixpunkte existieren. Man erhält daher aus (24) und (26) die Partikulärlösungen

$$u_{\nu 3}^* = a_\nu e^{i\alpha t}, \qquad \bar{u}_{\nu 3}^* = -3\bar{a}_\nu e^{i\alpha t},$$
$$u_{\nu 4}^* = -3a_\nu e^{-i\alpha t}, \quad \bar{u}_{\nu 4}^* = \bar{a}_\nu e^{-i\alpha t}.$$

Durch Linearkombination bekommt man daraus folgende konjugiert-komplexen Lösungen von (21):

$$(27)\quad \begin{cases} u_{\nu 3} = u_{\nu 3}^* + u_{\nu 4}^* = a_\nu e^{i\alpha t} - 3a_\nu e^{-i\alpha t}, \\ \bar{u}_{\nu 3} = \bar{u}_{\nu 3}^* + \bar{u}_{\nu 4}^* = -3\bar{a}_\nu e^{i\alpha t} + \bar{a}_\nu e^{-i\alpha t}, \\ u_{\nu 4} = i(u_{\nu 3}^* - u_{\nu 4}^*) = ia_\nu e^{i\alpha t} + 3ia_\nu e^{-i\alpha t}, \\ \bar{u}_{\nu 4} = i(\bar{u}_{\nu 3}^* - \bar{u}_{\nu 4}^*) = -3i\bar{a}_\nu e^{i\alpha t} - i\bar{a}_\nu e^{-i\alpha t}. \end{cases}$$

§ 4.

Integration der Variationsgleichungen für das Dreikörperproblem.

Die weitere Rechnung führen wir nur für den im Titel genannten Spezialfall des Dreikörperproblems durch. Es sei also $n = 1$ und die festgehaltene Lösung (6) stelle die Anordnung der Massenpunkte zu einem gleichseitigen Dreieck dar, dem wir durch geeignete Wahl der Längeneinheit die Seite Eins geben können. Um bequeme Zahlenwerte zu haben, wählen wir

$$(28)\quad \begin{cases} a_0 = \varepsilon^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}, \\ a_1 = \varepsilon \;\; = e^{-\frac{i\pi}{3}} \;\; = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}. \end{cases}$$

Wir merken die mehrfach gebrauchten Relationen an:

$$(29)\quad \begin{cases} |\varepsilon| = |\varepsilon^2| = |\varepsilon - \varepsilon^2| = 1, \\ \bar{\varepsilon} = -\varepsilon^2, \quad -\varepsilon\cdot\varepsilon^2 = 1, \quad 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 = 0. \end{cases}$$

Danach reduziert sich (7) auf

$$(30)\qquad \alpha^2 = m_0 + m_1 + m_2 = M.$$

Die Differentialgleichungen (10) gehen über in

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + 2i\alpha\dot{u}_0 - Mu_0 &= -\tfrac{1}{2}m_1[(u_1 - u_0) + 3(\bar{u}_1 - \bar{u}_0)] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2(m_0 + m_2)(-\varepsilon u_0 + 3\varepsilon^2\bar{u}_0) + \tfrac{1}{2}\varepsilon m_1(-\varepsilon^2 u_1 + 3\varepsilon\bar{u}_1) + \lambda\sum_{\mu=0}^{\infty} P_{0\mu}\lambda^\mu, \\ \dot{u}_1 + 2i\alpha\dot{u}_1 - Mu_1 &= -\tfrac{1}{2}m_0[(u_0 - u_1) + 3(\bar{u}_0 - \bar{u}_1)] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\varepsilon(m_1 + m_2)(-\varepsilon_2 u_1 + 3\varepsilon\bar{u}_1) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 m_0(-\varepsilon u_0 + 3\varepsilon^2\bar{u}_0) + \lambda\sum_{\mu=0}^{\infty} P_{1\mu}\lambda^\mu, \end{aligned}$$

oder einfacher

$$(31)\quad \begin{cases} \ddot{u}_0 + 2i\alpha\dot{u}_0 - \frac{3}{2}M u_0 = \frac{3}{2}\bar{u}_0(-\varepsilon m_0 + m_1 - \varepsilon m_2) - \frac{3}{2}\bar{u}_1 m_1(1-\varepsilon^2) \\ \qquad\qquad + \lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} P_{0\mu}\lambda^\mu, \\ \ddot{u}_1 + 2i\alpha\dot{u}_1 - \frac{3}{2}M u_1 = -\frac{3}{2}\bar{u}_0 m_0(1+\varepsilon) + \frac{3}{2}\bar{u}_1(m_0 + \varepsilon^2 m_1 + \varepsilon^2 m_2) \\ \qquad\qquad + \lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} P_{1\mu}\lambda^\mu. \end{cases}$$

Die Partikulärlösungen (22) und (23a) der Variationsgleichungen, d. h. der „verkürzten" Gleichungen (31) (mit $\lambda = 0$), bekommen das Aussehen

$$(32)\quad \begin{cases} u_{01} = i\varepsilon^2, & \bar{u}_{01} = i\varepsilon, \\ u_{11} = i\varepsilon, & \bar{u}_{11} = i\varepsilon^2, \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} u_{02} = i\varepsilon^2 t - \dfrac{2\varepsilon^2}{3\alpha}, & \bar{u}_{02} = i\varepsilon t + \dfrac{2\varepsilon}{3\alpha}, \\ u_{12} = i\varepsilon t - \dfrac{2\varepsilon}{3\alpha}, & \bar{u}_{12} = i\varepsilon^2 t + \dfrac{2\varepsilon^2}{3\alpha}. \end{cases}$$

Desgleichen wird aus den Lösungen (27) mit Beachtung von (28)

$$(34)\quad \begin{cases} u_{03} = \varepsilon^2 e^{i\alpha t} - 3\varepsilon^2 e^{-i\alpha t}, & \bar{u}_{03} = 3\varepsilon e^{i\alpha t} - \varepsilon e^{-i\alpha t}, \\ u_{13} = \varepsilon e^{i\alpha t} - 3\varepsilon e^{-i\alpha t}, & \bar{u}_{13} = 3\varepsilon^2 e^{i\alpha t} - \varepsilon^2 e^{-i\alpha t}. \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} u_{04} = i\varepsilon^2 e^{i\alpha t} + 3i\varepsilon^2 e^{-i\alpha t}, & \bar{u}_{04} = 3i\varepsilon e^{i\alpha t} + i\varepsilon e^{-i\alpha t}, \\ u_{14} = i\varepsilon e^{i\alpha t} + 3i\varepsilon e^{-i\alpha t}, & \bar{u}_{14} = 3i\varepsilon^2 e^{i\alpha t} + i\varepsilon e^{-i\alpha t}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (25) entsteht mit Rücksicht auf (24) und (31):

$$(36)\quad \begin{cases} (\varrho^2 + 2i\alpha\varrho - \frac{3}{2}M)A_0 = a B_0 + b B_1, \\ (\varrho^2 + 2i\alpha\varrho - \frac{3}{2}M)A_1 = c B_0 + d B_1, \\ (\varrho^2 + 2i\alpha\varrho - \frac{3}{2}M)B_0 = \bar{a} A_0 + \bar{b} A_1, \\ (\varrho^2 + 2i\alpha\varrho - \frac{3}{2}M)B_1 = \bar{c} A_0 + \bar{d} A_1, \end{cases}$$

wobei a, b, c, d die folgende Bedeutung haben:

$$(37)\quad \begin{cases} a = \frac{3}{2}[m_1 - \varepsilon(m_0 + m_2)], \\ b = -\frac{3}{2}m_1(1-\varepsilon^2), \qquad c = -\frac{3}{2}m_0(1+\varepsilon), \\ d = \frac{3}{2}[m_0 + \varepsilon^2(m_1 + m_2)]. \end{cases}$$

Aus (36) folgt

$$[(\varrho^2 - \tfrac{3}{2}M)^2 + 4M\varrho^2]A_0 = a(\bar{a}A_0 + \bar{b}A_1) + b(\bar{c}A_0 + \bar{d}A_1),$$
$$[(\varrho^2 - \tfrac{3}{2}M)^2 + 4M\varrho^2]A_1 = c(\bar{a}A_0 + \bar{b}A_1) + d(\bar{c}A_0 + \bar{d}A_1);$$

oder

$$(38)\qquad \begin{cases} (\varrho^4 + M\varrho^2 + \frac{3}{4}M^2 - a\bar{a} - b\bar{c})\,A_0 - (a\bar{b} + b\bar{d})\,A_1 = 0, \\ -(c\bar{a} + d\bar{c})\,A_0 + (\varrho^4 + M\varrho^2 + \frac{9}{4}M^2 - c\bar{b} - d\bar{d})\,A_1 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen bekommen wir als Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen die charakteristische Gleichung

$$(\varrho^4 + M\varrho^2)^2 + (\varrho^4 + M\varrho^2)(\tfrac{9}{2}M^2 - a\bar{a} - b\bar{c} - c\bar{b} - d\bar{d}) = 0.$$

Die restlichen Glieder müssen nämlich verschwinden, da der Faktor $\varrho^2(\varrho^2 + M)$ von den Lösungen (32) bis (35) her bereits bekannt ist. Da nun gemäß (37)

$$(39)\qquad \begin{cases} |a|^2 = \frac{9}{4}[m_1^2 - m_1(m_0 + m_2) + (m_0 + m_2)^2], \\ b\bar{c} = -\frac{27}{4}m_0 m_1 \varepsilon^2, \qquad c\bar{b} = \frac{27}{4}m_0 m_1 \varepsilon, \\ |d|^2 = \frac{9}{4}[m_0^2 - m_0(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2)^2], \end{cases}$$

so hat man, wieder mit Beachtung von (29),

$$(40)\qquad \varrho^2(\varrho^2 + M)[\varrho^4 + M\varrho^2 + \tfrac{27}{4}m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2)] = 0.$$

Zu den früher erhaltenen charakteristischen Exponenten

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 0, \qquad \varrho_3 = i\alpha, \qquad \varrho_4 = -i\alpha$$

treten also die vier Wurzeln des letzten Faktors. Diese sind rein imaginär und voneinander verschieden:

$$(41)\qquad \varrho_5 = i\beta_1, \quad \varrho_6 = -i\beta_1, \quad \varrho_7 = i\beta_2, \quad \varrho_8 = -i\beta_2 \qquad (\beta_1 > \beta_2 > 0),$$

sobald

$$(42)\qquad \boxed{D = M^2 - 27(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2) > 0}$$

ist. Nur dieser Fall interessiert uns[20]). Es ist dann

$$(42\text{a})\qquad \varrho^2 = -\tfrac{1}{2}(M \pm \sqrt{D}) < 0,$$

woraus die Exponenten (41) berechnet werden können.

Die zu diesen gehörigen vier fehlenden Lösungen seien

$$(43)\qquad u^*_{\nu\mu} = A_{\nu\mu}\, e^{\varrho_\mu t}, \qquad \bar{u}^*_{\nu\mu} = B_{\nu\mu}\, e^{\varrho_\mu t} \qquad (\nu = 0, 1;\ \mu = 5, \ldots, 8).$$

Die $A_{\nu\mu}$ werden aus einer der Gleichungen (38), etwa der zweiten, bestimmt:

$$-(c\bar{a} + d\bar{c})\,A_{0\mu} + (\varrho_\mu^4 + M\varrho_\mu^2 + \tfrac{9}{4}M^2 - c\bar{b} - d\bar{d})\,A_{1\mu} = 0.$$

[20]) Vgl. Anm. [8]) und den dazugehörigen Text.

ϱ_μ ist eine Wurzel von (40); mit Rücksicht auf (37), (39) enthält man daher:

$$\tfrac{9}{4} A_{0\mu}[(1+\varepsilon) m_0 m_1 - (1-\varepsilon^2) m_0 (m_0 + m_2) + (1-\varepsilon^2) m_0^2 + (\varepsilon^2 + \varepsilon)\, m_0 (m_1 + m_2)]$$
$$+ \tfrac{9}{4} A_{1\mu}[-3 \sum_{\mu<\nu} m_\mu m_\nu + M^2 - 3\varepsilon m_0 m_1 - m_0^2 + m_0 (m_1 + m_2) - (m_1 + m_2)^2] = 0.$$

Hieraus gewinnt man die von μ unabhängigen Werte

$$A_{0\mu} = 3 m_1 (\varepsilon m_0 + m_2), \qquad A_{1\mu} = 3\varepsilon m_0 (m_1 + \varepsilon m_2).$$

Die $A_{\nu\mu}$ dürfen noch mit einem gemeinsamen (von μ abhängigen) Faktor multipliziert werden. Wir setzen

$$c_\mu = -\tfrac{2}{3}\varrho_\mu^2 + \tfrac{4}{3} i\alpha \varrho_\mu + M \qquad (\mu = 5, \ldots, 8); \tag{44}$$

diese Größen sind offenbar reell. Ferner ist nach (41)

$$c_5 c_6 = \tfrac{4}{9}[\varrho_5^4 + 4\alpha^2 \varrho_5^2 - 3 M \varrho_5^2 + \tfrac{9}{4} M^2]$$
$$= \tfrac{4}{9}[\varrho_5^4 + M \varrho_5^2 + \tfrac{27}{4}(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2)]$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{2} m_\nu^2 - \sum_{\mu<\nu} m_\mu m_\nu,$$

also positiv; denn ϱ_5 ist eine Wurzel von (40) und

$$\Sigma m_\nu^2 - \Sigma m_\mu m_\nu$$

ist eine positiv halbdefinite Form in den m_ν. [Der Fall, daß die drei Massen gleich sind, ist hier wegen der Voraussetzung (42) ausgeschlossen.] Daher können c_5, c_6 nicht verschwinden, und ebenso ergibt sich, daß c_7, c_8 von Null verschieden sind.

Multipliziert man jetzt die $A_{\nu\mu}$ mit $\frac{1}{3} c_\mu$ $(\mu = 5, \ldots, 8)$, so kommt

$$\begin{cases} A'_{0\mu} = c_\mu m_1 (\varepsilon m_0 + m_2) = c_\mu l_0, \\ A'_{1\mu} = c_\mu \varepsilon m_0 (m_1 + \varepsilon m_2) = c_\mu l_1. \end{cases} \tag{45}$$

Wir bemerken für späteren Gebrauch gleich hier, daß

$$l_0 - \varepsilon l_1 = \sum_{\mu<\nu} m_\mu m_\nu > 0 \tag{46}$$

ist. Setzt man die Größen (45) in die beiden letzten Gleichungen (36) ein, so ergibt sich, wegen $c_\mu \neq 0$,

$$B'_{0\mu} = -\tfrac{2}{3}(\bar{a} l_0 + \bar{b} l_1), \qquad B'_{1\mu} = -\tfrac{2}{3}(\bar{c} l_0 + \bar{d} l_1)$$

oder gemäß (37) und (45) nach leichter Rechnung

$$\begin{cases} B'_{0\mu} = m_1 (-\varepsilon^2 m_0 + m_2)(\varepsilon m_0 - m_1 - \varepsilon^2 m_2) = \bar{l}_0 \bar{p} = \bar{k}_0, \\ B'_{1\mu} = -\varepsilon^2 m_0 (m_1 - \varepsilon^2 m_2)(\varepsilon m_0 - m_1 - \varepsilon^2 m_2) = \bar{l}_1 \bar{p} = \bar{k}_1. \end{cases} \tag{47}$$

Durch Einsetzen von (45) und (47) in (43) erhält man nun das Ergebnis

$$u^*_{\nu\mu} = c_\mu l_\nu e^{\varrho_\mu t}, \qquad \bar{u}^*_{\nu\mu} = \bar{k}_\nu e^{\varrho_\mu t} \qquad (\nu = 0, 1;\ \mu = 5, \ldots, 8).$$

Da die ϱ_μ paarweise entgegengesetzte rein imaginäre Zahlen sind, können statt dessen auch die Lösungen

$$u_{\nu\mu}^{**} = k_\nu e^{-\varrho_\mu t}, \qquad \bar{u}_{\nu\mu}^{**} = c_\mu \bar{l}_\nu e^{-\varrho_\mu t}$$

genommen werden. Durch Linearkombination der $u_{\nu\mu}^{*}$ und der $u_{\nu\mu}^{**}$ kann man vier unabhängige konjugiert-komplexe Lösungen erhalten; wir wählen die folgenden:

$$(48)\quad \begin{cases} u_{\nu 5} = i\,(u_{\nu 5}^{*} - u_{\nu 5}^{**}) - i\,(u_{\nu 6}^{*} - u_{\nu 6}^{**}) \\ \qquad = \imath k_\nu (e^{i\beta_1 t} - e^{-i\beta_1 t}) + i l_\nu (c_5 e^{i\beta_1 t} - c_6 e^{-i\beta_1 t}), \\ \bar{u}_{\nu 5} = i\,(\bar{u}_{\nu 5}^{*} - \bar{u}_{\nu 5}^{**}) - i\,(\bar{u}_{\nu 6}^{*} - \bar{u}_{\nu 6}^{**}) \\ \qquad = i \bar{k}_\nu (e^{i\beta_1 t} - e^{-i\beta_1 t}) + i \bar{l}_\nu (c_6 e^{i\beta_1 t} - c_5 e^{-i\beta_1 t}). \end{cases}$$

$$(49)\quad \begin{cases} u_{\nu 6} = u_{\nu 5}^{*} + u_{\nu 5}^{**} + u_{\nu 6}^{*} + u_{\nu 6}^{**} \\ \qquad = k_\nu (e^{i\beta_1 t} + e^{-i\beta_1 t}) + l_\nu (c_5 e^{i\beta_1 t} + c_6 e^{-i\beta_1 t}), \\ \bar{u}_{\nu 6} = \bar{u}_{\nu 5}^{*} + \bar{u}_{\nu 5}^{**} + \bar{u}_{\nu 6}^{*} + \bar{u}_{\nu 6}^{**} \\ \qquad = \bar{k}_\nu (e^{i\beta_1 t} + e^{-i\beta_1 t}) + \bar{l}_\nu (c_6 e^{i\beta_1 t} + c_5 e^{-i\beta_1 t}). \end{cases}$$

$$(50)\quad \begin{cases} u_{\nu 7} = i k_\nu (e^{i\beta_2 t} - e^{-i\beta_2 t}) + i l_\nu (c_7 e^{i\beta_2 t} - c_8 e^{-i\beta_2 t}), \\ \bar{u}_{\nu 7} = i \bar{k}_\nu (e^{i\beta_2 t} - e^{-i\beta_2 t}) + i \bar{l}_\nu (c_8 e^{i\beta_2 t} - c_7 e^{-i\beta_2 t}). \end{cases}$$

$$(51)\quad \begin{cases} u_{\nu 8} = k_\nu (e^{i\beta_2 t} + e^{-i\beta_2 t}) + l_\nu (c_7 e^{i\beta_2 t} + c_8 e^{-i\beta_2 t}), \\ \bar{u}_{\nu 8} = \bar{k}_\nu (e^{i\beta_2 t} + e^{-i\beta_2 t}) + \bar{l}_\nu (c_8 e^{i\beta_2 t} + c_7 e^{-i\beta_2 t}). \end{cases}$$

Mit (32) bis (35) und (48) bis (51) ist ein Fundamentalsystem von Lösungen der Variationsgleichungen gefunden. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination der acht partikulären mit *reellen* Koeffizienten.

§ 5.

Die Lösungenschar mit Periodizitätsbedingungen.

Aus irgendeiner Lösung der verkürzten Gleichungen (31) erhält man sogleich eine Lösungenschar für die vollständigen Gleichungen (31). Wir wollen unter

$$b_1, b_2, \ldots, b_7$$

willkürliche reelle Konstanten verstehen und für jene Ausgangslösung der verkürzten Gleichungen die folgende wählen:

$$(52)\qquad u_\nu = u_{\nu 8} + \sum_{\mu=1}^{7} b_\mu u_{\nu\mu} \qquad (\nu = 0, 1).$$

Nach bekannten[21]) Sätzen läßt sich die durch die Anfangsbedingungen[22])

$$U_\nu^0 = u_{\nu 8}^0 + \sum_{\mu=1}^{7} b_\mu u_{\nu\mu}^0, \qquad \dot{U}_\nu^0 = \dot{u}_{\nu 8}^0 + \sum_{\mu=1}^{7} b_\mu \dot{u}_{\nu\mu}^0 \tag{53}$$

eindeutig bestimmte Lösung der vollständigen Gleichungen (31)

$$U_\nu = U_\nu(t) = U_\nu(t, b_1, \ldots, b_7, \lambda) \qquad (\nu = 0, 1) \tag{54}$$

für ein beliebig großes Intervall $0 \leqq t \leqq \tau$ nach Potenzen der b_μ und von λ entwickeln, solange nur die $|b_\mu|$ und $|\lambda|$ hinreichend klein bleiben.

Der Vergleich von (52) und (53) zeigt, daß für $\lambda = 0$ die Lösung (54) sich auf (52) reduziert. Für das Wertesystem

$$\lambda = b_1 = b_2 = \ldots = b_7 = 0$$

ist überdies die *Periode* $\frac{2\pi}{\beta_2}$ nach (51) vorhanden. Die Gleichungen (31) enthalten die Zeit nicht explizit. *Daher wird* (54) *die* wenig verschiedene *Periode*

$$T = \frac{2\pi + \delta}{\beta_2}$$

haben, wenn es gelingt, δ und die b_μ so als Funktionen von λ zu bestimmen, daß *die Periodizitätsbedingungen*

$$\begin{cases} f_\nu \equiv U_\nu(T, b_1, \ldots, b_7, \lambda) - U_\nu(0, b_1, \ldots, b_7, \lambda) = 0, \\ f_\nu' \equiv \dot{U}_\nu(T, b_1, \ldots, b_7, \lambda) - \dot{U}_\nu(0, b_1, \ldots, b_7, \lambda) = 0 \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1) \tag{55}$$

identisch in λ *erfüllt sind.*

(55) sind zusammen mit den konjugiert-komplexen ($\overline{55}$) acht Gleichungen mit den acht Unbekannten $b_1, \ldots b_7, \delta$, die ausführlicher geschrieben lauten:

$$\begin{aligned} f_0 \equiv\ & b_2 i \varepsilon^2 T + b_3 [\varepsilon^2 (e^{i\alpha T} - 1) - 3\varepsilon^2 (e^{-i\alpha T} - 1)] \\ & + b_4 i [\varepsilon^2 (e^{i\alpha T} - 1) + 3\varepsilon^2 (e^{-i\alpha T} - 1)] \\ & + b_5 i [(k_0 + l_0 c_6)(e^{i\beta_1 T} - 1) - (k_0 + l_0 c_6)(e^{-i\beta_1 T} - 1)] \\ & + b_6 [(k_0 + l_0 c_5)(e^{i\beta_1 T} - 1) + (k_0 + l_0 c_6)(e^{-i\beta_1 T} - 1)] \\ & + b_7 i [(k_0 + l_0 c_7)(e^{i(2\pi+\delta)} - 1) - (k_0 + l_0 c_8)(e^{-i(2\pi+\delta)} - 1)] \\ & + (k_0 + l_0 c_7)(e^{i(2\pi+\delta)} - 1) + (k_0 + l_0 c_8)(e^{-i(2\pi+\delta)} - 1) + \lambda \mathfrak{P}^{23}) = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

---

[21]) Vgl. etwa J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 1. Aufl., 1905, S. 306; 2. Aufl., 1927, S. 160.

[22]) Der obere Index 0 bedeutet $t = 0$. Da in allen Lösungen (32) bis (35) und (48) bis (51) statt t auch $t - t_0$ geschrieben werden kann, wo t_0 eine beliebige Konstante ist, können die Anfangswerte ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch zu einem solchen Zeitpunkt t_0 genommen werden, daß eins der b_μ, etwa b_1, wegfällt. Von dieser Möglichkeit werden wir später Gebrauch machen.

[23]) $\mathfrak{P}$ ist jedesmal das Symbol für eine Potenzreihe in $b_1, b_2, \ldots, b_7, \lambda$.

$$(57)\quad f_1 \equiv b_2 i\varepsilon T + b_3[\varepsilon(e^{i\alpha T}-1) - 3\varepsilon(e^{-i\alpha T}-1)]$$
$$+ b_4 i[\varepsilon(e^{i\alpha T}-1) + 3\varepsilon(e^{-i\alpha T}-1)]$$
$$+ b_5 i[(k_1+l_1c_5)(e^{i\beta_1 T}-1) - (k_1+l_1c_6)(e^{-i\beta_1 T}-1)] + \ldots$$
$$+ (k_1+l_1c_7)(e^{i(2\pi+\delta)}-1) + (k_1+l_1c_8)(e^{-i(2\pi+\delta)}-1) + \lambda\mathfrak{P} = 0.$$

$$(58)\quad f_0' \equiv b_3 i\alpha[\varepsilon^2(e^{i\alpha T}-1) + 3\varepsilon^2(e^{-i\alpha T}-1)]$$
$$- b_4\alpha[\varepsilon^2(e^{i\alpha T}-1) - 3\varepsilon^2(e^{-i\alpha T}-1)]$$
$$- b_5\beta_1[(k_0+l_0c_5)(e^{i\beta_1 T}-1) + (k_0+l_0c_6)(e^{-i\beta_1 T}-1)]$$
$$+ b_6 i\beta_1[(k_0+l_0c_5)(e^{i\beta_1 T}-1) - (k_0+l_0c_6)(e^{-i\beta_1 T}-1)]$$
$$- b_7\beta_2[(k_0+l_0c_7)(e^{i(2\pi+\delta)}-1) + (k_0+l_0c_8)(e^{-i(2\pi+\delta)}-1)]$$
$$+ i\beta_2[(k_0+l_0c_7)(e^{i(2\pi+\delta)}-1)$$
$$- (k_0+l_0c_8)(e^{-i(2\pi+\delta)}-1)] + \lambda\mathfrak{P} = 0.$$

$$(59)\quad f_1' \equiv b_3 i\alpha[\varepsilon(e^{i\alpha T}-1) + 3\varepsilon(e^{-i\alpha T}-1)]$$
$$- b_4\alpha[\varepsilon(e^{i\alpha T}-1) - 3\varepsilon(e^{-i\alpha T}-1)]$$
$$- b_5\beta_1[(k_1+l_1c_5)(e^{i\beta_1 T}-1) + (k_1+l_1c_6)(e^{-i\beta_1 T}-1)] + \ldots$$
$$+ i\beta_2[(k_1+l_1c_7)(e^{i(2\pi+\delta)}-1)$$
$$- (k_1+l_1c_8)(e^{-i(2\pi+\delta)}-1)] + \lambda\mathfrak{P} = 0.$$

Die weggelassenen Summanden gehen aus den entsprechenden der vorhergehenden Gleichungen hervor, indem der Index 0 durch 1 ersetzt wird. Zu den Gleichungen (56) bis (59) treten die vier konjugiert-komplexen.

Das Gleichungssystem (55) hat für $\lambda = 0$ die Lösung

$$\delta = b_1 = \ldots = b_7 = 0.$$

Seine Lösbarkeit für der Null benachbarte Werte von λ erschließen wir aus dem Verhalten der Funktionaldeterminante

$$(60)\qquad \Delta_8 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial b_1} & \frac{\partial f_0}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial b_7} & \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial b_1} & & & & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial \bar{f}_1'}{\partial b_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial \bar{f}_1'}{\partial \delta} \end{vmatrix},$$

wo $\lambda = \delta = b_1 = \ldots = b_7 = 0$ zu setzen ist.

In dieser Determinante verschwindet die 1. und die 7. Spalte, wie man aus (56) bis (59) sofort ersieht; also ist $\Delta_8 = 0$. Wir werden jedoch im nächsten Paragraphen zeigen, daß bei willkürlicher Wahl von b_1 und b_7 zwei passend

herausgegriffene der Bedingungen (55) und ($\overline{55}$) überflüssig sind. Hat man die Unbekannten nämlich so gewählt, daß alle diese Gleichungen außer (etwa)

$$f_1' = 0, \quad \bar{f}_1' = 0$$

befriedigt sind, so wird sich herausstellen, daß die vorstehenden Gleichungen infolge des Bestehens des Energie- und Flächensatzes von selbst auch erfüllt sind.

In § 7 ergibt sich dann, daß die aus Δ_8 durch Streichen überflüssiger Zeilen und Spalten entstehende Determinante 6. Grades im allgemeinen nicht verschwindet.

§ 6.

Zwei Periodizitätsbedingungen als Folge der übrigen.

Wir nehmen an, von den acht Periodizitätsbedingungen seien die sechs

$$(61) \quad \begin{cases} f_\nu \equiv U_\nu(T) - U_\nu(0) = 0, \quad \bar{f}_\nu \equiv \bar{U}_\nu(T) - \bar{U}_\nu(0) = 0 & (\nu = 0, 1), \\ f_0' \equiv \dot{U}_0(T) - \dot{U}_0(0) = 0, \quad \bar{f}_0' \equiv \dot{\bar{U}}_0(T) - \dot{\bar{U}}_0(0) = 0 \end{cases}$$

durch geeignete Wahl der Unbekannten b_μ, δ bereits erfüllt, und zeigen, daß dann die zwei übrigbleibenden

$$(62) \qquad f_1' \equiv \dot{U}_1(T) - \dot{U}_1(0) = 0, \quad \bar{f}_1' \equiv \dot{\bar{U}}_1(T) - \dot{\bar{U}}_1(0) = 0$$

von selbst erfüllt sind.

Zu diesem Zweck setzen wir in den Flächensatz (14), betrachtet in unserem Spezialfall des Dreikörperproblems, die Werte der Lösung (54) ein, das eine Mal genommen zur Zeit $t = T$, das andere Mal für $t = 0$; hernach bilden wir die Differenz dieser beiden Gleichungen. Dann kann man links durch λ dividieren; ferner fallen alle Glieder der ersten Zeile wegen (61) fort und es bleibt, in leicht verständlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} &-\frac{iM}{2}\left[m_0(-\varepsilon\dot{U}_0 - \varepsilon^2\dot{\bar{U}}_0) + m_1(-\varepsilon^2\dot{U}_1 - \varepsilon\dot{\bar{U}}_1)\right]\Big|_0^T \\ &+\frac{i}{2}m_0^2(-\varepsilon\dot{U}_0 - \varepsilon^2\dot{\bar{U}}_0) + \frac{i}{2}m_1^2(-\varepsilon^2\dot{U}_1 - \varepsilon\dot{\bar{U}}_1)\Big|_0^T \\ &+\frac{i}{2}m_0 m_1[-\varepsilon^2\dot{U}_0 - \varepsilon\dot{\bar{U}}_0 - \varepsilon\dot{U}_1 - \varepsilon^2\dot{\bar{U}}_1]\Big|_0^T + (\lambda)\Big|_0^T = 0. \end{aligned}$$

Bei Aufnahme der Bezeichnungen (62) und mit Rücksicht auf (61) und (29) wird dies

$$\frac{i}{2}m_1 m_2(\varepsilon^2 f_1' + \varepsilon\bar{f}_1') - \frac{i}{2}m_0 m_1(f_1' - \bar{f}_1') + (\lambda) = 0$$

oder

$$(63) \qquad (-m_0 + \varepsilon^2 m_2) f_1' + (m_0 + \varepsilon m_2)\bar{f}_1' + (\lambda) = 0.$$

Hier bedeutet (λ) ein mit λ multipliziertes Polynom in $f_1', \bar{f}_1'$ und den Anfangswerten.

Bildet man in derselben Weise die Differenz des Integrals (20) für $t = T$ und $t = 0$, so kann durch λ^2 dividiert werden; weiter fällt das Glied mit P fort und es bleibt

$$M[m_0|\dot{U}_0|^2 + m_1|\dot{U}_1|^2] - m_0^2|\dot{U}_0|^2 - m_1^2|\dot{U}_1|^2 - m_0 m_1(\dot{U}_0\dot{\bar{U}}_1 + \dot{\bar{U}}_0\dot{U}_1)\Big|_0^T + (\lambda)\Big|_0^T = 0.$$

Nun ist nach (62)

$$|\dot{U}_1(T)|^2 - |\dot{U}_1^0|^2 = \bar{f}_1' f_1' + \dot{\bar{U}}_1^0 f_1' + \dot{U}_1^0 \bar{f}_1',$$

also kommt wegen des Bestehens von (61)

$$m_1(m_0 + m_2)(f_1'\bar{f}_1' + \dot{\bar{U}}_1^0 f_1' + \dot{U}_1^0 \bar{f}_1') - m_0 m_1(\dot{\bar{U}}_0^0 f_1' + \dot{U}_0^0 \bar{f}_1') + (\lambda) = 0$$

oder

$$(64)\qquad (m_0 + m_2) f_1'\bar{f}_1' + [(m_0 + m_2)\dot{\bar{U}}_1^0 - m_0\dot{\bar{U}}_0^0] f_1' + [(m_0 + m_2)\dot{U}_1^0 - m_0\dot{U}_0^0]\bar{f}_1' + (\lambda) = 0.$$

Hier ist (λ) eine Potenzreihe in λ ohne konstantes Glied mit Koeffizienten, die Polynome in $f_1', \bar{f}_1'$ und den Anfangswerten sind.

Die Gleichungen (63), (64) haben ihrer Entstehungsweise nach stets die Lösung

$$f_1' = 0, \quad \bar{f}_1' = 0.$$

Es ist dies aber auch die einzige, die für $\lambda = b_\mu = \delta = 0$ in $f_1' = 0, \bar{f}_1' = 0$ übergeht; denn für dieses Wertesystem ist die Funktionaldeterminante von (63), (64) nach $f_1', \bar{f}_1'$

$$D = \begin{vmatrix} -m_0 + \varepsilon^2 m_2 & m_0 + \varepsilon m_2 \\ (m_0 + m_2)\dot{\bar{U}}_1^0 - m_0\dot{\bar{U}}_0^0 & (m_0 + m_2)\dot{U}_1^0 - m_0\dot{U}_0^0 \end{vmatrix}$$
$$= 2\Re\{(-m_0 + \varepsilon^2 m_2)[(m_0 + m_2)\dot{U}_1^0 - m_0\dot{U}_0^0]\}$$

von Null verschieden. Man kennt nämlich (vgl. (53), (51) und (44), (41))

$$\dot{U}_0^0 = i\beta_2 l_0(c_7 - c_8) = -\tfrac{8}{3} i\alpha\beta_2^3 l_0,$$
$$\dot{U}_1^0 = i\beta_2 l_1(c_7 - c_8) = -\tfrac{8}{3} i\alpha\beta_2^3 l_0$$

und daher ist

$$D = \tfrac{16}{3} i\alpha\beta_2^3 \Im\{(-m_0 + \varepsilon^2 m_2)[(m_0 + m_2) l_1 - m_0 l_0]\}.$$

Nun hat man nach (28), (45), (47)

$$\Re\,(-m_0+\varepsilon^2 m_2)<0,\qquad \Im\,(-m_0+\varepsilon^2 m_2)<0.$$
$$\Re\,\{(m_0+m_2)\,l_1-m_0 l_0\}=$$
$$\Re\,\{\varepsilon\,(m_0+m_2)\,m_0\,(m_1+\varepsilon m_2)-m_0 m_1\,(\varepsilon m_0+m_2)\}<0.$$
$$\Im\,\{(m_0+m_2)\,l_1-m_0 l_0\}<0.$$

Mittels dieser Ungleichungen erkennt man sofort, daß D nicht verschwindet, womit die Behauptung zu Anfang des Paragraphen nachgewiesen ist.

§ 7.

Berechnung der Funktionaldeterminante.

Wir wählen jetzt die Unbekannte $b_1 = 0$ und b_7 willkürlich. Das erste bedeutet nichts anderes, als daß wir den Zeitanfangspunkt festgelegt haben[24]). Nach Weglassung der entbehrlichen Gleichungen (62) entsteht aus (55) und (55̄) ein System von sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten, das auch für von Null verschiedene λ im allgemeinen eine eindeutige Auflösung zuläßt. Denn die zugehörige Funktionaldeterminante Δ_6 nach $b_2, b_3, \ldots, b_6, \delta$. die aus Δ_8, Gleichung (60), durch Streichen der 1. und 7. Spalte sowie der 7. und 8. Zeile hervorgeht, verschwindet nur in Ausnahmefällen. wie wir jetzt zeigen werden.

Die 1. Spalte von Δ_6 (also die 2. von Δ_8) enthält den Faktor $\frac{2i\pi\varepsilon}{\beta_2}$, der vor die Determinante gesetzt werden kann.

Für die folgenden Spalten führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$\varrho = e^{\frac{2i\pi\beta_1}{\beta_2}}-1,\qquad \sigma = e^{\frac{2i\pi\alpha}{\beta_2}}-1. \tag{65}$$

Die 2. Spalte von Δ_6 hat dann nach (60) und (56) bis (58) das Aussehen:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\sigma - 3\,\varepsilon^2\sigma\\ 3\,\varepsilon\sigma - \varepsilon\bar{\sigma}\\ \varepsilon\sigma - 3\,\varepsilon\sigma\\ 3\,\varepsilon^2\sigma - \varepsilon^2\bar{\sigma}\\ i\alpha\,(\varepsilon^2\sigma + 3\,\varepsilon^2\bar{\sigma})\\ i\alpha\,(3\,\varepsilon\sigma + \varepsilon\sigma).\end{gathered}$$

Das Element der ν-ten Zeile dieser Spalte hat die Gestalt

$$B_\nu\sigma - C_\nu\sigma. \tag{66}$$

[24]) Vgl. Anm. [22]).

Aus (56) bis (58) sieht man, daß dann das Element der ν-ten Zeile der 3. Spalte folgendermaßen lautet:

$$i\,(B_\nu\sigma + C_\nu\bar{\sigma}). \tag{67}$$

Die Determinante bleibt ungeändert, wenn der Faktor $2\,i\sigma\bar{\sigma}$ vorgesetzt wird und an die Stelle von (66) bzw. (67) die folgenden Linearkombinationen dieser Spalten treten:

$$B_\nu \quad \text{bzw.} \quad C_\nu.$$

Danach kann man noch aus jeder der beiden Spalten den Faktor ε herausziehen.

Die 5. Spalte (also die 6. von Δ_8) lautet mit Benutzung von (65):

$$\begin{gathered}
(k_0 + l_0 c_5)\,\varrho + (k_0 + l_0 c_6)\,\bar{\varrho} \\
(\bar{k}_0 + \bar{l}_0 c_6)\,\varrho + (\bar{k}_0 + \bar{l}_0 c_5)\,\bar{\varrho} \\
(k_1 + l_1 c_5)\,\varrho + (k_1 + l_1 c_6)\,\bar{\varrho} \\
(\bar{k}_1 + \bar{l}_1 c_6)\,\varrho + (\bar{k}_1 + \bar{l}_1 c_5)\,\bar{\varrho} \\
i\beta_1\,[(k_0 + l_0 c_5)\,\varrho - (k_0 + l_0 c_6)\,\bar{\varrho}] \\
i\beta_1\,[(\bar{k}_0 + \bar{l}_0 c_6)\,\varrho - (\bar{k}_0 + \bar{l}_0 c_5)\,\varrho].
\end{gathered}$$

Gegenüber der 4. Spalte liegen hier analoge Verhältnisse vor wie bei der 2. gegenüber der 3. Spalte; man kann also die Elemente beider Spalten nach Vorsetzen des Faktors $2\,i\,\varrho\,\bar{\varrho}$ ebenfalls durch einfachere ersetzen. Addiert man hernach noch die 5. Spalte zur 4., so lauten die Elemente etwa der 1. Zeile

$$\begin{aligned}
&\text{in der 4. Spalte } l_0\,(c_5 - c_6), \\
&\text{in der 5. Spalte } k_0 + l_0 c_5.
\end{aligned}$$

In der letzten Spalte fallen die Exponentialfunktionen überhaupt weg. Setzt man das Produkt aller vortretenden Faktoren

$$-\frac{2\,i\pi\,\varepsilon}{\beta_2}\cdot\varepsilon^2\cdot 4\,|\varrho|^2\cdot|\sigma|^2 = R, \tag{68}$$

so kommt

$$\Delta_6 = R\,\Delta_6', \tag{69}$$

wo

$$\Delta_6' =$$

$$\begin{vmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & 3\varepsilon & l_0(c_5 - c_6) & k_0 + l_0 c_5 & i l_0 (c_7 - c_8) \\
1 & 3 & 1 & \bar{l}_0(c_6 - c_5) & \bar{k}_0 + \bar{l}_0 c_6 & i\bar{l}_0(c_8 - c_7) \\
1 & 1 & 3 & l_1(c_5 - c_6) & k_1 + l_1 c_5 & i l_1 (c_7 - c_8) \\
\varepsilon & 3\varepsilon & \varepsilon & \bar{l}_1(c_6 - c_5) & \bar{k}_1 + \bar{l}_1 c_6 & i\bar{l}_1(c_8 - c_7) \\
0 & i\alpha\varepsilon & -3i\alpha\varepsilon & i\beta_1[2k_0 + l_0(c_5 + c_6)] & r_{55} & -2\beta_2 k_0 - \beta_2 l_0(c_7 + c_8) \\
0 & 3i\alpha & -i\alpha & i\beta_1[2\bar{k}_0 + \bar{l}_0(c_5 + c_6)] & r_{56} & -2\beta_2\bar{k}_0 - \beta_2\bar{l}_0(c_7 + c_8)
\end{vmatrix}.$$

Hier sind r_{55}, r_{56} Elemente, deren genauer Wert sich nachher als belanglos herausstellen wird.

Subtrahiert man in Δ_6' ein Viertel der Summe der 2. und 3. Spalte von der 1., so werden dort die ersten vier Elemente Null. Weiter zieht man die halbe 4. Spalte von der 5. ab und beachtet, daß nach (44)

$$\tfrac{1}{2}(c_5 + c_6) = \tfrac{2}{3}\beta_1^2 + M.$$

Da ebenfalls nach (44)

$$c_5 - c_6 = -\tfrac{8}{3}\alpha\beta_1, \quad c_7 - c_8 = -\tfrac{8}{3}\alpha\beta_2,$$

so kann man aus der 4. Spalte den Faktor β_1, aus der 6. den Faktor β_2 vorsetzen. Addiert man dann die mit $(-i)$ multiplizierte neue 4. Spalte zur neuen 6., so werden dort wieder die ersten vier Elemente Null. Nach all diesen Maßnahmen folgt

(70)
$$\Delta_6 = \beta_1\beta_2 \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 3\varepsilon & -\frac{8}{3}\alpha l_0 & k_0 + l_0\left(\frac{2}{3}\beta_1^2 + M\right) & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \frac{8}{3}\alpha\bar{l}_0 & \bar{k}_0 + \bar{l}_0\left(\frac{2}{3}\beta_1^2 + M\right) & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{8}{3}\alpha l_1 & k_1 + l_1\left(\frac{2}{3}\beta_1^2 + M\right) & 0 \\ 0 & 3\varepsilon & \varepsilon & \frac{8}{3}\alpha\bar{l}_1 & \bar{k}_1 + \bar{l}_1\left(\frac{2}{3}\beta_1^2 + M\right) & 0 \\ \frac{i}{2}\alpha\varepsilon & i\alpha\varepsilon & -3i\alpha\varepsilon & r_{45} & r_{55} & \frac{4}{3}l_0(\beta_1^2 - \beta_2^2) \\ -\frac{i}{2}\alpha & 3i\alpha & -i\alpha & r_{46} & r_{56} & \frac{4}{3}\bar{l}_0(\beta_1^2 - \beta_2^2) \end{vmatrix}.$$

Der Wert der Elemente r_{45}, r_{46} spielt keine Rolle.

Jetzt zerfällt Δ_6' in das Produkt einer zwei- und einer vierreihigen Determinante:

(71)
$$\Delta_6' = \tfrac{2}{3} i\alpha\beta_1\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2) \begin{vmatrix} \varepsilon & l_0 \\ -1 & \bar{l}_0 \end{vmatrix} \Delta_4,$$

wobei der Faktor vor den Determinanten nach (41) nicht verschwindet. Die zweireihige Determinante ist nach (45) gleich

(72)
$$\varepsilon m_1(-\varepsilon^2 m_0 + m_2) + m_1(\varepsilon m_0 + m_2) = (1+\varepsilon)\, m_1(m_0 + m_2),$$

verschwindet also nicht. Δ_4 aber kann nach (70) in eine Summe zweier Determinanten zerlegt werden:

(73)
$$\Delta_4 = \tfrac{8}{3}\alpha(D_1 + \tfrac{2}{3}\beta_1^2 D_2),$$

wo

$$D_1 = \begin{vmatrix} \varepsilon & 3\varepsilon & -l_0 & k_0 + M l_0 \\ 3 & 1 & \bar{l}_0 & \bar{k}_0 + M \bar{l}_0 \\ 1 & 3 & -l_1 & k_1 + M l_1 \\ 3\varepsilon & \varepsilon & \bar{l}_1 & \bar{k}_1 + M \bar{l}_1 \end{vmatrix}$$

und D_2 sich von D_1 nur durch die geänderte 4. Spalte unterscheidet:

(von oben nach unten) $l_0, \bar{l}_0, l_1, \bar{l}_1$.

In D_1 addieren wir die mit $(-\varepsilon)$ multiplizierte 2. bzw. 3. Zeile zur 4. bzw. 1. Zeile; dann werden in den letzteren die beiden ersten Elemente Null und es kommt

$$D_1 = 8 \begin{vmatrix} -l_0 + \varepsilon l_1 & k_0 - \varepsilon k_1 + M(l_0 - \varepsilon l_1) \\ \bar{l}_1 - \varepsilon \bar{l}_0 & \bar{k}_1 - \varepsilon \bar{k}_0 + M(\bar{l}_1 - \varepsilon \bar{l}_0) \end{vmatrix}$$

oder nach (47)

(74)
$$\begin{aligned} D_1 &= -8\varepsilon |l_0 - \varepsilon l_1|^2 \begin{vmatrix} -1 & p + M \\ 1 & \bar{p} + M \end{vmatrix} \\ &= 8\varepsilon |l_0 - \varepsilon l_1|^2 (m_0 - 2m_1 + m_2 + 2M) \\ &= 24\varepsilon (m_0 + m_2) |l_0 - \varepsilon l_1|^2. \end{aligned}$$

Ebenso ist

(75)
$$\begin{aligned} D_2 &= 8 \begin{vmatrix} -l_0 + \varepsilon l_1 & l_0 - \varepsilon l_1 \\ \bar{l}_1 - \varepsilon \bar{l}_0 & \bar{l}_1 - \varepsilon \bar{l}_0 \end{vmatrix} \\ &= 8 |l_0 - \varepsilon l_1|^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon & -\varepsilon \end{vmatrix} \\ &= 16\varepsilon |l_0 - \varepsilon l_1|^2. \end{aligned}$$

Setzt man (74) und (75) in (73) ein, so erkennt man mit Hilfe von (46), daß

$$\boxed{\Delta_4 \neq 0,}$$

daher ist nach (71) und (72) auch

$$\boxed{\Delta_6' \neq 0}$$

und schließlich nach (69)

$$\boxed{\Delta_6 \neq 0,}$$

sofern nicht R verschwindet. Das kann aber nach (68) und (65) nur geschehen, wenn β_1 oder α ein ganzzahliges Vielfaches von β_2 ist.

Unter der Voraussetzung (42) *und der folgenden*:

$$\boxed{\beta_1 \neq n_1 \beta_2, \qquad \alpha \neq n_2 \beta_2, \qquad (n_j \text{ ganz})}$$

ist somit nach dem, was zu Anfang dieses Paragraphen gesagt wurde, *eine Schar periodischer, zur Wurzel $i\beta_2$ der charakteristischen Gleichung gehöriger Bahnen in der Umgebung der Dreieckslösung nachgewiesen.*

Dieses Ergebnis hatte auch H. E. Buchanan erhalten.

§ 8.

Schlußbemerkung.

Die gefundene Schar hängt noch von zwei Parametern ab. Denn auch bei festem λ enthält das Anfangsstadium (53) in b_7 noch ein willkürliches Element, und die beiden Parameter sind unabhängig, da ja der Zeitanfangspunkt festliegt (siehe § 7, Anfang).

Entsprechend läßt sich, wenn die Bedingung (42) erfüllt ist, die Existenz einer zweiparametrigen Schar von Bahnen mit annähernd der Periode $\frac{2\pi}{\beta_1}$ beweisen; denn da nach (41) und (42a) $\alpha > \beta_1 > \frac{\alpha}{\sqrt{2}} > \beta_2$ ist, kann der am Schluß von § 7 erwähnte Ausnahmefall hier nicht auftreten.

Diese beiden Scharen sind voneinander wegen ungleicher Perioden verschieden; auch mit den Lagrangeschen Ellipsen $\left(\text{Periode } \frac{2\pi}{\alpha}\right)$ stimmen sie nicht überein. Das kann man auch durch Rechnung bestätigen: die Verhältnisse der Abstände der drei Massen bleiben im Lauf der Zeit nicht konstant.

Die Lagrangeschen Ellipsen können mit unserm Ansatz natürlich auch erhalten werden. Sie erscheinen als kleine Umläufe mit annähernd der Periode $\frac{2\pi}{\alpha}$. Dabei tauschen in (52), (53) die Lösungen (51) und (34) ihre Rollen. Sie bilden bei festgelegtem Zeitanfang eine zweiparametrige Schar, wie sich auch hier ergibt.

(Eingegangen am 8. Dezember 1938.)

Beweis eines Fundamentalsatzes der Kurven 3. Ordnung.

Von

Heinrich Kapferer in Freiburg i. Br.

Der Anlaß zu nachfolgenden Mitteilungen ist ein Satz, der gewöhnlich folgendermaßen zitiert wird:

Satz 1. *Alle Kurven 3. Ordnung, welche durch 8 verschiedene beliebig ausgewählte Punkte der Ebene gehen, enthalten sämtlich ein und denselben 9. Punkt und bilden ein Büschel.*

Der Satz wird ungenau, falls von den 8 Punkten 4 auf einer Geraden liegen; denn dann haben alle K_3 durch jene 8 Punkte, infolge des Bézoutschen Satzes, die *ganze* Gerade als Bestandteil gemeinsam, man kann also von einem bestimmten 9. Punkt nicht reden. Ferner wird der Satz ungenau, falls 7 der 8 Punkte auf einem (nicht zerfallenden) Kegelschnitt liegen (ein zerfallender Kegelschnitt würde, wie im vorigen Fall, bedeuten, daß mindestens 4 Punkte auf einer Geraden liegen); denn dann haben alle K_3 durch jene 8 Punkte den *ganzen* Kegelschnitt als Bestandteil gemeinsam.

Wir werden daher den Satz 1 durch den folgenden ersetzen:

Satz 2. *8 verschiedene Punkte der Ebene bestimmen eindeutig den 9. Basispunkt eines Büschels von Kurven 3. Ordnung, vorausgesetzt, daß nicht 4 der 8 Punkte auf einer Geraden, und nicht 7 auf einem Kegelschnitt liegen.*

Daß dieser Satz 2 nun ausnahmslos richtig ist, wollen wir beweisen, und zwar nicht etwa deshalb, um einen neuen Beweis für eine längst bekannte Tatsache zu liefern, sondern weil es unmöglich ist — soweit ich und viele andere es nachprüfen konnten —, in der Literatur einen einwandfreien Beweis für das, was an dem Satz 1 tatsächlich richtig ist, zu finden.

Die üblichen Beweise erschöpfen sich nämlich in der Anführung des Cramerschen Paradoxons: Eine K_3 mit ihren 9 wesentlichen Koeffizienten braucht durch 9 verschiedene Punkte der Ebene noch nicht eindeutig bestimmt zu sein; falls nämlich diese 9 Punkte gleichzeitig den vollständigen Schnitt von 2 Kurven 3. Ordnung, etwa von $f_3 = 0$, $g_3 = 0$, ausmachen, so gibt es nicht nur eine einzige K_3 durch jene 9 assoziierten Punkte, sondern ein ganzes Büschel solcher, etwa $\lambda f_3 + \mu g_3$. Es gibt also *voneinander abhängige*

Punkte, und sicher sind je 9 verschiedene assoziierte Punkte voneinander abhängig, wobei noch hinzuzufügen ist *in bezug auf die Kurven 3. Ordnung*. Denn eine Anzahl Punkte, die bezüglich K_3 voneinander abhängig sind, brauchen es nicht bezüglich K_4 zu sein und umgekehrt.

Um den Begriff einer solchen Abhängigkeit zu präzisieren, gehen wir von der allgemeinen ternären Form $K_3(x, y, z)$ 3. Ordnung, mit ihren 10 unbestimmten Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, aus, und bezeichnen eine Anzahl von s verschiedenen Punkten (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, \ldots, s$ als voneinander abhängig in bezug auf Kurven 3. Ordnung, wenn die s Gleichungen

$$K(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, s,$$

es sind, aufgefaßt als lineare homogene Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$.

Wir kennen jetzt schon *drei Fälle* solcher *Abhängigkeit*, nämlich:

Erstens. 9 assoziierte Punkte, d. h. solche, die den vollständigen Schnitt von 2 Kurven 3. Ordnung ausmachen, sind in diesem Sinne voneinander abhängig.

Zweitens. 5 Punkte einer Geraden K_1 sind bezüglich K_3 voneinander abhängig in jenem Sinne; denn jede K_3 durch 4 von den 5 Punkten einer K_1 ist algebraisch teilbar durch K_1, jeder 5. Punkt derselben Geraden liegt also von selbst auf K_3, ist also von den übrigen 4 abhängig in dem angegebenen Sinn.

Drittens. 8 Punkte, die auf einem nicht zerfallenden Kegelschnitt liegen, sind abhängig bezüglich K_3; denn alle Polynome K_3 durch 7 dieser Punkte sind algebraisch teilbar durch K_2. Jeder 8. Punkt von K_2 liegt also von selbst auf K_3, ist also von den übrigen 7 Punkten abhängig in dem angegebenen Sinn.

Die Frage ist nun, ob es außer diesen drei Fällen von Abhängigkeit noch weitere Fälle von Abhängigkeit bezüglich der Kurven 3. Ordnung gibt.

Ohne Beantwortung dieser grundsätzlichen Frage kann überhaupt in keinem einzigen konkreten Falle entschieden werden, ob der Satz 1 in Wirksamkeit tritt oder nicht.

Ich stelle im folgenden einen Satz auf, der zum gewünschten Ziele führt. Dieser Hauptsatz und die zugehörigen beiden Hilfssätze sind gleich für Kurven *beliebiger* Ordnung ausgesprochen und bewiesen, da ihr Beweis dadurch nicht komplizierter wird, und da sie in dieser Form zugleich für andere Zwecke nützlich sein dürften. Zunächst ein

Hilfssatz 1. Die Gesamtheit G aller ternären Formen gleicher Ordnung n, deren $w = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Koeffizienten $a_1, \ldots, a_w$ einem und demselben System von homogenen linearen Gleichungen genügen, deren Rang r also

kleiner als die Anzahl jener Koeffizienten sein muß, bildet einen R-gliedrigen Modul von ternären Formen. Dabei besteht zwischen r und R die Beziehung

$$r + R = (n + 1)(n + 2) : 2,$$

d. h. es gibt R linear unabhängige ternäre Formen $U_1, U_2, \ldots, U_R$, welche jenem System linearer Gleichungen genügen, und die Gesamtheit G ist identisch mit der Gesamtheit der Polynome

$$l_1 U_1 + l_2 U_2 + \ldots + l_R U_R,$$

wo $l_1, l_2, \ldots, l_R$ willkürliche Parameter bedeuten.

Dieser inhaltlich wohlbekannte Hilfssatz 1 ist im Grunde nur eine Anwendung des Satzes der linearen Algebra, daß ein System von r linear unabhängigen homogenen linearen Gleichungen in t Unbestimmten, mit $t \geqq r$, genau $t - r$ linear unabhängige Lösungen hat. Darauf soll nicht näher eingegangen werden.

Hilfssatz 2. H und K seien 2 teilerfremde ternäre Formen gleicher Ordnung n. Keiner der Basispunkte des Büschels H, K soll gleichzeitig in H *und* in K Doppelpunkt sein. Dann behaupte ich:

Es gibt in dem durch H, K bestimmten Büschel nur *endlich* viele reduzible, d. h. zerfallende Kurven, es wird also die Summe $K + tH$, bei geeigneter Wahl des Parameters t, ein *irreduzibles* Polynom sein.

Beweis. Seien $A = K + t_1 H = U_i U_{n-i}$,

$B = K + t_2 H = V_j V_{n-j}$

irgend 2 verschiedene zerfallende Kurven des Büschels $K + tH$. Wegen $t_1 \neq t_2$ sind A, B linear unabhängig voneinander, also ist das Büschel (A, B) identisch mit dem Büschel (H, K), die Basispunkte sind also erhalten geblieben. Sämtliche Basispunkte von H, K sind nun sowohl Nullstellen des Produkts $U_i U_{n-i}$, als auch Nullstellen des Produktes $V_j V_{n-j}$.

Da man endlich viele Dinge nur auf endlich viele Arten in 2 Urnen verteilen kann, selbst dann, wenn es erlaubt ist, einige dieser Dinge in *beiden* Urnen je einmal unterzubringen, so gibt es auch nur endlich viele Verteilungsarten der Basispunkte des Büschels auf je 2 Faktoren. Gäbe es also unendlich viele verschiedene reduzible Polynome, so müßte mindestens eine Verteilungsart der Basispunkte mindestens zweimal vorkommen, z. B. diese: Die Basispunkte $P_1, P_2, \ldots, P_r$ seien Nullstellen von U_i und zugleich von V_j, die Basispunkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ seien Nullstellen von U_{n-i} und zugleich von V_{n-j}, und die genannten $r + s$ Punkte mögen die Gesamtheit der Basispunkte erschöpfen. Dann behaupten wir, daß kein Punkt P mit einem Punkt Q zusammenfallen kann. Würde dies nämlich geschehen, so würde ein solcher sowohl Nullstelle von U_i und U_{n-i} als auch Nullstelle von V_j und V_{n-j} sein

lso Doppelpunkt sowohl von A als von B, daher auch Doppelpunkt von $- B$, d. h. von H und daher auch von K sein. Das letztere ist aber entgegen er Voraussetzung.

Nachdem nun feststeht, daß kein Punkt P mit einem Punkt Q zusammenällt, kommt man zu einem Widerspruch: Einerseits haben $A = 0$, $B = 0$ ieselben Basispunkte, wie $H = 0$, $K = 0$, andererseits haben $A = 0$, B $= 0$ noch weitere, von den $r + s$ Punkten verschiedene Basispunkte, nämlich die Schnittpunkte von $U_i = 0$, $V_{n-j} = 0$, und die Schnittpunkte von $U_j = 0$, $V_{n-i} = 0$. Somit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Hauptsatz (H). *Es seien G, H, K drei ternäre Formen gleicher Ordnung n, G und H unter sich teilerfremd, H und K unter sich teilerfremd.*

G, H, K haben wenigstens $n^2 - 1$ verschiedene gemeinsame Nullstellen.

Behauptung. *Sobald $n \geqq 3$ ist, sind die drei Formen voneinander linear abhängig, d. h. es existieren drei Konstante c_1, c_2, c_3, die nicht alle sind, so daß*

$$c_1 G + c_2 H + c_3 K = 0$$

eine Identität in x, y, z ist.

Eine kürzere Fassung H' des Hauptsatzes:

Falls ein Büschel n-ter Ordnung wenigstens $n^2 - 1$, jedoch nur endlich viele, verschiedene Basispunkte besitzt, und falls $n \geqq 3$ ist, so sind schon je $n^2 - 1$ Basispunkte ausreichend, um das ganze Büschel zu bestimmen.

Beweis. Wir können, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, annehmen, daß K irreduzibel ist. Wenn nämlich K nicht irreduzibel ist, so ersetzen wir K durch $\bar{K} = K + tH$, wo der Parameter t geeignet gewählt ist, so daß $\bar{K}$ ein irreduzibles Polynom wird. Das ist stets möglich. Wäre nämlich $\bar{K}$ stets reduzibel, so wäre, auf Grund des Hilfssatzes 2, wenigstens einer der Basispunkte des Büschels H, K sowohl in H als in K Doppelpunkt, würde als Schnittpunkt somit mindestens 4fach zählen. Das widerspricht der Voraussetzung, daß $n^2 - 1$ verschiedene gemeinsame Punkte vorhanden sind.

1. Fall. G, H, K haben sogar n^2 verschiedene Punkte gemeinsam, also das Maximum von Punkten, das bei teilerfremden G, K möglich ist. In diesem Falle ist die behauptete lineare Abhängigkeit zwischen G, H, K identisch mit der Aussage des Noetherschen Fundamentalsatzes im einfachsten Fall. Da wir letzteren Satz aber hier umgehen wollen, schließen wir so:

Es sei P ein weiterer Punkt von K, der nicht Nullstelle von G ist. Setzt man dann $c = - H(P) : G(P)$, so geht die Kurve $cG + H = 0$ durch den Punkt P, also hat das Polynom $cG + H$ mit K mindestens $n^2 + 1$ verschiedene gemeinsame Nullstellen, also wegen Bézout und wegen der Irreduzibilität von K folgt Teilbarkeit:

$$cG + H \equiv 0 \,(K) \qquad \text{q. e. d.}$$

2. Fall. Genau $n^2 - 1$, aber nicht mehr, verschiedene gemeinsame Punkte von G, H, K sind vorhanden. In diesem Fall ziehe ich die sogenannte

U-Resultante heran, ein Gebilde, das man zwar explizite niemals aufstellen wird, das aber hier wieder, allein wegen seiner bekannten allgemeinen Eigenschaften, seine große praktische Bedeutung zeigt. Wir denken uns also die Resultante gebildet für die drei ternären Formen $S = lG + mH$, wo l, m Parameter bedeuten, und K und die Hilfslinearform $u_1x + u_2y + u_3z$ mit unbestimmten u_1, u_2, u_3. Hätten S und K bei irgendeiner Spezialisierung von l, m einen gemeinsamen Teiler, so bedeutete dies, wegen der Irreduzibilität von K, Teilbarkeit von S durch K, also lineare Abhängigkeit zwischen G, H, K q. e. d. Wenn aber im Gegenteil keine Spezialisierung von l, m einen gemeinsamen Teiler von S und K erzeugen würde, so kommt man auf einen Widerspruch: Die Resultante $U(u_1, u_2, u_3)$ würde nämlich für kein Wertepaar l, m identisch in u_1, u_2, u_3 verschwinden, sondern würde bei jeder Spezialisierung von l, m in n^2 lineare Faktoren in u_1, u_2, u_3 zerfallen, und zwar so:

$$U = (u_1a + u_2b + u_3c) \cdot \prod_{i=1}^{i=n^2-1} (u_1x_i + u_2y_i + u_3z_i),$$

wo (x_i, y_i, z_i) die Koordinatentripel der $n^2 - 1$ festen gemeinsamen Punkte und (a, b, c) das Koordinatentripel des letzten Schnittpunktes von K und $(lG + mH)$ bedeuten. Da nun bekanntlich U homogen in den Koeffizienten jeder der beiden Formen, also auch homogen in den Koeffizienten der Form $(lG + mH)$, also auch homogen in l, m ist, so werden a, b, c zu binären Formen in l, m:

$$a = A(l, m), \quad b = B(l, m), \quad c = (l, m).$$

Fall 2a. Die drei binären Formen A, B, C unterscheiden sich bloß um eine multiplikative Konstante, dann ist (a, b, c) ein fester Punkt, der von l, m unabhängig ist. Der letzte Basispunkt ist also für alle l, m ein und derselbe, also derselbe für $l = 1$, $m = 0$, und derselbe für $l = 0$, $m = 1$. Das ist im Falle 2 nur möglich, wenn dieser Punkt (a, b, c) mit einem der $n^2 - 1$ verschiedenen Punkte zusammenfällt, wenn also einer der $n^2 - 1$ Punkte doppelt zählt. Dann sei P ein weiterer Punkt von K, der nicht Nullstelle von G ist. Dann setze man $c = -H(P) : G(P)$, so daß $cG + H$ durch P geht. Somit folgt $cG + H \equiv 0\ (K)$, weil $(n^2 + 1)$ Schnittpunkte nachgewiesen sind, von denen einer doppelt zählt.

Fall 2b. A, B, C sind nicht nur durch eine multiplikative Konstante voneinander verschieden, so daß der Punkt (a, b, c) nicht nur scheinbar, sondern wirklich von l, m abhängig ist. Dann ist

$$K(A(l, m), \quad B(l, m), \quad C(l, m)) = 0$$

identisch in l, m, d. h. die Kurve $K(x, y, z) = 0$ ist eine sogenannte *rationale* Kurve. Eine rationale Kurve hat aber, sobald $n \geqq 3$ ist, wenigstens einen Doppelpunkt D. Das ist bekannt und kann elementar bewiesen werden[1]).

[1]) Vgl. H. Kapferer, „Über das Kriterium der Rationalität einer algebraischen Kurve". Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. 1930, S. 127.

Es ist also $K(D) = 0$, dann aber sicher $(G(D), H(D)) \neq (0, 0)$, weil onst D einer der $n^2 - 1$ festen Punkte sein müßte, zugleich doppelt zählender Basispunkt sowohl in (G, K) als in (H, K), so daß für einen variablen Punkt $a, b, c)$ kein Platz mehr wäre.

Sei also etwa $G(D) \neq 0$; dann setze man $c = -H(D) : G(D)$, so daß $cG + H)$ mit K außer den $n^2 - 1$ Nullstellen noch einen davon verschiedenen oppelt zählenden Punkt D gemeinsam besitzt. Daher

$$cG + H \equiv 0 \,(K),$$

obald $n \geqq 3$ ist.

Eine spezielle Folgerung des Hauptsatzes ist nun der Satz 2, und somit uch die Beantwortung der oben als grundsätzlich bezeichneten Frage in *egativem Sinn.*

Für $n = 3$ sagt nämlich der Satz H':

Falls ein Büschel 3. Ordnung, etwa H_3, K_3, wenigstens 8 verschiedene Basispunkte besitzt, jedoch endlich viele, damit die Teilerfremdheit der Polynome H_3, K_3 gesichert ist, so sind schon *je* 8 *der Basispunkte* ausreichend, m das Büschel eindeutig zu bestimmen. Mit anderen Worten:

Bedeuten die Wertetripel x_i, y_i, z_i für $i = 1, \ldots, 8$ die Koordinaten der verschiedenen Basispunkte von H_3, K_3, so haben die 8 Bedingungsgleichungen $K(x_i, y_i, z_i) = 0$ für die 10 unbekannten Koeffizienten von K als „Lösungen" enau zwei linear unabhängige Polynome. Es ist also, in der Bezeichnung des Hilfssatzes 1, wonach $r + R = 10$ ist, $R = 2$, und daher der Rang der 8 Bedingungsgleichungen $r = 8$. Solange aber, wie in Satz 1, noch nicht von vornherein feststeht, daß es überhaupt ein Büschel gibt, zu deren Basispunkten vorgegebene Punkte gehören, solange ist der Satz H' noch nicht anwendbar, nd daher der Rang r der durch sie gegebenen 8 Bedingungsgleichungen noch nbekannt. Es ist nur bekannt, daß $r \leqq 8$ ist. Nach dem Hilfssatz 1 ist also, egen $r + R = 10$, die Anzahl R der linear unabhängigen Polynome $P_1, \ldots, P_R$, elche durch 8 vorgegebene Punkte gehen, gleich oder größer als 2. Aber erst, enn in der durch sie bestimmten Mannigfaltigkeit $l_1 P_1 + \ldots + l_R P_R$ uch 2 teilerfremde K_3 sich befinden, steht fest, daß die 8 Punkte zueinander ssoziiert sind, d. h. daß sie zu den gemeinsamen Nullstellen von 2 teilerfremden olynomen gehören. Hätten nun je 2 linear unabhängige Polynome f_3, g_3 us jener Mannigfaltigkeit einen gemeinsamen Teiler, so kann der größte emeinsame Teiler jeweils nur vom 1. oder 2. Grade sein. In einem solchen alle würde das durch sie bestimmte Kurvenbüschel entweder $K_1 \cdot (\lambda f_2 + \mu g_2)$ der $K_2 (l f_1 + m g_1)$ sein, wo f_2, g_2 unter sich teilerfremd, ebenso f_1, g_1 unter ch teilerfremd sind. Nun können aber f_2, g_2 höchstens 4 verschiedene Basisunkte, f_1, g_1 nur einen einzigen besitzen, also entfallen auf K_1 mindestens 4 der Punkte, und auf K_2 genau 7. Beides ist ausgeschlossen auf Grund der Vorussetzung des Satzes 2, daß keine 4 Punkte auf einer K_1, keine 7 auf einer K_2

sein sollen. Unter dieser Voraussetzung gibt es also in der Gesamtheit der K_3 durch 8 Punkte stets zwei teilerfremde.

Jetzt erst ist der Satz H' anwendbar, der aussagt: $r = 8$ und $R = 2$, sobald $n \geqq 3$ ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Die Bedingung $n \geqq 3$ ist *wesentlich*. Für $n = 2$ gilt nämlich der Hauptsatz nicht mehr, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$G = x^2 - yz; \quad H = y^2 - zx; \quad K = z^2 - xy.$$

Dies sind 3 linear unabhängige quadratische Formen, obwohl sie $n^2 - 1$ Nullstellen gemeinsam haben, nämlich diese:

$$(x, y, z) = (1, v, v^2),$$

wo v die Wurzeln von $t^3 - 1 = 0$ durchläuft.

Schließlich scheint mir noch bemerkenswert, daß der Hauptsatz H nicht mehr verschärft werden kann nach der Richtung hin, daß statt $n^2 - 1$ etwa $n^2 - 2$ oder eine noch kleinere Zahl gesetzt wird. Dafür ein allgemeines Beispiel:

$$G = x^n - y^{n-1} z^1; \quad H = y^n - z^{n-1} x^1; \quad K = z^n - x^{n-1} y^1.$$

Hierbei handelt es sich offensichtlich um 3 linear unabhängige ternäre Formen n-ter Ordnung, und zwar mit auffällig vielen verschiedenen gemeinsamen Nullstellen, nämlich diesen:

$$(x, y, z) = (1, v^1, v^{1-n}),$$

wo v die sämtlichen Wurzeln von $t^{n^2-n+1} = 1$ durchläuft. Es sind also nicht einmal $n^2 - n^1 + 1$ von n^2 assoziierten Punkten ausreichend, um das Büschel eindeutig zu bestimmen.

Wenn man schließlich eine Verallgemeinerung nach der Seite der vielfach zählenden Schnittpunkte hin versucht, so verliert sogar der Satz 2 seine Gültigkeit:

$$G_3 = x(x + z)z + y^3; \quad H_3 = x(x + 2z)z + y^3; \quad K_3 = xyz.$$

Das Schnittsystem G, K besteht aus den 9 Punkten:

$$(0, 0, 1)_4, \quad (1, 0, 0)_4, \quad (1, 0, -1)_1.$$

Das Schnittsystem H, K besteht aus den 9 Punkten:

$$(0, 0, 1)_4, \quad (1, 0, 0)_4, \quad (2, 0, -1)_1,$$

wo die Indizes die Vielfachheit der betreffenden Schnittpunkte bedeuten. Die beiden Büschel 3. Ordnung G, K und H, K haben also „acht gemeinsame Punkte", trotzdem sind die 3 Formen G, H, K linear unabhängig.

Darauf und überhaupt auf die Untersuchung einiger Plückerscher Sätze hinsichtlich Multiplizitätsfragen gedenke ich in einer späteren zweiten Mitteilung einzugehen.

(Eingegangen am 12. Dezember 1938.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

VII. Inseparable Grundkörpererweiterung. Bemerkungen zur Körpertheorie[1]).

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Am Schluß von Beitrag VI wurde kurz das Problem der „separabeln Grundkörpererweiterung" behandelt. Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Unterkörper („Grundkörper") K, Λ sei ein separabler algebraischer Oberkörper von K. Dann gelten nach Beitrag VI für das Verhalten der $\mathfrak{R}$-Ideale beim Übergang zum Oberring $\mathfrak{S} = \mathfrak{R} \cdot \Lambda$ neben einigen minder wichtigen die folgenden drei Sätze.

A. Es ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$. — B. Ist $\mathfrak{x}$ ein zum $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so besitzt $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ eine Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \mathfrak{y}_2 \cap \ldots$, bei der die Primärideale $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ zu den über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primidealen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ gehören. — Γ. Bei einem beliebigen $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ stets gleich dem Durchschnitt der über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale.

In § 3 von Beitrag VII wird darüber hinaus gezeigt:

Δ. Die Anzahl der über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale $\mathfrak{q}_i$ hängt (außer von Λ) nur von dem zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Restklassenkörper $\overline{\Lambda}$ ab, und zwar auch dann, wenn Λ über K inseparabel ist.

Andererseits wird in § 2 durch ein etwas kompliziertes, aber in mehr als einer Hinsicht bemerkenswertes Beispiel[2]) bewiesen, daß Satz A nicht immer gilt, wenn man auf die Voraussetzung der Separabilität von Λ verzichtet. Damit wird auch die Allgemeingültigkeit von Satz B sehr zweifelhaft, und daß Satz Γ bei inseparabelm Λ nicht immer richtig sein kann, ist fast selbstverständlich. — Diesen negativen Feststellungen tritt das positive Ergebnis gegenüber, daß sich eine umfassende Klasse K von Ringen bestimmen läßt, für die die Sätze A und B ohne die Beschränkung auf separables Λ

[1]) Beitrag VII schließt sich in der Fragestellung, in den benutzten Bezeichnungen usw. eng an Beitrag VI an [Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 1—19]. Auf die übrigen Beiträge wird nicht zurückgegriffen.

[2]) Unter den mannigfachen Folgerungen, die man aus dem betreffenden Beispiel ziehen kann, ist insbesondere Satz 5 des Textes hervorzuheben, der eine wichtige Ergänzung der allgemeinen Untersuchungen von Beitrag VI enthält.

allgemein gelten, und bei denen sogar im inseparabeln Fall eine Art Gegenstück zu Satz Γ existiert.

Zur Charakterisierung der Ringklasse K braucht man eine Begriffsbildung, die über ihre Bedeutung für das Problem der Grundkörpererweiterung hinaus allgemeines Interesse besitzen dürfte. Der Körper $\mathfrak{R}$ möge über dem Unterkörper K „*transzendent*“ heißen, wenn er kein über K echt algebraisches [3]) Element enthält. Genügt $\mathfrak{R}$ darüber hinaus der Bedingung, daß $\Lambda \cdot \mathfrak{R}$ über Λ transzendent ist für jeden algebraischen Oberkörper Λ von K, so soll $\mathfrak{R}$ über K „*streng transzendent*“ genannt werden. Die Definition der Ringklasse K lautet dann kurz: Der Ring $\mathfrak{R}$ gehört dann und nur dann zu K, wenn sein Quotientenkörper $\mathfrak{R}$ über dem Grundkörper K nicht nur (wie von vornherein vorausgesetzt) transzendent, sondern sogar streng transzendent ist.

Unter diesen Umständen scheint es wünschenswert, Kriterien dafür zu suchen, daß ein über dem Unterkörper K transzendenter Oberkörper $\mathfrak{R}$ gleichzeitig über K streng transzendent ist. Man zeigt durch einfache körpertheoretische Überlegungen: Ist Λ ein beliebiger algebraischer Oberkörper von K, und bedeutet M den Körper aller von K algebraisch abhängigen Elemente aus $\Lambda \cdot \mathfrak{R}$, so ist für $\mathsf{M} \neq \mathsf{K}$ stets M über K ein „Wurzelkörper“ im Sinne von Steinitz [4]). Daraus folgt leicht, daß $\mathfrak{R}$ über K immer streng transzendent sein muß, wenn $\mathfrak{R}$ über einem rein transzendenten Oberkörper $\mathfrak{T}$ von K separabel algebraisch ist. Andererseits beweist man unschwierig mit Hilfe der Beispiele von § 2: Der Körper K hat dann und nur dann die Eigenschaft, daß *jeder* transzendente Oberkörper $\mathfrak{R}$ gleichzeitig auch streng transzendent ist, wenn K „*fast vollkommen*“ ist, d. h. wenn jeder endliche algebraische Oberkörper Λ über K einfach ist, $\Lambda = \mathsf{K}(\xi)$.

Mit diesem Theorem ist der Anschluß an klassische Steinitzsche Untersuchungen gewonnen [5]). Denn schon Steinitz hat gezeigt, daß einige der wichtigsten Eigenschaften der vollkommenen Körper allen fast vollkommenen Körpern zukommen. Das Theorem des Textes liefert eine bemerkenswerte

---

[3]) Also kein über K algebraisches, nicht zu K gehöriges Element.

[4]) M heißt (bei Primzahlcharakteristik p) „Wurzelkörper über K“, wenn jedes M-Element α über K einer Gleichung der Form $\alpha^{p^f} - a = 0$ $(a \subset \mathsf{K})$ genügt.

[5]) Vgl. § 14 der großen Steinitzschen Körperarbeit [Algebraische Theorie der Körper, J. f. Math. 137 (1910), S. 167—308. Neudruck, herausgegeben von R. Baer und H. Hasse. Leipzig-Berlin, Walter de Gruyter u. Co., 1930]. — Steinitz hat für fast vollkommene Körper vor allem die folgenden Sätze bewiesen: a) Ist Λ ein endlicher algebraischer Oberkörper des fast vollkommenen Körpers K, so liegen zwischen Λ und K immer nur endlich viele Zwischenkörper. b) Der nicht vollkommene Körper K von der Charakteristik p ist dann und nur dann fast vollkommen, wenn jeder algebraische Oberkörper Λ vom Grade p^2 einfach ist, $\Lambda = \mathsf{K}(\xi)$. — Die von Steinitz nicht benutzte Bezeichnung „fast vollkommener Körper“ wird von mir vor allem der Kürze halber gebraucht. Natürlich ist jeder vollkommene Körper erst recht fast vollkommen.

Ergänzung zu diesen Steinitzschen Ergebnissen. Darüber hinaus erweisen ich die zu seinem Beweis notwendigen Überlegungen auch dann als brauchbar, wenn es sich um die Behandlung rein algebraischer Fragen handelt. Das eigt sich am Schluß von § 4 bei der Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches iner aus der Theorie der separabeln Normalkörper wohlbekannten Gradformel. — Die Untersuchung der inseparabeln Grundkörpererweiterungen liefert also ls Nebenergebnis neue Einblicke in rein körpertheoretische Zusammenhänge. Gerade aus diesem Grunde schien mir eine eingehende Behandlung des ganzen Fragenkomplexes empfehlenswert.

§ 1.

Der „streng transzendente" Fall.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p. K sei ein Unterkörper von $\mathfrak{R}$, und zwar ei K „algebraisch maximal", d. h. es soll in $\mathfrak{R}$ und damit auch in $\mathfrak{K}$ kein über K echt algebraisches Element vorkommen [6]). Λ sei ein algebraischer Oberkörper von K, unter $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{L}$ soll der Ring $\Lambda \cdot \mathfrak{R}$ bzw. der Körper $\Lambda \cdot \mathfrak{K}$ verstanden werden.

Satz 1. *Ist Λ „Wurzelkörper" über K, d. h. genügt jedes Λ-Element α einer Gleichung $\alpha^{p^f} - a = 0$ $(a \subset \mathsf{K})$, so liegt über jedem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ genau ein $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{q}$. — $\mathfrak{q}$ besteht aus allen und nur den $\mathfrak{S}$-Elementen π, bei denen π^{p^f} für großes f zu $\mathfrak{p}$ gehört.*

Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß für jedes $\sigma \subset \mathfrak{S}$ eine Gleichung $\sigma^{p^f} - r = 0$ $(r \subset \mathfrak{R})$ gilt.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{K}$ über K streng transzendent, so gelten für beliebiges Λ die folgenden Sätze:*

α) *Es ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$. — β) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_s$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{b}_s \cdot \mathfrak{S})$ in $\mathfrak{S}$. — γ) Ist $\mathfrak{x}$ ein zum $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so gilt in $\mathfrak{S}$ eine Gleichung $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \mathfrak{y}_2 \cap \ldots$, wobei die Primärideale $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ zu den in $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{p}$ liegenden Primidealen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ gehören.*

Es sei zunächst $\Lambda = \mathsf{K}(\alpha)$ eine einfache Erweiterung von K, und es bedeute $p(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ das über K irreduzible Polynom mit der Nullstelle α. Dann ist $p(x)$ wegen der Maximaleigenschaft von K

[6]) Daß auch $\mathfrak{K}$ kein über K echt algebraisches Element enthält, folgt aus der Ganz-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$. (Vgl. die entsprechende Folgerung aus dem „Hilfssatz" in § 2.) — Die Möglichkeit, daß $\mathfrak{R}$ einen echten Oberkörper T von K enthält, wird nicht ausgeschlossen. Nur muß T in diesem Falle über K transzendent sein.

auch über $\mathfrak{R}$ irreduzibel, und es sind infolgedessen die Elemente $1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1}$ nicht nur über K sondern auch über $\mathfrak{R}$ linear unabhängig. Mit Hilfe der Gleichung $\mathfrak{S} = 1 \cdot \mathfrak{R} + \alpha \cdot \mathfrak{R} + \ldots + \alpha^{m-1} \cdot \mathfrak{R}$ kann man aber unter diesen Umständen die Behauptungen $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ genau so beweisen, wie die entsprechenden Sätze 7, 8, 10 von Beitrag VI [7]). — Ist ferner Λ ein beliebiger endlicher algebraischer Oberkörper von K, so kann man jedenfalls eine Körperkette $\Lambda_0 = \mathsf{K}, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_r = \Lambda$ bilden, bei der $\Lambda_i = \Lambda_{i-1}(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ jeweils eine einfache Erweiterung von Λ_{i-1} darstellt. Setzt man nun $\mathfrak{L}_i = \Lambda_i \cdot \mathfrak{R}$ $(\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{R}, \mathfrak{L}_r = \mathfrak{L}!)$, und beachtet man, daß $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{R}$ streng transzendent angenommen wurde, so erkennt man mühelos: Λ_i ist in $\mathfrak{L}_i$ algebraisch maximal $(i = 1, \ldots, s)$. Der Grad von Λ_i über Λ_{i-1} ist gleich dem Grad von $\mathfrak{R}_i$ über $\mathfrak{R}_{i-1}$. $(\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_{i-1}(\alpha_i)$ ausnutzen!) Bilden die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ eine linear unabhängige Basis von Λ über K, so bilden sie auch eine linear unabhängige Basis von $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$. Mit Hilfe dieses letzteren Resultats werden dann die Behauptungen $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ genau so bewiesen, wie im Falle einer einfachen Erweiterung $\Lambda = \mathsf{K}(\alpha)$. — Der Fall schließlich, daß Λ ein unendlicher algebraischer Oberkörper von K ist, kann genau so erledigt werden, wie der entsprechende Fall in Beitrag VI, § 6 [8]).

Satz 2 läßt sich insbesondere stets anwenden, wenn $\mathfrak{R}$ einen Polynomring in beliebig vielen Variabeln über K darstellt; denn daß in diesem Falle $\mathfrak{R}$ über K streng transzendent ist, ist so gut wie selbstverständlich (vgl. § 4). Aus der Art des Beweises von Satz 2 ergibt sich ferner, daß die Behauptungen $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ bei beliebigem $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}$ immer gelten, wenn man sich auf *einfache Erweiterungen* $\Lambda = \mathsf{K}(\alpha)$ beschränkt. Ist dagegen Λ ein nicht einfacher endlicher algebraischer Oberkörper von K (und $\mathfrak{R}$ nicht streng transzendent), so kann, wie in § 2 gezeigt werden soll, Satz 2 bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{R}$ falsch werden [9]).

---

[7]) Beachte insbesondere Beitrag VI, Anm. [21])! Natürlich liegen für $\Lambda = \mathsf{K}(\alpha)$ über $\mathfrak{p}$ nur endlich viele $\mathfrak{S}$-Primideale, es wird also in diesem Falle $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{y}_s$ Durchschnitt von *endlich vielen Primäridealen.*

[8]) Vgl. den Beweis von Satz 18 in Beitrag VI!

[9]) Zur Frage nach der Möglichkeit einer Verschärfung von Satz 2 sei bemerkt: a) Ist K unvollkommen, $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[x]$ der Polynomring in einer Variabeln über K, und bedeutet $\Lambda = \mathsf{K}(\sqrt[p]{a})$ einen Wurzelkörper p-ten Grades über K, so wird $(x^p - a) \cdot \mathfrak{S} = (x - \sqrt[p]{a})^p \cdot \mathfrak{S}$ die p-te Potenz eines Primideals, obwohl $(x^p - a) \cdot \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ ein Primideal und $\mathfrak{R} = \mathsf{K}(x)$ über K streng transzendent ist. b) Ist $\mathfrak{R}$ nicht streng transzendent über K, so braucht, wie wir in § 2 sehen werden, $\mathfrak{S} = \mathfrak{R} \cdot \Lambda$ auch dann nicht ganz abgeschlossen zu sein, wenn $\Lambda = \mathsf{K}(\alpha)$ eine einfache Erweiterung von K darstellt. Dagegen halte ich es bei streng transzendentem $\mathfrak{R}$ für sehr wohl möglich, daß $\mathfrak{S}$ immer ganz abgeschlossen ist. Aber ich sehe bis jetzt keinen Weg, auf dem diese Vermutung bewiesen werden könnte.

§ 2.

Gegenbeispiele.

Es sei K ein Körper der Charakteristik p, in dem sich die endlich oder abzählbar unendlich vielen Elemente $a_0, a_1, \ldots$ so bestimmen lassen, daß für $\xi_i = \sqrt[p]{a_i}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ der Körper $\Lambda_i = \mathsf{K}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i)$ über K jeweils den Grad p^i besitzt [10]). $x_0, x_1, \ldots$ seien Unbestimmte über K.

Hilfssatz. *Der Ring*

$$\mathfrak{R} = \mathsf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots; \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1, \xi_0 x_0 + \xi_2 x_2, \xi_0 x_0 + \xi_3 x_3, \ldots]$$

ist in seinem Quotientenkörper $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen.

Beim Beweis beschränken wir uns auf den hinreichend allgemeinen Fall $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[x_0, x_1, x_2; \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1, \xi_0 x_0 + \xi_2 x_2]$ [11]). Mit $a(x), b(x), \ldots$ bzw. $\tilde{a}(x), \tilde{b}(x), \ldots$ bezeichnen wir Polynome über K bzw. über $\Lambda = \Lambda_3 = \mathsf{K}(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$. — Wegen $(\xi_0 x_0 + \xi_i x_i)^p = a_0 x_0^p + a_i x_i^p$ $(i = 1, 2)$ läßt sich jedes Element $\mathsf{A}(x)$ aus $\mathfrak{R}$ in der Form $b(x)^{-1} \cdot \sum_{\varrho,\sigma=0}^{p-1} a_{\varrho\sigma}(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1)^\varrho (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^\sigma$ darstellen. Hängt $\mathsf{A}(x)$ von $\mathfrak{R}$ ganz ab, so muß $\mathsf{A}(x)$ ein Polynom über Λ sein, weil alle $\mathfrak{R}$-Elemente Polynome über Λ sind. Unter diesen Umständen ist nur zu zeigen: Eine Gleichung

$$(1) \qquad \sum_{\varrho,\sigma=0}^{p-1} a_{\varrho\sigma}(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1)^\varrho \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^\sigma = b(x) \cdot \tilde{c}(x),$$

bei der nicht alle $a_{\varrho\sigma}(x)$ durch $b(x)$ teilbar sind, ist unmöglich. — Es möge $b(x)$ etwa in x_2 einen positiven Grad m besitzen [12]). Wir dürfen dann (1) so präpariert annehmen, daß kein $a_{\varrho\sigma}(x)$ in x_2 den Grad m erreicht. (Vorherige Graderniedrigung durch Ausdivision mit $b(x)$!) Ersetzen wir in (1) überall x_1 durch $x_1 - \frac{\xi_0}{\xi_1} x_0$, so entsteht eine Gleichung

$$(2) \qquad a_0'(x) + a_1'(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2) + \ldots + a_t'(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^t = b'(x) \cdot \tilde{d}(x)$$
$$(a_t'(x) \not\equiv 0, \quad t \leqq p - 1),$$

bei der $a_0'(x), \ldots, a_t'(x), b'(x)$ Polynome über $\mathsf{K}' = \mathsf{K}\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)$ sind, und $b'(x)$ den x_2-Grad m hat, während die x_2-Grade der $a_i'(x)$ alle höchstens gleich

---

[10]) Einen Körper K der gewünschten Art kann man einfach dadurch erhalten, daß man zu einem beliebigen Körper K_p der Charakteristik p eine hinreichende Menge von Unbestimmten adjungiert. — Bei den meisten der folgenden Betrachtungen könnte man mit ξ_0, ξ_1 auskommen. An einigen Stellen aber ist der Fall unendlich vieler ξ_i von besonderem Interesse.

[11]) Daß man sich auf den Fall endlich vieler ξ_i beschränken darf, ist klar. Denn es treten ja in jeder einzelnen Gleichung immer nur endlich viele ξ_i auf.

[12]) Für x_1 an Stelle von x_2 würden die Überlegungen im wesentlichen dieselben sein. Zum Falle, daß $b(x)$ allein von x_0 abhängt, vgl. Anm. [15])!

$m-1$ sind[13]). Da $\Lambda = \mathsf{K}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \mathsf{K}\left(\xi_0, \xi_2, \frac{\xi_0}{\xi_1}\right)$ über K den Grad p^3, K' über K den Grad p besitzt, ist der Grad von Λ über K' gleich p^2, die Potenzprodukte $\xi_0^{\varrho}\xi_2^{\sigma}$ $(0 \leqq \varrho \leqq p-1,\ 0 \leqq \sigma \leqq p-1)$ sind also über K' und damit auch über dem Körper $\mathsf{K}'(x_0, x_1)$ linear unabhängig. — Wir fassen nun in (2) beide Seiten als Polynome in x_2 allein auf, und untersuchen die Anzahl ν_l bzw. ν_r der links bzw. rechts auftretenden über $\mathsf{K}'(x_0, x_1)$ linear unabhängigen Koeffizienten.

ν_r ist offenbar höchstens gleich der Zahl aller Koeffizienten von $\tilde{d}(x)$, d. h. es ist $\nu_r \leqq t$, da $\tilde{d}(x)$ unter unseren Voraussetzungen höchstens den Grad $t-1$ besitzt. Für ν_l beachte man: a) Die $t+1$ Koeffizienten $\binom{t}{\varrho} \cdot \xi_0^{\varrho} \cdot \xi_2^{t-\varrho} \cdot x_0^{\varrho}$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, t)$ von $(\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^{\varrho}$ sind über $\mathsf{K}'(x_0, x_1)$ linear unabhängig. b) Wie leicht aus einem bekannten Dedekind-Mertensschen Satze zu sehen ist, lassen sich die Koeffizienten von $(\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^t$ linear über $\mathsf{K}'(x_0, x_1)$ durch die Koeffizienten von $a_t'(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^t$ darstellen[14]). c) Die Koeffizienten von $a_0'(x) + \ldots + a_{t-1}'(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^{t-1}$ sind über $\mathsf{K}'(x_0, x_1)$ von den Koeffizienten von $a_t'(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^t$ linear unabhängig, weil sie in ξ_0, ξ_2 nur Potenzprodukte höchstens $(t-1)$-ten Grades enthalten. — Aus a), b), c) folgt aber $\nu_l \geqq t+1 \geqq \nu_r$, d. h. die rechte und die linke Seite von (2) können nicht gleich sein. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes abgeschlossen. Nur der Fall, daß $b(x)$ in (1) allein von x_0, nicht aber von x_1 und x_2 abhängt, erforderte eigentlich noch eine kleine Sonderüberlegung, die aber unbedenklich in eine Anmerkung verwiesen werden kann[15]). — Aus dem Hilfssatz ergibt sich insbesondere:

---

[13]) Bei (2) können nicht etwa beide Seiten identisch verschwinden; denn man kommt ja von (2) zu (1) zurück, wenn man x_1 durch $x_1 + \frac{\xi_0}{\xi_1} x_0$ ersetzt. Wir dürfen $t > 0$ annehmen, da sonst (2) trivialerweise widerspruchsvoll wäre.

[14]) Es sei $A \neq 0$ ein im übrigen beliebiger Koeffizient des x_2-Polynoms $a_t'(x)$; $B_0, \ldots, B_t$ bzw. $C_1, \ldots, C_{\omega}$ seien die Koeffizienten der x_2-Polynome $(\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^t$ bzw. $a_t'(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^t$. Dann gilt nach dem genannten Hilfssatz ein Gleichungssystem $A^{n+1} \cdot B_i = \sum_{k=1}^{\omega} g_{ik} C_k$ $(i = 0, \ldots, t)$, bei dem die g_{ik} ganzzahlige Formen n-ten Grades in den Koeffizienten von $a_t'(x)$ sind.

[15]) Hängt $b(x_0)$ nur von x_0 ab, so wird in der nach dem Schema des Textes gebildeten Gleichung (2) offenbar $b'(x) = b(x)$. Geht man von (2) durch Ausdivision mit $b(x)$ zu einer Gleichung $\sum_{i=0}^{t} a_i''(x) \cdot (\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2)^i = b(x) \cdot \tilde{d}''(x)$ über, bei der die x_0-Grade der $a_i''(x)$ alle kleiner sind als der x_0-Grad von $b(x)$, so folgt aus den Überlegungen des Textes (bei denen nur x_2 durch x_0 zu ersetzen ist), sofort: $a_0''(x) = \ldots = a_t''(x) = 0$. D. h. aber: Die Polynome $a_i'(x)$ und damit auch die Polynome $b_{\sigma}(x) = \sum_{\varrho=0}^{p-1} a_{\varrho\sigma}(x)(\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1)^{\varrho}$ $(\sigma = 0, \ldots, p-1)$ sind alle durch $b(x)$ teilbar, $b_{\sigma}(x) = b(x) \cdot \tilde{c}_{\sigma}(x)$. Behandelt man nun die Gleichungen $b_{\sigma}(x) = b(x) \cdot \tilde{c}_{\sigma}(x)$

Der Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ *von* $\mathfrak{R}$ *ist über* K *transzendent.*

In der Tat, jedes über K algebraische Element aus $\mathfrak{K}$ muß, weil von $\mathfrak{R}$ ganz abhängig, zu $\mathfrak{R}$ gehören. Daß aber in $\mathfrak{R}$ kein über K echt algebraisches Element auftritt, folgt aus der Tatsache, daß der Restklassenkörper $\overline{\Lambda}$ von $\mathfrak{R}$ nach dem Primideal $\mathfrak{p} = (x_0, x_1, x_2, \ldots;\ \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1,\ \xi_0 x_0 + \xi_2 x_2, \ldots)$ zu K isomorph ist. — Bilden wir zu $\mathfrak{K}$ den Körper $\mathfrak{L} = \Lambda_0 \cdot \mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\xi_0)$, so enthält $\mathfrak{L}$ die sämtlichen Elemente $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, und damit einen echten algebraischen Oberkörper von Λ_0, der sogar unter Umständen über Λ_0 einen unendlich hohen Grad besitzt, nämlich dann, wenn die ξ_i in abzählbar unendlicher Anzahl vorhanden sind. Damit ist gezeigt:

Satz 3. *Es gibt Körperpaare* K, $\mathfrak{K}$, *bei denen* $\mathfrak{K}$ *über* K *transzendent, aber nicht streng transzendent ist. Es kann sogar vorkommen, daß für einen geeigneten endlichen algebraischen Oberkörper* Λ_0 *von* K *in* $\Lambda_0 \cdot \mathfrak{K}$ *ein unendlicher algebraischer Oberkörper von* Λ_0 *enthalten ist.*

Wir wenden uns nun wieder zum Problem der inseparabeln Grundkörpererweiterung. Bei den folgenden drei Sätzen haben K, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$, $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ dieselbe Bedeutung wie im Hilfssatz.

Satz 4. *Die inseparable Grundkörpererweiterung führt mitunter von einem ganz abgeschlossenen Ausgangsring zu einem nicht ganz abgeschlossenen Oberring.*

In der Tat, bilden wir zu $\mathfrak{R}$ den Oberring $\mathfrak{S} = \Lambda_0 \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\xi_0)$, so ist $\mathfrak{S}$ nicht ganz abgeschlossen, weil die von $\mathfrak{S}$ ganz abhängigen Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots$ zwar dem Quotientenkörper $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(\xi_0)$, aber nicht dem Ringe $\mathfrak{S}$ selbst angehören.

Satz 5. *Die Behauptungen* α) *und* β) *von Satz 2 gelten nicht mehr allgemein, wenn man die Voraussetzung,* $\mathfrak{K}$ *solle über* K *streng transzendent sein, fallen läßt.*

In der Tat bilden wir zu $\mathfrak{R}$ mit Hilfe des Körpers $\Lambda = \mathsf{K}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ den Ring $\mathfrak{S} = \Lambda \cdot \mathfrak{R} = \Lambda[x_0, x_1, x_2, \ldots]$, so wird für das $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ offenbar $(x_0, x_1, x_2, \ldots; \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1, \xi_0 x_0 + \xi_2 x_2, \ldots) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ ein echtes Oberideal von $\mathfrak{a}$. Setzt man ferner etwa $\mathfrak{b}_1 = (x_0, x_1)$, $\mathfrak{b}_2 = (\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1)$ in $\mathfrak{R}$, so wird $\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{S} = (x_0, x_1) \cdot \mathfrak{S} = (x_0, x_1,\ \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1) \cdot \mathfrak{S} \supset \mathfrak{b}_2 \cdot \mathfrak{S} = (\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1) \cdot \mathfrak{S}$, $\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{b}_2 \cdot \mathfrak{S} = (\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1) \cdot \mathfrak{S}$, während $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) \cdot \mathfrak{S}$ sicher von $(\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1) \cdot \mathfrak{S}$ verschieden ist, weil in $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ nur solche Polynome vorkommen, bei denen alle wirklich auftretenden Potenzprodukte in den Variabeln x_i mindestens den Grad 2 besitzen. — An dem Beispiel zu Satz 5 verdient der Umstand besonders hervorgehoben zu werden, daß der Ring $\mathfrak{S} = \Lambda[x_0, x_1, \ldots]$ ganz abgeschlossen ist. Die Sätze 4 und 5 sind also voneinander unabhängig.

$\sigma = 0, \ldots, p-1$) genau so wie zuerst die Gleichung (1) (wobei nur $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1$ an Stelle von $\xi_0 x_0 + \xi_2 x_2$ tritt), so ergibt sich unmittelbar die Teilbarkeit aller $a_{\varrho\sigma}(x)$ durch $b(x)$. — Bei nur zwei Elementen ξ_0, ξ_1 sind die auf x_0 bezüglichen Sonderüberlegungen überflüssig, da dann x_0 in keiner Weise vor x_1 ausgezeichnet ist.

Der Ring $\mathfrak{S}$ kann über $\mathfrak{R}$ keine Modulbasis von linear unabhängigen Elementen besitzen. Denn die Existenz einer derartigen Modulbasis würde die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ nach sich ziehen. Beachtet man weiter, daß jedes $\mathfrak{S}$-Element einem der Ringe $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{R}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ angehört, während andererseits offenbar ξ_{i+1} niemals in $\mathfrak{S}_i$ enthalten ist, so erkennt man mühelos:

Im Falle unendlich vieler ξ_i besitzt $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ keine Modulbasis von endlich vielen (linear unabhängigen oder linear abhängigen) Elementen.

Dieses Ergebnis ist deshalb bemerkenswert, weil der Quotientenkörper $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}_0(\xi_0)$ von $\mathfrak{S}$ einen endlichen algebraischen Oberkörper von $\mathfrak{K}$ darstellt. Andererseits ist es nicht besonders überraschend, weil F. K. Schmidt schon vor einiger Zeit einen ähnlichen, aber viel tieferliegenden Nichtendlichkeitssatz bewiesen hat[16]). — Zu wesentlich neuen Erkenntnissen dagegen führen die folgenden Betrachtungen: Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger, ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ sei ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$, dessen Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ einen endlichen Grad n besitzt. $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ seien die über einem bestimmten $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale, unter n_i bzw. n_i^* möge der Grad bzw. der reduzierte Grad von $\mathfrak{q}_i$ über $\mathfrak{R}$ verstanden werden[17]). Dann gilt nach Beitrag VI immer die Ungleichung $n_1^* + \ldots + n_s^* \leqq n$, und aus $n_1^* + \ldots + n_s^* = n$ folgt $n_i^* = n_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, $n_1 + \ldots + n_s = n$. Ist ferner z. B. $\mathfrak{R}$ ein Bewertungsring irgendwelcher Art[18]), so weiß man, daß m beliebige $\mathfrak{S}$-Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ stets über $\mathfrak{R}$ linear unabhängig sein müssen, wenn die zugehörigen Restklassen $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m$ aus $\mathfrak{S}/(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S})$ über $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ linear unabhängig sind, und daraus folgt sofort die Ungleichung $n_1 + \ldots + n_s \leqq n$ für jedes $\mathfrak{p}$.

Es sei jetzt aber wieder $\mathfrak{R}$ der ganz abgeschlossene Integritätsbereich des Hilfssatzes, und es bedeute $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ wieder den Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(\xi_0)$. Setzen wir dann $\mathfrak{p} = (x_0, x_1, x_2, \ldots; \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1, \xi_0 x_0 + \xi_2 x_2, \ldots)$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \cdot \mathfrak{S}$ das einzige über $\mathfrak{p}$ liegende $\mathfrak{S}$-Primideal, und es ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ zum Körper K, dagegen $\mathfrak{S}/\mathfrak{q}$ zum Körper $\mathsf{K}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ isomorph.

---

[16]) Zur Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 443—450. Dort wird gezeigt: $\mathfrak{S}$ braucht über $\mathfrak{R}$ nicht einmal dann eine endliche Modulbasis zu besitzen, wenn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ diskrete Bewertungsringe sind, und $\mathfrak{S}$ den Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus einem endlichen algebraischen Oberkörper $\mathfrak{L}$ des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ darstellt. (Natürlich entsteht $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{R}$ im Schmidtschen Falle nicht durch inseparable Grundkörpererweiterung.)

[17]) Zur Definition des Grades und des reduzierten Grades eines $\mathfrak{S}$-Primideals über $\mathfrak{R}$ vgl. Beitrag VI, § 2!

[18]) Also ein beliebiger Integritätsbereich, in dem von zwei Elementen α, β stets mindestens eines durch das andere teilbar ist.

Der Relativgrad von $\mathfrak{q}$ über $\mathfrak{R}$ ist also in jedem Falle größer als der Relativgrad p von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$, ja er kann sogar (im Falle unendlich vieler ξ_i) unendlich groß werden. Wir haben also:

Satz 5. *Ist $\mathfrak{S}$ ein ganz abhängiger Oberring des ganz abgeschlossenen Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$, so gibt es für die Grade der $\mathfrak{S}$-Primideale über $\mathfrak{R}$ im allgemeinen auch dann keine Schranke, wenn der Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{S}$ über dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ einen endlichen Grad besitzt.*

Satz 5 zeigt, daß die in Beitrag VI abgeleitete Ungleichung $n_1^* + \ldots + n_s^* \leqq n$ nicht wesentlich verschärft werden kann[19]). Für fast noch wichtiger halte ich die Feststellung, daß man — von Spezialfällen abgesehen — nicht aus der linearen Unabhängigkeit gewisser Restklassen aus $\mathfrak{S}/(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S})$ über $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ auf die lineare Unabhängigkeit geeigneter Repräsentanten über $\mathfrak{R}$ schließen darf.

§ 3.

Der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ und die Zerlegung von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$[20]).

Wir wenden uns zu einer anderen mit der Grundkörpererweiterung zusammenhängenden Frage, für die gleichfalls die Beispiele von § 2 wichtig sind. Es sei wie bisher K ein maximal algebraischer Unterkörper des ganz abgeschlossenen Ringes $\mathfrak{R}$, Λ sei ein algebraischer Oberkörper von K, $\mathfrak{S} = \Lambda \cdot \mathfrak{R}$. Es soll die Anzahl der über einem festen $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale bestimmt werden, und es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen (bei inseparabelm Λ) die isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ alle Primideale sind. Dabei dürfen und wollen wir voraussetzen, daß das Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ maximal ist, daß also der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p} = \bar{\Lambda}$ einen Körper darstellt, den wir als Oberkörper von Λ auffassen[21]).

Es sei nun zunächst $\Lambda = \mathsf{K}(\xi)$ ein einfacher algebraischer Oberkörper von K, und es sei $p(x)$ das über K irreduzible Polynom mit der Nullstelle α.

---

[19]) Als „unwesentliche", aber immerhin bemerkenswerte Verschärfung sei erwähnt: Ist p die Charakteristik des Quotientenkörpers K von $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$, und versteht man unter dem „Exponenten" e_i von $\mathfrak{q}_i$ den Exponenten des Quotientenkörpers Λ_i von $\mathfrak{S}/\mathfrak{q}_i$ über K (vgl. [26])), so gilt die leicht mit den Hilfsmitteln von Beitrag VI beweisbare Ungleichung $n_1^* \cdot p^{e_1} + \ldots + n_s^* \cdot p^{e_s} \leqq n$.

[20]) Satz 6 und Satz 7 von § 3 sind auch dann von Interesse, wenn K die Charakteristik 0 besitzt!

[21]) Wäre $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{R}$ maximal, so könnte man von dem Ringpaar $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \Lambda \cdot \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ übergehen, wobei $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primidealquotientenring bedeutet. Dann ist $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ maximal, und es entsprechen die über $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$-Primideale bzw. die isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ umkehrbar eindeutig den über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primidealen bzw. den isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$.

Dann ist offenbar $\mathfrak{S}/(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S})$ isomorph zum Restklassenbereich $\bar{\Lambda}[x]/(p(x))$ des Polynomringes $\bar{\Lambda}[x]$ nach dem Hauptideal $(p(x))$, und daraus folgt sofort:

Es sei $p(x) = p_1(x)^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_s(x)^{r_s}$ *die Primfaktorzerlegung des Polynoms* $p(x)$ *über* $\bar{\Lambda}$. *Dann sind* $\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{p} + (p_i(x))) \cdot \mathfrak{S}$ $(i = 1, \ldots, s)$ *die sämtlichen über* $\mathfrak{p}$ *liegenden* $\mathfrak{S}$*-Primideale. Der Körper* $\Sigma_i = \mathfrak{S}/\mathfrak{q}_i$ *entsteht aus* $\bar{\Lambda}$ *durch Adjunktion einer Nullstelle von* $p_i(x)$. *Die zu* $\mathfrak{q}_i$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ *ist dann und nur dann von* $\mathfrak{q}_i$ *verschieden, wenn* $r_i > 1$ *ist.*

Um mit Hilfe dieser fast selbstverständlichen Bemerkungen zu einem einfachen Anzahlsatz zu kommen, beachten wir zunächst:

Satz 6. *Es sei* Λ^* *der größte über* K *separable Unterkörper von* Λ, *und es wurde* $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{R} \cdot \Lambda^*$ *gesetzt. Dann entsprechen die über* $\mathfrak{p}$ *liegenden* $\mathfrak{S}$*-Primideale umkehrbar eindeutig den über* $\mathfrak{p}$ *liegenden* $\mathfrak{S}^*$*-Primidealen.*

Satz 6 ist eine triviale Folgerung aus Satz 1, da Λ über Λ^* einen Wurzelkörper darstellt. Man braucht also bei dem Anzahlproblem nur separable Oberkörper Λ von K zu betrachten. Darüber hinaus beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall, daß $\Lambda = \mathsf{N}$ ein Normalkörper über K ist. Wir können dann von „dem Durchschnitt Δ von Λ und $\bar{\Lambda}$" reden, da dieser Durchschnitt jedenfalls bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist[22]), und es ergibt sich:

Satz 7. *Ist* $\Lambda = \mathsf{N}$ *ein über* K *separabler Normalkörper, so ist die Anzahl der über* $\mathfrak{p}$ *liegenden* $\mathfrak{S}$*-Primideale stets gleich dem Relativgrad des Durchschnitts* Δ *von* Λ *und* $\bar{\Lambda}$ *über* K.

Beim Beweis unterscheiden wir drei Fälle: a) Es sei Λ und damit auch Δ über K endlich. Dann ist $\Lambda = \mathsf{K}(\xi)$ ein einfacher Oberkörper von K, und das über K irreduzible Polynom $p(x)$ mit der Nullstelle ξ zerfällt nach trivialen körpertheoretischen Überlegungen über $\bar{\Lambda}$ genau in s irreduzible Faktoren gleichen Grades, falls s den Relativgrad von Δ über K bedeutet. Fertig! — b) Es sei Λ über K unendlich, während Δ über K einen endlichen Grad s besitzt. Ist dann Λ_e irgendein endlicher, in Λ enthaltener Normalkörper über K, so liegen nach a) über $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}_e = \Lambda_e \cdot \mathfrak{R}$ genau s oder weniger als s Primideale, je nachdem ob der Durchschnitt von Λ_e mit $\bar{\Lambda}$ gleich Δ oder

[22]) Dabei handelt es sich nicht um Isomorphie schlechtweg, sondern um „Isomorphie über K", also um eine Isomorphie, bei der die Elemente von K sich selbst zugeordnet werden. — Zum Beweis bedenke man: Es sei A^* bzw. $\bar{\mathsf{A}}^*$ der zu Λ bzw. $\bar{\Lambda}$ gehörige algebraisch abgeschlossene Körper, $\bar{\mathsf{B}}^*$ sei der Körper aller über K algebraischen Elemente aus $\bar{\mathsf{A}}^*$. Um $\bar{\Lambda}$ und Λ in Beziehung zu setzen, hat man A^* über K isomorph auf $\bar{\mathsf{B}}^*$ abzubilden. Zwei verschiedene derartige Abbildungen hängen durch einen Automorphismus von A^* über K zusammen. Bei jedem Automorphismus von A^* über K wird der Normalkörper Λ auf sich selbst abgebildet.

gleich einem echten Unterkörper von $\bar{\Lambda}$ wird. Daraus folgt sofort, daß in $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{p}$ genau s verschiedene Primideale liegen müssen. (Lägen nämlich in $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{p}$ mehr als s Primideale, so müßte das gleiche auch in einem geeigneten Ringe $\mathfrak{S}_e$ der Fall sein.) — c) Es seien Λ und $\bar{\Lambda}$ beide unendlich. Dann kann man zu beliebig großem N stets einen endlichen in Λ enthaltenen über K normalen Körper Λ_e so bestimmen, daß der Durchschnitt von Λ_e mit $\bar{\Lambda}$ mindestens den Grad N besitzt, und daß dementsprechend in $\mathfrak{S}_e = \Lambda_e \cdot \mathfrak{R}$ über $\mathfrak{p}$ mindestens N verschiedene Primideale liegen. Die Anzahl der in $\mathfrak{S}$ selbst über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale muß daher unendlich groß sein. — Aus Satz 6 folgt insbesondere, wenn wir mit A^* den zu K gehörigen algebraisch abgeschlossenen Körper, mit $\bar{\Lambda}^*$ den Körper aller über K separabeln Elemente aus $\bar{\Lambda}$ bezeichnen:

Die Anzahl der in $\mathfrak{A} = \mathsf{A}^* \cdot \mathfrak{S}$ *über* $\mathfrak{p}$ *liegenden Primideale ist gleich dem Grad von* $\bar{\Lambda}^*$ *über* K[23]. Satz 6 kann noch leicht durch die Bemerkung ergänzt werden, daß für jedes über $\mathfrak{p}$ liegende $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{q}$ der *Restklassenkörper* $\mathfrak{S}/\mathfrak{q}$ *zu dem* (wegen der Normalitätsvoraussetzung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) *Produkt* $\Lambda \cdot \bar{\Lambda}$ *der Körper* Λ *und* $\bar{\Lambda}$ *isomorph ist.* Wir gehen auf diese ziemlich selbstverständliche Sache hier nicht näher ein, und wenden uns zu der Frage, wann bei geeigneter Wahl von Λ unter den isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ echte Primärideale vorkommen können.

Es sei $\bar{\mathsf{M}}$ der größte über K algebraische Unterkörper von $\bar{\Lambda}$. Dann ergibt sich zunächst fast unmittelbar:

Satz 8. *Ist* $\bar{\mathsf{M}}$ *über* K *inseparabel, so läßt sich* Λ *stets so bestimmen, daß für mindestens ein über* $\mathfrak{p}$ *liegendes* $\mathfrak{S}$*-Primideal* $\mathfrak{q}_i$ *die zugehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ *von* $\mathfrak{q}_i$ *verschieden ausfällt. Auch wenn* $\bar{\mathsf{M}}$ *über* K *separabel ist, kann unter Umständen* Λ *in der angegebenen Weise bestimmt werden.*

Beweis. a) Es sei $\bar{\xi}$ ein über K inseparables Element aus $\bar{\mathsf{M}}$, und es sei $\mathsf{l} = \mathsf{K}(\xi)$ so gewählt, daß ξ und $\bar{\xi}$ über K Nullstellen desselben irreduziblen Polynoms $p(x)$ sind. Dann muß $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ nach den Bemerkungen vom Anfang des Paragraphen eine echte isolierte Primärkomponente besitzen, weil über $\bar{\Lambda}$ von $p(x)$ der Linearfaktor $(x - \bar{\xi})^p$ abgespalten werden kann.

---

[23]) Aus diesem Kriterium ergibt sich z. B.: Ist $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[a_1, \ldots, a_n]$ ein endlicher Integritätsbereich über K, so liegen in $\mathfrak{S} = \Lambda \cdot \mathfrak{R}$ über jedem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ immer nur endlich viele $\mathfrak{S}$-Primideale. — Sind die a_i über K algebraisch unabhängig, so ist dieser Satz allerdings selbstverständlich, da dann $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ einfach den Polynomring in n Variabeln über K bzw. Λ darstellt, und da infolgedessen nicht nur für $\mathfrak{R}$, sondern auch für $\mathfrak{S}$ immer die Maximalbedingung (der „Teilerkettensatz") gilt.

b) Es sei $\mathsf{K} = \mathsf{K}_p\,(u, v)$ eine zweifach transzendente Erweiterung eines beliebigen Körpers K_p der Charakteristik p, $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[x, y, z]$ bedeute den Polynomring in drei Unbestimmten über K, und es werde $(z^p - (ux^p + vy^p)) = \mathfrak{p}$ gesetzt. Dann enthält der Quotientenkörper $\bar{\Lambda}$ des Restklassenringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ [24]) nach § 2 kein über K echt algebraisches, also insbesondere auch kein über K inseparables Element. Gleichwohl wird $(z - (\sqrt[p]{u}\,x + \sqrt[p]{v}\,y))^p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{q}^p$ für $\Lambda = \mathsf{K}(\sqrt[p]{u}, \sqrt[p]{v})$. — Das positive Gegenstück zu Satz 8 ist:

Satz 9. *Ist $\bar{\mathsf{M}}$ über K separabel, und ist gleichzeitig $\bar{\Lambda}$ über $\bar{\mathsf{M}}$ streng transzendent, so sind bei beliebiger Wahl von Λ die isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ immer gleich den über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primidealen.*

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte: a) Ist die zu dem $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{q}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ nicht gleich $\mathfrak{q}$, so gibt es in $\mathfrak{q}$ ein Element π mit der Eigenschaft, daß aus $\pi \cdot \varrho \subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ stets $\varrho \subset \mathfrak{q}$ folgt. Wählen wir nun den über K endlichen Unterkörper Λ_e von Λ so, daß π bereits in $\mathfrak{S}_e = \Lambda_e \cdot \mathfrak{S}$ und damit auch in $\mathfrak{q}_e = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{S}_e$ enthalten ist, so folgt in $\mathfrak{S}_e$ aus $\pi \cdot \varrho \subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}_e$ stets $\varrho \subset \mathfrak{q}_e$, und es muß infolgedessen die zu $\mathfrak{q}_e$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}_e$ ein echtes Primärideal sein. Wir dürfen uns daher weiterhin auf den Fall beschränken, daß $\Lambda = \Lambda_e$ über K endlich ist.

b) In dem über K endlichen Körper Λ können wir ξ so bestimmen, daß $\mathsf{K}_1 = \mathsf{K}(\xi)$ über K separabel ist, während Λ über K einen Wurzelkörper darstellt. In $\mathfrak{R}_1 = \mathsf{K}_1 \cdot \mathfrak{R}$ wird $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$ nach Beitrag VI, Satz 9 Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, und wegen der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{p}$, die beim Beweis ja vorausgesetzt werden darf, ist sogar $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s$ und damit $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{p}_s \cdot \mathfrak{S})$. Unter diesen Umständen brauchen wir bloß zu zeigen, das für $i = 1, \ldots, s$ das Ideal $\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ Primideal ist.

c) [25]). Wir betrachten etwa das Primideal $\mathfrak{p}_1$ und setzen $\bar{\Lambda}_1 = \mathfrak{R}_1/\mathfrak{p}_1$, während unter $\bar{\mathsf{M}}_1$ der Körper aller über K_1 algebraischen Elemente aus $\bar{\Lambda}_1$ verstanden werden soll. $\bar{\Lambda}_1$ ist über $\bar{\mathsf{M}}_1$ streng transzendent, weil $\bar{\Lambda}$ über $\bar{\mathsf{M}}$ es ist. Bedeutet ferner $p(x)$ das über K irreduzible, separable Polynom mit der Nullstelle ξ,

---

[24]) Der Quotientenkörper, der gebildet werden muß, weil $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{R}$ maximal ist, ist natürlich zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_\mathfrak{p})$ isomorph [vgl. [21])!].

[25]) Die folgenden Betrachtungen gestalten sich etwas umständlich, weil wir die Bildung von Λ auf die Bildung von endlich vielen einfachen Körpererweiterungen zurückführen müssen. Wir müssen so zwischen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{S}$ endlich viele Ringe $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \ldots$ einschalten, die nicht ganz abgeschlossen zu sein brauchen, und von denen sogar mehrere denselben Quotientenkörper besitzen können. (Man beachte, daß über das Verhältnis von $\mathfrak{R}$ zu K nichts vorausgesetzt wurde.)

so entsteht $\bar{\Lambda}_1$ aus $\bar{\Lambda}$ und damit (wegen der strengen Transzendenz von $\bar{\Lambda}$ über $\bar{\mathsf{M}}$) auch $\bar{\mathsf{M}}_1$ aus $\bar{\mathsf{M}}$ durch Adjunktion einer geeigneten Nullstelle $\bar{\xi}$ von $\varphi(x)$, und es muß daher $\bar{\mathsf{M}}_1$ über K_1 separabel sein, weil $\bar{\mathsf{M}}$ über K separabel angenommen wurde. — Da K_1 in $\mathfrak{R}_1$ algebraisch maximal und Λ ein Wurzelkörper über K_1 ist, gibt es in Λ sicher ein nicht zu K_1 gehöriges Element $\alpha = \sqrt[p]{a}$ $(a \subset \mathsf{K}_1)$. Wir setzen $\mathsf{K}_2 = \mathsf{K}_1(\alpha)$, $\mathfrak{R}_2 = \mathsf{K}_2 \cdot \mathfrak{R}_1$. Dann ist jedenfalls $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{R}_2$ in $\mathfrak{R}_2$ Primideal, weil das über K_1 irreduzible Polynom $x^p - a = x^p - \alpha^p$ wegen der Separabilität von $\bar{\mathsf{M}}_1$ über K_1 auch über $\bar{\Lambda}_1$ irreduzibel ist. Da ferner α die einzige Nullstelle von $x^p - a$ ist, können wir geradezu $\mathfrak{R}_2/(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{R}_2) = \bar{\Lambda}_2 = \bar{\Lambda}_1(\alpha)$ setzen, und aus der strengen Transzendenz von $\bar{\Lambda}_1$ über $\bar{\mathsf{M}}_1$ folgt, daß $\bar{\Lambda}_2$ über dem über K_2 separabeln Unterkörper $\bar{\mathsf{M}}_2 = \bar{\mathsf{M}}_1(\alpha)$ streng transzendent ist. Schließlich sieht man mühelos, daß der Körper K_2 in $\mathfrak{R}_2$ maximal ist. Enthielte nämlich $\mathfrak{R}_2$ einen echten Oberkörper K_2' von K_2, so müßte dieser jedenfalls über K_2 inseparabel und in $\bar{\mathsf{M}}_2$ als Unterkörper enthalten sein. Das ist aber wegen der Separabilität von $\bar{\mathsf{M}}_2$ über K_2 ausgeschlossen.

d) Ist $\mathsf{K}_2 = \Lambda$, $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{S}$ so sind wir am Ziel. Im anderen Falle gibt es in Λ ein nicht zu K_2 gehöriges Element $\beta = \sqrt[p]{b}$ $(b \subset \mathsf{K}_2)$, wir können $\mathsf{K}_3 = \mathsf{K}_2(\beta)$ setzen und die unter c) ausführlich dargestellten Schlüsse wiederholen. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich so schließlich, daß $\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{S}$ Primideal sein muß. Nur ein Punkt scheint auf den ersten Blick Schwierigkeiten zu machen: $\mathfrak{R}_1$ war ganz abgeschlossen, und es war $x^p - \alpha^p$ nicht nur über K_1, sondern auch über $\mathfrak{R}_1$ und dem zugehörigen Quotientenkörper $\mathfrak{R}_1$ irreduzibel. Da wir keine Voraussetzungen über das Verhältnis von $\mathfrak{R}$ zu K gemacht haben, können wir nicht behaupten, daß $\mathfrak{R}_2$ ganz abgeschlossen und $x^p - \beta^p$ über $\mathfrak{R}_2$ irreduzibel sein muß. Aber das schadet nichts; denn weder die Ganz-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}_1$ noch die Irreduzibilität von $x^p - \beta^p$ über $\mathfrak{R}_1$ wurde beim Übergang von $\mathfrak{R}_1$ zu $\mathfrak{R}_2$ ausgenutzt.

Die Verknüpfung des nunmehr voll bewiesenen Satzes 9 mit Satz 2 von § 1 liefert:

Satz 10. *Ist nicht nur $\bar{\Lambda}$ über $\bar{\mathsf{M}}$, sondern auch $\mathfrak{R}$ über K streng transzendent, und ist $\bar{\mathsf{M}}$ über K separabel, so ist $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ bei beliebiger Wahl von Λ stets gleich dem Durchschnitt der über $\mathfrak{p}$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$.*

In der Tat, nach Satz 2 muß $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \mathfrak{y}_2 \cap \ldots$ sein, falls $\mathfrak{y}_i$ jeweils die zu dem Primideal $\mathfrak{q}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ bedeutet, und nach Satz 9 wird $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{q}_i$ für jedes i. — Satz 10 kann als eine Ergänzung des für separable Grundkörpererweiterungen geltenden Satzes 9 von Beitrag VI angesehen werden. Bei einem maximalen Primideal $\mathfrak{p}$ ist die Voraussetzung der strengen Transzendenz von $\mathfrak{R}$ über K sicher entbehrlich,

weil in diesem Falle $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ immer gleich dem Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten ist. Bei nichtmaximalem $\mathfrak{p}$ sehe ich keine Möglichkeit, den Rückgriff auf Satz 2 zu vermeiden, ohne daß ich aber bis jetzt durch ein Beispiel zeigen könnte, daß Satz 10 bei nicht streng transzendentem $\mathfrak{K}$ unter Umständen falsch wird.

§ 4.

Körpertheoretische Betrachtungen.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen Körper der Charakteristik p, der über dem Unterkörper K transzendent ist. Unter Λ verstehen wir einen algebraischen Oberkörper von K, unter M den Körper aller über K algebraischen Elemente aus $\mathfrak{L} = \Lambda \cdot \mathfrak{K}$. Ist M ein echter Oberkörper von Λ, so ist auch $\mathsf{M}_e = \mathsf{M} \cap (\mathfrak{K} \cdot \Lambda_e)$ ein echter Oberkörper von Λ_e für einen geeigneten über K endlichen Unterkörper Λ_e von Λ. Unter diesen Umständen dürfen wir bei den Beweisen der folgenden Sätze ohne Einschränkung der Allgemeinheit durchweg stillschweigend voraussetzen, daß der betrachtete Körper Λ über K endlich algebraisch ist. Die Bezeichnungen „reduzierter Grad" und „Exponent" eines Körpers haben bei uns dieselbe Bedeutung wie bei Steinitz [26]).

Satz 11. *Die Körper Λ und M haben über K denselben reduzierten Grad und denselben Exponenten* [27]).

Es sei nämlich g_λ bzw. g_μ bzw. g_l (e_λ bzw. e_μ bzw. e_l) der reduzierte Grad (Exponent) von Λ über K bzw. M über K bzw. $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$. Dann ist $g_\mu \geqq g_\lambda$, $e_\mu \geqq e_\lambda$ wegen $\mathsf{M} \supseteq \Lambda$ und $g_l \leqq g_\lambda$, $e_l \leqq e_\lambda$ wegen $\mathfrak{L} = \Lambda \cdot \mathfrak{K}$. Andererseits gibt es nach Steinitz in M stets ein Element ξ mit der Eigenschaft, daß bereits der Körper $\mathsf{K}(\xi)$ über K den reduzierten Grad g_μ und den Exponenten e_μ besitzt. Das über K irreduzible Polynom mit der Nullstelle ξ muß wegen der Transzendenz von $\mathfrak{K}$ auch über $\mathfrak{K}$ irreduzibel sein, und es ist infolgedessen $g_l \geqq g_\mu$, $e_l \geqq e_\mu$. Im ganzen ergibt sich somit $g_l = g_\mu = g_\lambda$, $e_l = e_\mu = e_\lambda$.

Satz 12. *Ist $\mathsf{M} \neq \Lambda$, so ist M Wurzelkörper über Λ, und der Exponent von M über Λ ist höchstens gleich dem Exponenten von Λ über K* [27]).

Satz 12 folgt unmittelbar aus Satz 11. Wären nämlich die angegebenen Bedingungen nicht erfüllt, so könnte M nicht gleichzeitig denselben reduzierten Grad und denselben Exponenten über K besitzen wie Λ. Satz 12 zeigt insbesondere, daß immer $\Lambda = \mathsf{M}$ sein muß, wenn Λ einen separabeln Oberkörper von K darstellt. — Die bisher besprochenen Sätze sind nur dann

---

[26]) Der reduzierte Grad von Λ über K ist gleich dem Grad des größten über K separabeln Unterkörpers von Λ. Der Exponent von Λ über K ist die kleinste nichtnegative ganze Zahl e, für die die p^e-ten Potenzen aller Λ-Elemente über K separabel sind.

[27]) Vgl. demgegenüber Satz 3 von § 2!

von Interesse, wenn $\mathfrak{R}$ über K nicht streng transzendent ist. Wir fragen jetzt umgekehrt nach Bedingungen, unter denen $\mathfrak{R}$ über K streng transzendent ausfällt.

Satz 13. *Der Körper* K *hat dann und nur dann die Eigenschaft, daß jeder transzendente Oberkörper* $\mathfrak{R}$ *gleichzeitig streng transzendent ist, wenn* K *fast vollkommen ist, wenn also jeder endlich algebraische Oberkörper* Λ *von* K *eine einfache Erweiterung darstellt,* $\Lambda = \mathsf{K}(\xi)$.

a) Daß $\mathfrak{R}$ bei fast vollkommenem K stets streng transzendent ist, folgt aus Satz 10 und der Tatsache, daß bei einer einfachen Erweiterung $\Lambda = \mathsf{K}(\xi)$ der Gesamtgrad $[\Lambda : \mathsf{K}]$ über K gleich $g \cdot p^e$ ist, falls g den reduzierten Grad, e den Exponenten über K bedeutet.

b) Ist K nicht fast vollkommen, so gibt es nach Steinitz [28]) stets über K einen nicht einfachen Oberkörper Λ von der Form $\Lambda = \mathsf{K}(\xi, \eta)$, wobei ξ, η die p-ten Wurzeln aus zwei geeigneten K-Elementen u, v sind. Setzt man nun $\mathfrak{R} = \mathsf{K}(x, y, \xi x + \eta y)$, wobei x, y Unbestimmte bedeuten, so ist $\mathfrak{R}$ nach § 2 über K transzendent, während $\mathsf{K}(\eta) \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{L}$ das über $\mathsf{K}(\eta) = \Lambda$ echt algebraische Element ξ enthält. — Fragen wir bei einem nicht fast vollkommenen Körper K nach Bedingungen, unter denen ein fest vorgegebener Körper $\mathfrak{R}$ über K streng transzendent ist, so ergibt sich leicht:

Satz 14. *Der Körper* $\mathfrak{R}$ *ist sicher über* K *streng transzendent, wenn* $\mathfrak{R}$ *über einem rein transzendenten Oberkörper* $\mathfrak{T}$ *von* K *separabel algebraisch ist.*

Für $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}$ ist die Behauptung klar; denn es stellt in diesem Falle $\mathfrak{R}$ bzw. $\Lambda \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{L}$ einfach den Körper aller Polynomquotienten in einer geeigneten Variabelnmenge über K bzw. Λ dar. Es sei nun ξ irgendein über Λ algebraisches Element von $\mathfrak{R} \cdot \Lambda$; $p(x)$ sei das über Λ irreduzible Polynom mit der Nullstelle ξ. Dann ist $p(x)$ wegen der Transzendenz von $\mathfrak{T} \cdot \Lambda$ über Λ auch über $\mathfrak{T} \cdot \Lambda$ irreduzibel, und es muß daher ξ über Λ separabel sein, weil $\mathfrak{R} \cdot \Lambda$ wegen der Separabilität von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{T}$ sicher über $\mathfrak{T} \cdot \Lambda$ separabel ist. Aus Satz 12 folgt nun sofort $\xi \subset \Lambda$, es enthält also tatsächlich $\mathfrak{R} \cdot \Lambda$ kein über Λ echt algebraisches Element.

Über Satz 14 hinaus zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die strenge Transzendenz von $\mathfrak{R}$ über K vorzudringen, dürfte keine ganz einfache Aufgabe sein. Wir gehen hier auf diese Frage nicht näher ein, und wenden uns zum Schluß einem anderen, rein algebraischen Problem zu, bei dem ähnlich wie bei Satz 12 die fast vollkommenen Körper in den Vordergrund treten.

Bekanntlich gilt der folgende, für die Galoissche Theorie grundlegende Satz: Ist N ein endlicher Normalkörper, Λ ein beliebiger endlicher algebraischer Oberkörper von K, und bezeichnet Δ den Durchschnitt von Λ

[28]) Vgl. den in Anm. [5]) unter b) angeführten Satz!

und N, so ist die Gruppe von $\mathsf{N} \cdot \Lambda$ über Λ stets isomorph zur Gruppe von N über Λ. — Ist N über K separabel, so folgt aus diesem Gruppensatz sofort die Gradformel $[(\mathsf{N} \cdot \Lambda) : \Lambda] = [\mathsf{N} : \Lambda]$. Lassen wir dagegen die Voraussetzung der Separabilität von N fallen, so ergibt sich:

Satz 15. *Die Gradformel* $[(\mathsf{N} \cdot \Lambda) : \Lambda] = [\mathsf{N} : \Lambda]$ *gilt (bei normalem* N *und beliebigem* Λ*) allgemein, wenn* K *fast vollkommen ist. Ist dagegen diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann unter Umständen* $[(\mathsf{N} \cdot \Lambda) : \Lambda] < [\mathsf{N} : \Lambda]$ *werden.*

Offenbar darf man sich beim Beweis auf den Fall $\Lambda = \mathsf{K}$ beschränken. Ist dann $\mathsf{N} = \mathsf{K}(\xi)$ über K einfach, so folgt die Gradformel unmittelbar aus der Tatsache, daß das über K irreduzible Polynom mit der Nullstelle ξ auch über Λ irreduzibel bleiben muß [29]). — Es sei andererseits K_p irgendein Körper der Charakteristik $p > 2$ [30]), und es bedeute $\mathsf{K} = \mathsf{K}_p(u, v, w)$ eine dreifache, rein transzendente Erweiterung von K_p. Ähnlich wie in § 2 werde $\xi = \sqrt[p]{u}$, $\eta = \sqrt[p]{v}$, $\mathsf{N} = \mathsf{K}(\xi, \eta)$ gesetzt. Unter Λ werde der Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ verstanden, wobei ϑ eine Nullstelle des folgenden, über K irreduzibeln Polynoms $q(x)$ bedeutet:

$$q(x) = x^{2p} - 2u \cdot x^p + (u^2 - v^2 \cdot w^p) = [((x - \xi) + \eta \cdot \sqrt{w}) \cdot ((x - \xi) - \eta \cdot \sqrt{w})]^p.$$

N ist ein nicht einfacher Normaloberkörper von K vom Grade p^2, während $\Lambda \cdot \mathsf{N} = \mathsf{K}(\xi, \eta, \vartheta) = \Lambda(\xi)$ und damit $[(\Lambda \cdot \mathsf{N}) : \Lambda] = p$ wird. (Man beachte: $\eta \cdot v \cdot w^{\frac{p+1}{p}} = (\vartheta - \xi)^{p+1}$.) Wäre ferner $\Lambda = \Lambda \cap \mathsf{N} = \mathsf{K}' \neq \mathsf{K}$, so hätte man wegen $[\mathsf{N} : \mathsf{K}] = p^2$, $[\Lambda : \mathsf{K}] = 2p$, $[\Lambda : \mathsf{K}] = [\Lambda : \mathsf{K}'] \cdot [\mathsf{K}' : \mathsf{K}]$ jedenfalls $[\mathsf{K}' : \mathsf{K}] = p$, und es müßte $q(x)$ über K' die p-te Potenz eines quadratischen Polynoms werden, d. h. es müßten die Koeffizienten von $x^2 - 2\xi x + (\xi^2 - w \cdot \eta^2)$ in K' liegen. Das ist aber wegen $\mathsf{K}(2\xi, \xi^2 - w \cdot \eta^2) = \mathsf{K}(\xi, \eta) = \mathsf{N}$ ausgeschlossen. — Wir haben also: $\Lambda = \mathsf{K}$, $[(\Lambda \cdot \mathsf{N}) : \Lambda] = p < [\mathsf{N} : \Lambda] = p^2$.

---

[29]) Vgl. hierzu: O. Haupt, Einführung in die Algebra (Leipzig, Akad. Verlagsges., 1929) Bd. II; 19, 5. Dort wird die Bedeutung der Gradformel für die Auflösungstheorie der algebraischen Gleichungen ausführlich untersucht.

[30]) Auch für den Fall der Charakteristik 2 kann leicht ein entsprechendes Beispiel konstruiert werden. Nur die Tatsache, daß man an Stelle der im Text auftretenden Quadratwurzeln dritte Wurzeln benutzen muß, bedeutet eine kleine Rechnungserschwerung.

(Eingegangen am 21. September 1938.)

Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques.

Par

Elie Cartan (à Paris).

Dans un article récent[1]) j'ai signalé l'existence dans l'espace sphérique à quatre dimensions d'une famille d'hypersurfaces isoparamétriques à trois courbures principales distinctes. Je me propose de rechercher s'il existe, dans un espace sphérique à un nombre quelconque de dimensions, des familles d'hypersurfaces isoparamétriques admettant seulement trois courbures principales distinctes. Dans la première partie de ce Mémoire, je montrerai l'existence de telles familles dans les espaces à 4, 7, 13 et 25 dimensions; cette existence sera liée à celle d'un polynome homogène du troisième degré à $n + 2$ variables ($n + 1$ étant la dimension de l'espace sphérique) jouissant de la double propriété que son premier paramètre différentiel, calculé dans l'espace euclidien à $n + 2$ dimensions de coordonnées rectangulaires $x_1, \ldots, x_{n+2}$, soit constant sur l'hypersphère de rayon 1 et que son second paramètre différentiel soit nul (polynome harmonique). De tels polynomes n'existent que pour $n = 3, 6, 12, 24$ ou $n = 3.2^k$ ($k = 0, 1, 2, 3$). Le cas $n = 24$ est particulièrement intéressant parce qu'il est lié à différentes théories (théorie des spineurs, principe de trialité dans l'espace elliptique à 7 dimensions) et qu'il fournit la première apparition dans un problème de Géométrie (et même l'Analyse) du groupe simple à 52 paramètres qui ne rentre dans aucune des grandes classes de groupes simples.

Dans la seconde partie du Mémoire, je montrerai que les familles d'hypersurfaces isoparamétriques ainsi déterminées sont les seules pour lesquelles les hypersurfaces n'admettent que trois courbures principales distinctes. Ce n'est que dans cette seconde partie qu'il sera fait appel aux résultats et aux formules du Mémoire rappelé en note. Je démontrerai enfin un théorème fondamental très simple sur les familles d'hypersurfaces isoparamétriques dont les courbures principales sont toutes du même degré de multiplicité.

[1]) Annali di Mat. **17** (1938), p. 177—191.

Première Partie.

I. Détermination d'une classe de polynomes.

1. Considérons dans l'espace euclidien à $n+2$ dimensions rapporté à des coordonnées rectangulaires $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ un polynome entier $F(x)$ du troisième degré. Sur l'hypersphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, ce polynome, s'il n'est pas identiquement nul, passe par un maximum absolu et par un minimum absolu égal et opposé au maximum. Nous supposerons le maximum égal à 1. Nous supposerons de plus

1° que le premier paramètre différentiel $\Delta_1 F = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$ garde une valeur constante sur l'hypersphère et par suite satisfait à une relation de la forme

$$\Delta_1 F \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = \lambda (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+2}^2)^2, \tag{1}$$

λ étant une constante;

2° que le polynome F est harmonique:

$$\Delta_2 F \equiv \sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0. \tag{2}$$

Nous allons obtenir la valeur de λ de la manière suivante. Si le polynome F prend sa valeur maxima 1 au point (x_i), on aura en ce point

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \varrho x_i,$$

d'où, par multiplication par x_i et sommation par rapport à i,

$$3F = \varrho, \qquad \text{ou} \qquad \varrho = 3;$$

en élevant au carré et sommant nous obtenons $\lambda = \varrho^2 = 9$. Nous pouvons donc écrire

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 9 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+2}^2)^2. \tag{1'}$$

Avant de résoudre les équations (1') et (2) nous allons supposer, ce qui ne restreint pas la généralité, que le polynome F prend sa valeur maxima 1 au point $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$, $x_{n+2} = 1$ de l'hypersphère de rayon 1; nous aurons donc en ce point

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Nous pouvons alors écrire

$$F \equiv x_{n+2}^3 + x_{n+2} P(x) + Q(x), \tag{3}$$

les polynomes P et Q ne dépendant que de $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

La propriété du polynome F d'être harmonique donne les relations immédiates

4) $$\Delta_2 P + 6 = 0,$$

5) $$\Delta_2 Q = 0.$$

Quant à l'identité (1'), elle donne les trois relations

6) $$6P + \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 = 18 \sum x_i^2,$$

7) $$\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0,$$

8) $$P^2 + \sum_i \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)^2 = 9 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2)^2;$$

a sommation dans ces formules est faite par rapport aux indices $1, 2, \ldots,$ $+ 1$.

Nous allons résoudre les équations (4), (5), (6), (7), (8).

2. L'équation (4) est facile à résoudre. P étant un polynome du second legré est, par un choix convenable des axes de coordonnées, réductible à

$$P \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}^2;$$

a relation (4) donne

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = -3.$$

Si nous portons maintenant le valeur de P dans la relation (6), nous obtenons pour chaque valeur de i,

$$4 a_i^2 + 6 a_i - 18 = 0,$$

le sorte que chacun des coefficients du polynome P a l'une des valeurs $\frac{3}{2}$ t -3. Si la première se présente p fois et la seconde q fois ($p + q = n + 1$), n a

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = \tfrac{3}{2}(p - 2q),$$

'où

$$p - 2q = -2, \qquad p = 2(q - 1).$$

Nous poserons

$$q = \nu + 1, \qquad p = 2\nu, \qquad \text{d'où } n = 3\nu,$$

t nous aurons

9) $$P \equiv \tfrac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2\nu}^2) - 3(x_{2\nu+1}^2 + \ldots + x_{3\nu+1}^2).$$

3. Passons à la détermination du polynome Q. Mais auparavant nous hangerons de notations. Nous désignerons par z_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, \nu + 1$) les

coordonnées $x_{2\nu+1}, \ldots, x_{3\nu+1}$; par $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, 2\nu)$ les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{2\nu}$ et par u la coordonnée x_{n+2}, de sorte que nous avons

$$P \equiv \tfrac{3}{2} \sum_i x_i^2 - 3 \sum_\alpha z_\alpha^2. \tag{9'}$$

Le polynome du troisième degré Q peut être décomposé en quatre parties

$$Q = A + B + C + D,$$

A étant homogène de degré 3 par rapport aux x_i, B homogène de degré 2 par rapport aux x_i et de degré 1 par rapport aux z_α et ainsi de suite.

Cela posé la relation (7) donne immédiatement

$$9A - 9C - 18D = 0,$$

d'où $A = C = D = 0$ et par suite on peut écrire

$$Q = \sum_\alpha z_\alpha Q_\alpha(x), \tag{10}$$

les Q_α étant des polynomes du second degré en $x_1, x_2, \ldots, x_{2\nu}$. La relation (5) montre alors que ces polynomes sont harmoniques. Enfin la relation (8) donne

$$\frac{9}{4}\Big(\sum x_i^2\Big)^2 - 9\sum x_i^2 \sum z_\alpha^2 + 9\Big(\sum z_\alpha^2\Big)^2 + \sum_\alpha [Q_\alpha(x)]^2 + \sum_i \Big(\sum_\alpha z_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\Big)^2$$
$$= 9\Big(\sum x_i^2\Big)^2 + 18\sum x_i^2 \sum z_\alpha^2 + 9\Big(\sum z_\alpha^2\Big)^2;$$

elle se décompose en

$$\sum_\alpha [Q_\alpha(x)]^2 = \frac{27}{4}\Big(\sum x_i^2\Big)^2, \tag{8'}$$

$$\sum_i \Big(\sum_\alpha z_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\Big)^2 = 27 \sum x_i^2 \sum z_\alpha^2. \tag{8''}$$

Prenons d'abord la relation (8''); elle donne

$$\sum_i \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial Q_\beta}{\partial x_i} = 27\,\delta_\alpha^\beta \sum x_i^2 \qquad (\delta_\alpha^\beta = 1 \text{ si } \alpha = \beta, \quad \delta_\alpha^\beta = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta);$$

en particulier le polynome harmonique $Q_{\nu+1}(x)$ jouit de la propriété (comme les autres) que son premier paramètre différentiel est égal à $27\,\Sigma x_i^2$; on peut le ramener à la forme

$$Q_{\nu+1} \equiv b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \ldots + b_{2\nu} x_{2\nu}^2,$$

avec

$$b_1^2 = b_2^2 = \ldots = b_{2\nu}^2 = \tfrac{27}{4}, \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_{2\nu} = 0;$$

par suite on peut supposer

$$Q_{\nu+1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(x_1^2 + \ldots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \ldots - x_{2\nu}^2).$$

Nous introduirons encore une notation nouvelle; nous réserverons la lettre x pour les ν premières coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ et nous emploierons la lettre y pour les ν suivantes, que nous appellerons $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$; la lettre i sera maintenant employée pour les indices $1, 2, \ldots, \nu$. Enfin nous appellerons v la coordonnée $z_{\nu+1}$. Nous pourrons donc écrire

$$Q_{\nu+1} \equiv \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big(\sum x_i^2 - \sum y_i^2\Big). \tag{11}$$

Les relations (8) prennent maintenant la forme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i [Q_i(x,y)]^2 = 27 \sum x_i^2 \sum y_i^2, \\ \displaystyle\sum_i \Big(x_i \frac{\partial Q_k}{\partial x_i} - y_i \frac{\partial Q_k}{\partial y_i}\Big) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu), \\ \displaystyle\sum_i \Big[\Big(\frac{\partial Q_k}{\partial x_i}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial Q_k}{\partial y_i}\Big)^2\Big]^2 = 27\Big(\sum x_i^2 + \sum y_i^2\Big), \\ \displaystyle\sum_i \Big(\frac{\partial Q_k}{\partial x_i}\frac{\partial Q_h}{\partial x_i} + \frac{\partial Q_k}{\partial y_i}\frac{\partial Q_h}{\partial y_i}\Big) = 0 \qquad (k \neq h). \end{cases} \tag{12}$$

La seconde relation (12) montre que les polynomes $Q_k(x, y)$ sont bilinéaires par rapport aux deux séries de variables x_i, y_i:

$$Q_k(x) = \sum_{i,j} a_{ijk} x_i y_j.$$

4. Si nous résumons les résultats obtenus, nous voyons que le polynome F prend la forme

$$F \equiv u^3 - 3uv^2 + \frac{3}{2}u\sum_i (x_i^2 + y_i^2) - 3u\sum_i z_i^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}v\sum (x_i^2 - y_i^2) + \sum_k z_k Q_k(x, y). \tag{13}$$

La forme trilinéaire $\sum z_k Q_k$ aux trois séries de variables x_i, y_i, z_i jouit de propriétés remarquables. Si nous posons

$$Q_k = 3\sqrt{3}\, H_k,$$

nous voyons que la première relation (12) fournit une généralisation des formules bien connues de Lagrange et de Brioschi qui représentent le produit de deux sommes de ν carrés par une somme de ν carrés. On a en effet

$$\sum_i [H_i(x, y)]^2 = \sum x_i^2 \sum y_i^2, \tag{14}$$

les ν quantités $H_i(x, y)$ du premier membre étant bilinéaires par rapport aux x_i et aux y_i. Cette relation entraîne du reste toutes les autres relations (12), car si nous posons

$$H_i(x, y) = \sum_k a_{ik}(x)\, y_k,$$

la relation (14) montre que dans le tableau à ν lignes et ν colonnes des coefficients $a_{ik}(x)$, la somme des carrés des éléments d'une même colonne est

égale à $\sum x_i^2$ et que la somme des produits des éléments de deux colonnes différentes pris successivement dans les ν lignes est nulle; c'est précisément ce qu'expriment les relations (12) autres que la première. On voit aussi par la même occasion que le déterminant de ce tableau n'est pas nul et est égal à $[\sum x_i^2]^{\frac{\nu}{2}}$.

Mais la relation (14) a une signification géométrique remarquable. Pour la mettre en évidence il sera commode de particulariser l'un des polynomes H_i, par exemple H_1. On a

$$H_1 = a_1(x)\,y_1 + a_2(x)\,y_2 + \ldots + a_\nu(x)\,y_\nu$$

avec

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_\nu^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2,$$

par suite on peut supposer, par une substitution linéaire orthogonale convenable effectuée sur les x_i, que $a_i(x) = x_i$, d'où

$$H_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu. \tag{15}$$

Cela posé regardons les x_i et les y_i comme les coordonnées homogènes de deux points de l'espace elliptique à $\nu - 1$ dimensions; ce seront des coordonnées normales si la somme de leurs carrés est égale à 1. Si la forme $H_1(x, y)$ s'annule, cela veut dire que les deux points sont conjugués l'un de l'autre par rapport à l'absolu. Ils définissent une droite. On sait d'autre part que si (y_i) et (z_i) sont tous les deux conjugués de (x_i) par rapport à l'absolu et si les coordonnées des trois points (x), (y), (z) sont normales, la quantité $\sum_i y_i z_i$ représente le cosinus de l'angle des deux droites $[xy]$ et $[xz]$.

5. Arrivons maintenant à l'interprétation géométrique annoncée. Nous conviendrons de dire que deux droites $[xy]$ et $[x'y']$, y étant conjugué de x et y' de x', sont *parallèles* si, les coordonnées x_i, y_i, x_i', y_i étant normales, on a

$$H_i(x, y) = H_i(x', y').$$

Par tout point x' il passe une parallèle bien déterminée à la droite $[xy]$, car le déterminant des coefficients des y_i' dans $H_i(x', y')$ est égal à 1. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. *Il existe donc dans l'espace elliptique à $\nu - 1$ dimensions un parallélisme absolu.* De plus ce *parallélisme absolu est isogonal*, c'est-à-dire que l'angle sous lequel se coupent deux droites issues d'un même point est égal à l'angle sous lequel se coupent les parallèles à ces deux droites menées par un même point. En effet soient respectivement $[x'y']$ et $[x'z']$ parallèles à $[xy]$ et $[xz]$; des égalités

$$H_i(x', y') = H_i(x, y),$$
$$H_i(x', z') = H_i(x, z),$$

résulte l'égalité

$$H_i(x', y' + \lambda z') = H_i(x, y + \lambda z);$$

en élevant au carré, ajoutant et tenant compte de (14) et de l'hypothèse que es coordonnées introduites sont toutes normales, on trouve immédiatement

$$1 + \lambda^2 + 2\lambda \sum y_i' z_i' = 1 + \lambda^2 + 2\lambda \sum y_i z_i,$$

c'est-à-dire

$$\sum y_i' z_i' = \sum y_i z_i. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. Il est connu[2]) que les seuls espaces riemanniens admettant un parallélisme absolu isogonal sont les espaces représentatifs des groupes simples clos et l'espace elliptique à 7 dimensions, auxquels il faut ajouter l'espace représentatif du groupe clos des rotations de la circonférence ($\nu = 2$) ainsi que les produits topologiques de deux ou plusieurs des espaces précédents. Parmi tous ces espaces ceux qui sont à coubure constante sont les espaces elliptiques à 1, 3 et 7 dimensions; aucun produit topologique ne peut convenir, car le ds^2 de l'epsace riemannien correspondant serait la somme de deux ds^2 portant sur des variables séparées u_i et v_j et le tenseur de Riemann ne pourrait pas être de la forme qui convient à un espace à courbure constante non nulle.

Par conséquent le problème proposé n'admet de solution que pour $\nu = 2, 4, 8$, cas auxquels il faut naturellement ajouter $\nu = 1$!

Il résulte de la théorie bien connue des parallélismes isogonaux dans les cas qui viennent d'être démontrés les seuls possibles que l'on peut donner à la forme trilinéaire $\mathfrak{F} = \sum z_k H_k(x, y)$ l'expression générale

(16) $$\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2}(XYZ + \overline{Z}\,\overline{Y}\,\overline{X});$$

pour $\nu = 1$, X, Y, Z sont trois variables réelles et

$$\overline{X} = X, \qquad \overline{Y} = Y, \qquad \overline{Z} = Z;$$

pour $\nu = 2$, X, Y, Z sont trois variables complexes, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ les trois variables conjuguées;

pour $\nu = 4$, X, Y, Z sont trois quaternions, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ leurs conjugués;

pour $\nu = 8$, X, Y, Z sont trois octaves de Graves-Cayley, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ leurs conjugués; dans ce dernier cas, la multiplication des octaves n'étant pas associative, il faut interpréter XYZ comme étant $(XY)Z$ et $\overline{Z}\,\overline{Y}\,\overline{X}$ comme étant l'octave conjugué $\overline{Z}(\overline{Y}\,\overline{X})$.

Finalement la formule (13) devient

(17) $$F \equiv u^3 - 3uv^2 + \frac{3}{2}u(X\overline{X} + Y\overline{Y} - 2Z\overline{Z}) + \frac{3\sqrt{3}}{2}v(X\overline{X} - Y\overline{Y}) + \frac{3\sqrt{3}}{2}(XYZ + \overline{Z}\,\overline{Y}\,\overline{X}).$$

---

[2]) E. Cartan and J. A. Schouten, *On the riemannian Geometries admitting an absolute parallelism* [Proc. Akad. Amsterdam **29** (1926), p. 933—946].

II. Propriétés des hypersurfaces $F = C$.

7. Nous allons d'abord vérifier que les hypersurfaces $F = C$ de l'espace sphérique à $3\nu + 1$ dimensions forment une famille d'hypersurfaces parallèles. Reprenons en effet nos notations initiales; soit x un point de l'hypersurface $F = C$; un point infiniment voisin $x + \delta x$ est dans la direction normale à cette hypersurface si, les coordonnées x_i étant supposées normales, le point δx est conjugué par rapport aux points $x + dx$ infiniment voisins de x sur l'hypersurface, autrement dit si la relation $\Sigma\, \delta x_i\, dx_i = 0$ est une conséquence des deux relations

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = 0, \qquad \sum_i x_i dx_i = 0;$$

on a donc

$$\delta x_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu x_i.$$

Le point δx doit être également conjugué par rapport au point x, ce qui donne

$$3\lambda C + \mu = 0,$$

d'où

$$\delta x_i = \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - 3 C x_i\right).$$

Pour avoir λ, exprimons que le point $x + \delta x$ appartient à l'hypersurface de paramètre $C + \delta C$, ce qui donne

$$\delta C = \lambda (9 - 9 C^2) = 9 \lambda (1 - C^2).$$

En appelant enfin δt la distance des deux points x et $x + \delta x$, on trouve

$$\delta t = \lambda \sqrt{9 (1 - C^2)} = \frac{1}{3} \frac{\delta C}{\sqrt{1 - C^2}}.$$

Cette formule prouve bien que les hypersurfaces forment une famille d'hypersurfaces parallèles; on a d'autre part, t n'étant défini qu'à une constante près, $C = \cos 3t$, d'où

$$\cos 3t = F$$

pour équation de la famille. Ce résultat aurait pu être dérivé facilement des considérations de l'article précédemment rappelé.

8. Pour étudier les propriétés des hypersurfaces de la famille, nous allons d'abord prendre le cas $t = 0$: on a le lieu des points où la fonction F prend sa valeur maxima 1. C'est une variété singulière V de la famille qui, comme nous l'avons vu (n° 1), satisfait aux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 3 x_i. \tag{18}$$

Remarquons d'abord que le polynome F étant à coefficients constants et ayant été construit en partant d'un point quelconque

$$A\ (x_{n+2} = 1,\ x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0)$$

de la variété considérée, cette variété admet un groupe transitif de déplacements rigides de l'espace ambiant. Rappelons-nous maintenant que la courbure en A, calculée dans l'espace sphérique considéré, réalisé par l'hypersphère de rayon 1 de l'espace euclidien à $n+2$ dimensions, d'une courbe quelconque tracée dans la variété et passant par A se conserve par projection orthogonale sur l'hyperplan tangent à l'hypersphère en A, hyperplan d'équation $x_{n+2} = 1$ ou, avec les nouvelles notations, $u = 1$. Cela posé les équations (18) de V au voisinage du point A, limitées aux termes du second degré, seront, d'après (13),

$$3u^2 - 3v^2 + \frac{3}{2}(X\overline{X} + Y\overline{Y} - 2Z\overline{Z}) = 3u,$$

$$-6uv + \frac{3\sqrt{3}}{2}(X\overline{X} - Y\overline{Y}) = 3v,$$

$$3ux_i + 3\sqrt{3}\,vx_i + \sum_k z_k \frac{\partial Q_k}{\partial x_i} = 3x_i,$$

$$3uy_i - 3\sqrt{3}\,vy_i + \sum_k z_k \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} = 3y_i,$$

$$-6uz_i + Q_i(x,y) = 3z_i,$$

ou encore, en remarquant que l'on a, au même degré d'approximation,

$$u = 1 - \tfrac{1}{2}\sum_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \tfrac{1}{2}v^2,$$

et ne gardant toujours que les termes du second degré au plus,

$$(19)\qquad \begin{cases} z_i = \dfrac{1}{9}Q_i(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}H_i(x,y), \\ v = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\displaystyle\sum_i (x_i^2 - y_i^2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_i (x_i^2 - y_i^2). \end{cases}$$

Cela montre que *la variété V est à 2ν dimensions*, l'élément plan tangent au point A étant $dz_i = dv = 0$. La variété à 2ν dimensions définie dans un espace euclidien à $3\nu + 1$ dimensions par les équations (19) a même courbure en A pour toutes les courbes qui passent en ce point que la variété V dans l'espace sphérique à $3\nu + 1$ dimensions. La courbure normale d'une quelconque de ces courbes est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{[\Sigma(x_i^2 - y_i^2)]^2 + 4\sum_i H_i^2}}{\Sigma(x_i^2 + y_i^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

la variété V jouit donc de la propriété que toutes les courbes qui y sont tracées ont la même courbure normale constante $\frac{1}{\sqrt{3}}$ [3]). C'est une propriété qui avait déjà été vérifiée dans le cas $\nu = 1$ [4]).

9. Passons maintenant à l'étude d'une hypersurface générique Σ de la famille, correspondant à la valeur t du paramètre et prenons un point M de cette hypersurface. La trajectoire orthogonale des hypersurfaces qui passe par M va rencontrer la variété singulière V en un point P. Il est facile de voir que l'hypersurface Σ admet un groupe de déplacements rigides transitif de l'espace ambiant. En effet on peut toujours passer par un déplacement de l'espace ambiant du point P de V à un point particulier, celui que nous avons désigné par A; d'autre part les équations de l'élément plan normal en A à V sont

$$dx_i = dy_i = 0;$$

or il résulte de la manière dont nous avons calculé le polynome F qu'à toute substitution orthogonale sur $z_1, z_2, \ldots, z_{\nu+1}$ correspond au moins une substitution orthogonale sur les 2ν coordonnées x_i, y_i de telle sorte que le polynome F reste invariant; cela revient à dire que la géodésique de l'espace qui va de M en P peut toujours être ramenée à la géodésique $x_i = y_i = z_i = 0$. Autrement dit *on peut toujours effectuer un déplacement rigide de l'espace ambiant laissant l'hypersurface Σ invariante et transformant le point M dans le point de coordonnées*

$$x_i = 0, \quad y_i = 0, \quad v = \sin t, \quad u = \cos t.$$

Faisons maintenant le changement orthogonal de coordonnées

$$u + iv = (U + iV)\, e^{it},$$

qui donne au point considéré de Σ toutes les coordonnées nulles sauf $U = 1$. Comme on a

$$u^3 - 3uv^2 = \tfrac{1}{2}(u + iv)^3 + \tfrac{1}{2}(u - iv)^3,$$

l'équation de Σ deviendra

$$\begin{aligned}\cos 3t = {} & (U^3 - 3UV^2)\cos 3t + (V^3 - 3U^2V)\sin 3t \\ & + \frac{3}{2}(U\cos t - V\sin t)\,\Sigma(x_i^2 + y_i^2 - 2z_i^2) \\ & + \frac{3\sqrt{3}}{2}(U\sin t + V\cos t)\,\Sigma(x_i^2 - y_i^2) + \Sigma z_k Q_k(x, y).\end{aligned}$$

[3]) Certaines surfaces (à deux dimensions) plongées dans un espace elliptique et jouissant de la propriété que toutes leurs courbes ont la même courbure normale constante ont été rencontrées par O. Borůvka: *Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce* [J. d. Math. **12** (1933), p. 337—383].

[4]) E. Cartan, loc. cit.[1]), p. 189.

Remplaçant U par $1 - \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}\sum(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ et négligeant les ermes de degré supérieur au second, nous obtenons après simplifications

20) $$V \sin 3t = \tfrac{1}{2}(\cos t + \sqrt{3}\sin t - \cos 3t)\sum x_i^3 + \tfrac{1}{2}(\cos t - \sqrt{3}\sin t - \cos 3t)\sum y_i^3 - \tfrac{1}{2}(2\cos t + \cos 3t)\sum z_i^3.$$

Sous cette forme on voit que l'hypersurface Σ admet au point M trois ourbures principales distinctes et constantes à savoir

$$\frac{\cos t + \sqrt{3}\sin t - \cos 3t}{\sin 3t}, \quad \frac{\cos t - \sqrt{3}\sin t - \cos 3t}{\sin 3t}, \quad \frac{-2\cos t - \cos 3t}{\sin 3t}.$$

La courbure moyenne de l'hypersurface est donc $-3\nu \operatorname{cotg} 3t$. Une ransformation facile montre du reste que les trois courbures principales sont

$$\frac{\operatorname{cotg} t + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{cotg} t - 1} = -\operatorname{cotg}\left(t - \frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{\operatorname{cotg} t - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}\operatorname{cotg} t - 1} = -\operatorname{cotg}\left(t + \frac{\pi}{3}\right), \quad -\operatorname{cotg} t.$$

On retrouve les expressions prévues par la théorie générale dans le cas le trois courbures principales distinctes de même degré de multiplicité (ici ν) [5]).

10. Nous avons déjà eu l'occasion d'observer que chaque hypersurface Σ st invariante par un groupe de déplacements rigides transitif, et il résulte ussi du raisonnement fait que ce groupe est le même pour toutes les hyper- urfaces de la famille. En réalité il y a lieu de considérer trois groupes distincts:

1° le groupe G de tous les déplacements qui laissent invariant le olynome F;

2° le groupe G_1 de tous les déplacements qui laissent invariantes les iverses hypersurfaces Σ en laissant fixe un point A de la variété sin- ulière V;

3° le groupe G_2 de tous les déplacements qui laissent invariantes les iverses hypersurfaces Σ en laissant fixe un point M non situé sur V.

Chacun de ces groupes est un sous-groupe du précédent. Cela est évident our le second. Le troisième peut être regardé comme le sous-groupe du groupe ui laisse invariant le point A de V où aboutit la trajectoire orthogonale des ypersurfaces Σ partant de M, ainsi que la géodésique AM.

Si l'on connaît l'ordre r_2 du troisième groupe, on en déduira facilement les rdres des deux premiers. En effet le point A de V étant fixé, la géodésique AM eut prendre toute direction dans l'élément plan à $\nu + 1$ dimensions normal V en A; on a donc pour l'ordre r_1 de G_1 la relation

$$r_1 = r_2 + \nu.$$

D'autre part la variété V étant à 2ν dimensions, et le sous-groupe de G ui laisse fixe un point A de cette variété étant à r_1 paramètres, on a

$$r = r_1 + 2\nu = r_2 + 3\nu.$$

---

[5]) E. Cartan, loc. cit.[1]), p. 187.

Or le groupe G_2 n'est autre que le groupe des substitutions orthogonales qui laissent invariante la forme F ainsi que les coordonnées u et v; d'après la forme de F, on peut le caractériser comme transformant orthogonalement chacune des séries de variables x_i, y_i, z_i et laissant invariante la forme trilinéaire

$$\mathfrak{F} = \sum z_i H_i(x, y).$$

Nous allons passer en revue les quatre cas possibles en nous arrêtant surtout sur les trois derniers.

III. Le cas de l'espace sphérique à 7 dimensions.

11. Rappelons que dans le cas $\nu = 1$ (espace sphérique à 4 dimensions), le groupe G est à trois paramètres, isomorphe au groupe des rotations de l'espace ordinaire. Le groupe G_2, qui laisse invariante la forme $\mathfrak{F} \equiv xyz$, ne comprend que les 4 opérations

$$x' = \pm x, \quad y' = \pm y, \quad z' = \pm z,$$

le produit des trois doubles signes étant égal à 1. Le groupe G_1 est celui qui laisse invariantes les formes

$$x^2 + y^2, \quad z^2 + v^2, \quad (x^2 - y^2)v + 2xyz;$$

il se décompose dans les deux familles

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad & y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad & z' &= z\cos 2\alpha + v\sin 2\alpha, \\ & & v' &= -z\sin 2\alpha + v\cos 2\alpha; & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad & y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha, \quad & z' &= -z\cos 2\alpha + v\sin 2\alpha, \\ & & v' &= z\sin 2\alpha + v\cos 2\alpha. & & \end{aligned}$$

Rappelons enfin que la surface singulière V peut être définie paramétriquement par les formules [6])

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \sqrt{3}\,\eta\zeta, \quad y = \sqrt{3}\,\zeta\xi, \quad z = \sqrt{3}\,\xi\eta, \\ v = \sqrt{3}\,\dfrac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \quad u = \zeta^2 - \dfrac{\xi^2 + \eta^2}{2}, \end{cases}$$

où ξ, η, ζ sont trois paramètres liés par la relation

$$(22) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Le groupe G est celui induit sur les variables x, y, z, u, v par la substitution linéaire orthogonale la plus générale sur ξ, η, ζ.

---

[6]) E. Cartan, loc. cit.[1]), p. 189; les paramètres appelés ici ξ, η, ζ étaient désignés par les lettres u, v, w.

12. Dans le cas $\nu = 2$, il s'introduit dans la forme F trois variables complexes X, Y, Z, et la forme $\mathfrak{F}$ n'est autre que la partie réelle du produit XYZ. Le groupe G_2 se décompose dans les deux familles continues

$$X' = X e^{i\alpha}, \quad Y' = Y e^{i\beta}, \quad Z' = Z e^{i\gamma} \qquad (\alpha+\beta+\gamma = 0);$$
$$X' = \bar{X} e^{i\alpha}, \quad Y' = \bar{Y} e^{i\beta}, \quad Z' = \bar{Z} e^{i\gamma} \qquad (\alpha+\beta+\gamma = 0);$$

est à 2 paramètres. Le groupe G_1 est donc à 4 paramètres et le groupe G 8 paramètres. Le groupe G_1 est caractérisé par l'invariance de la variable u par suite des formes

$$X\bar{X} + Y\bar{Y}, \quad Z\bar{Z} + v^2, \quad (X\bar{X} - Y\bar{Y})v + XYZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}.$$

13. Les groupes G et G_1 sont déterminés facilement par la construction de la variété singulière V à 4 dimensions lieu des points $F = 1$. Considérons le lieu des points

$$\begin{cases} X = \sqrt{3}\,\eta\bar{\zeta}, \qquad Y = \sqrt{3}\,\zeta\bar{\xi}, \qquad Z = \sqrt{3}\,\xi\bar{\eta}, \\ v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}), \quad u = \zeta\bar{\zeta} - \dfrac{1}{2}(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}), \end{cases} \tag{23}$$

où ξ, η, ζ sont trois paramètres complexes liés par la relation

$$\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} + \zeta\bar{\zeta} = 1. \tag{24}$$

C'est une variété représentative de l'espace hermitien elliptique à 4 dimensions réelles (deux dimensions complexes) rapporté aux coordonnées homogènes ξ, η, ζ: les seconds membres des formules (23) ne changent pas en effet quand on multiplie ξ, η, ζ par un même facteur complexe de module 1. Les seconds membres sont du reste les formes d'Hermite *harmoniques* du second degré de l'espace hermitien [7]).

Un calcul facile montre en premier lieu que $u^2 + v^2 + X\bar{X} + YY - Z\bar{Z} = 1$, en second lieu que la forme F devient égale à 1 quand on y remplace u, v, X, Y, Z par les valeurs (23). La variété V définie par (23) étant à 4 dimensions coïncide avec la variété singulière de l'espace sphérique à 7 dimensions. Le groupe G contient par suite le groupe induit dans l'espace sphérique à 7 dimensions par le groupe de l'espace hermitien elliptique. Comme ils sont tous deux d'ordre 8, ils sont identiques. *Le groupe G est donc isomorphe au groupe des substitutions unitaires unimodulaires à 3 variables ξ, η, ζ, complété par les substitutions obtenues en les combinant avec $\xi' = \bar{\xi}$, $\eta' = \bar{\eta}$, $\zeta' = \bar{\zeta}$.*

[7]) Voir E. Cartan, Leçons sur la géométrie projective complexe (Paris, Gauthier-Villars, 1931), Chapitre V, p. 281—322.

En posant

$$(25)\qquad \begin{cases} \xi' = a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, \\ \eta' = a'\,\xi + b'\,\eta + c'\,\zeta, \\ \zeta' = a''\,\xi + b''\,\eta + c''\,\zeta, \end{cases}$$

où la matrice des coefficients est unitaire unimodulaire, on obtiendrait sans difficulté les équations de G.

Le groupe G_1 est le sous-groupe de G qui laisse invariante la variable u; il provient du sous-groupe de la géométrie hermitienne elliptique qui laisse invariant $\zeta\bar{\zeta}$, c'est-à-dire du sous-groupe

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi' = e^{i\vartheta}(a\,\xi - b\,\eta), \\ \eta' = e^{i\vartheta}(\bar{b}\,\xi + \bar{a}\,\eta), \\ \zeta' = e^{-2i\vartheta}\zeta. \end{cases} \qquad \text{avec } a\bar{a} + b\bar{b} = 1;$$

ses équations sont

$$(27)\qquad \begin{cases} X' = e^{3i\vartheta}(\bar{a}\,X + \bar{b}\,\bar{Y}), \\ Y' = e^{-3i\vartheta}(-\bar{b}\,\bar{X} + \bar{a}\,Y), \\ Z' = 2\,a\,b\,v + a^2\,Z - b^2\,\bar{Z}, \\ v' = (a\bar{a} - b\bar{b})\,v - a\bar{b}\,Z - b\bar{a}\,\bar{Z}, \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter les transformations obtenues en combinant les précédentes avec la substitution

$$(28)\qquad X' = \bar{X}, \quad Y' = \bar{Y}, \quad Z' = \bar{Z}, \quad v' = v.$$

En posant [8])

$$X = \xi_0, \quad \bar{Y} = \xi_1; \quad Z = z_1 + i\,z_2, \quad v = z_3,$$

les équations (27) montrent que le groupe G_1 est le produit direct du groupe à un paramètre

$$(29)\qquad \xi_0' = e^{3i\vartheta}\xi_0, \quad \xi_1' = e^{3i\vartheta}\xi_1, \quad z_1' = z_1, \quad z_2' = z_2, \quad z_3' = z_3$$

et du groupe

$$(30)\qquad \begin{cases} \xi_0' = \bar{a}\,\xi_0 + \bar{b}\,\xi_1, \\ \xi_1' = -\,b\,\xi_0 + a\,\xi_1, \\ z_1' + i\,z_2' = a^2(z_1 + i\,z_2) - b^2(z_1 - i\,z_2) + 2\,a\,b\,z_3, \\ z_3' = -\,a\bar{b}(z_1 + i\,z_3) - b\bar{a}(z_1 - i\,z_2) + (a\bar{a} - b\bar{b})\,z_3, \end{cases}$$

[8]) Il n'y a pas à confondre les quantités ξ_0, ξ_1 ici introduites avec la première coordonnée homogène ξ d'un point de l'espace hermitien elliptique.

ombiné avec la transformation

31) $$\xi_0' = \bar{\xi}_0, \quad \xi_1' = \bar{\xi}_1, \quad z_1' = z_1, \quad z_2' = -z_2, \quad z_3' = z_3.$$

14. Dans l'espace euclidien E_7 tangent en A ($u = 1$, $v = X = Y = Z = 0$) à l'hypersphère de rayon 1 de l'espace euclidien à 8 dimensions, es coordonnées z_i sont celles d'un vecteur d'un sous-espace E_3 à trois dimensions, et les parties réelles et imaginaires de ξ_0 et ξ_1 sont les composantes 'un vecteur d'un sous-espace E_4 à quatre dimensions; E_3 est le sous-espace ormal à V en A, E_4 est le sous-espace tangent à V en A. On peut interréter ξ_0 et ξ_1 comme les composantes complexes d'un spineur de l'espace E_3; *groupe G est alors le produit direct de deux groupes: le premier laisse fixes us les vecteurs de E_3 et multiplie les spineurs par un même facteur de module* 1; *second est isomorphe au groupe des rotations de l'espace à trois dimensions, gissant en E_3 sur les vecteurs et en E_4 sur les spineurs de cet espace. On réalise insi autour du point A un espace euclidien à* 3 *dimensions et l'espace* à 4 *dimensions réelles de ses spineurs* [9]).

La symétrie de E_3 par rapport à l'origine se traduit sur les spineurs par substitution à un vecteur (ξ_0, ξ_1) de son *conjugué* $(\bar{\xi}_1, -\bar{\xi}_0)$, comme on le voit n combinant l'opération (31) avec la rotation (30) de paramètres $a = 0$, $= 1$; on en déduit l'effet d'un retournement quelconque de E_3.

15. Remarquons qu'on pourrait remonter de la variété V définie par les ormules (23) aux autres hypersurfaces isoparamétriques de l'espace par le rocédé employé dans l'espace sphérique à 4 dimensions. Le lieu des points itués à la distance t du point courant de V est

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\eta\bar{\zeta}\bar{X} + \zeta\bar{\xi}\bar{Y} + \xi\bar{\eta}\bar{Z} + \zeta\bar{\eta}X + \xi\bar{\zeta}Y + \eta\bar{\xi}Z) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta})v$$

$$+ \left(\zeta\bar{\zeta} - \frac{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}{2}\right)u - \cos t\,(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} + \zeta\bar{\zeta}) = 0.$$

L'hypersurface parallèle à V et à la distance t de V s'obtient en annulant e discriminant du premier membre regardé comme une forme d'Hermite n ξ, η, ζ. On trouve facilement l'équation

$$F = \cos 3t.$$

---

[9]) Voir E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs I* (Paris. Hermann, 1938). La orme cubique $(X\bar{X} - Y\bar{Y})\,v + XYZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ invariante par G_1 s'écrit avec nos nouvelles otations

$$(\xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1)\,z_3 + \xi_0\bar{\xi}_1(z_1 + iz_2) + \xi_1\bar{\xi}_0(z_1 - iz_2);$$

lle représente le produit scalaire du vecteur (z_1, z_2, z_3) par le vecteur $(\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_1\bar{\xi}_0, \xi_0\bar{\xi}_1 - i\,\xi_1\bar{\xi}_0, \xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1)$ défini par le spineur (ξ_0, ξ_1) et son conjugué.

IV. Le cas de l'espace sphérique à 13 dimensions.

16. Dans le cas qui nous occupe maintenant on a $\nu = 4$, et les quantités X, Y, Z qui s'introduisent dans la forme cubique F sont des quaternions. La forme $\mathfrak{F}$ est la partie scalaire du produit XYZ et le groupe G_2 est le groupe des substitutions linéaires qui transforment orthogonalement les composantes de chacun des quaternions X, Y, Z en laissant invariante la partie scalaire de leur produit. On voit immédiatement que les transformations

$$X' = BX\bar{C}, \qquad Y' = CY\bar{A}, \qquad Z' = AZ\bar{B}, \tag{32}$$

où A, B, C sont trois quaternions constants unitaires quelconques, $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ leurs conjugués (ou inverses), font partie de G_2 et en constituent un sous-groupe à 9 paramètres. On a en effet

$$X'Y'Z' = BXYZ\bar{B}, \qquad \bar{Z}'\bar{Y}'\bar{X}' = B\bar{Z}\bar{Y}\bar{X}\bar{B},$$

d'où

$$X'Y'Z' + \bar{Z}'\bar{Y}'\bar{X}' = B(XYZ + \bar{Z}\bar{Y}\bar{X})\bar{B} = XYZ + \bar{Z}\bar{Y}\bar{X}.$$

En cherchant directement les transformations infinitésimales de G_2 on constate du reste qu'il n'en existe que 9 indépendantes. Par suite les formules (32) donnent tout le groupe (on pourrait montrer facilement que G_2 est continu et ne se décompose pas en plusieurs familles continues distinctes de transformations).

Le groupe G_2 est le produit direct de trois groupes simples à 3 paramètres, définis respectivement par les quaternions paramétriques A, B, C.

17. Le groupe G_1 est d'ordre $r_1 = r_2 + \nu = 9 + 4 = 13$, et le groupe G est d'ordre 21. Le premier est caractérisé par l'invariance de u et par suite des formes

$$X\bar{X} + Y\bar{Y}, \qquad Z\bar{Z} + v^2, \qquad (X\bar{X} - Y\bar{Y})v + XYZ + \bar{Z}\bar{Y}\bar{X}.$$

Nous allons le déterminer en déterminant directement le groupe G et pour cela nous allons, comme dans le cas précédent, partir d'une représentation directe de la variété singulière V à 8 dimensions.

Il nous suffit pour cela de partir des équations (23), où ξ, η, ζ seront regardés comme trois quaternions liés par la relation (24). Les seconds membres de (23) ne changeant pas quand on multiplie à droite ξ, η, ζ par un même facteur quaternionien unitaire ϱ, la variété définie par (23) est à 8 dimensions. On vérifie facilement que $u^2 + v^2 + X\bar{X} + Y\bar{Y} + Z\bar{Z} = 1$ et que tous les points de la variété (23) satisfont à $F = 1$: c'est donc la variété singulière V.

Remarquons que V fournit une représentation des points de l'espace projectif quaternionien à 2 dimensions quaternioniennes. Elle est invariante

par le groupe qu'induit dans l'espace sphérique à 13 dimensions le groupe des substitutions linéaires quaternioniennes[10])

$$(33) \qquad \begin{cases} \xi' = A\,\xi + B\,\eta + C\,\zeta, \\ \eta' = A'\,\xi + B'\,\eta + C'\,\zeta, \\ \zeta' = A''\,\xi + B''\,\eta + C''\,\zeta, \end{cases}$$

qui laissent invariante la forme $\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} + \zeta\bar{\zeta}$. Les coefficients quaternioniens des substitutions de ce groupe sont définis par les relations

$$(34) \qquad \begin{cases} A\,\bar{A} + A'\,\bar{A}' + A''\,\bar{A}'' = 1, \\ B\,\bar{B} + B'\,\bar{B}' + B''\,\bar{B}'' = 1, \\ C\,\bar{C} + C'\,\bar{C}' + C''\,\bar{C}'' = 1, \\ \bar{B}\,C + \bar{B}'\,C' + \bar{B}''\,C'' = 0, \\ \bar{C}\,A + \bar{C}'\,A' + \bar{C}''\,A'' = 0, \\ \bar{A}\,B + \bar{A}'\,B' + \bar{A}''\,B'' = 0. \end{cases}$$

En remarquant que la substitution inverse de (33) est

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{A}\,\xi' + \bar{A}'\,\eta' + \bar{A}''\,\zeta', \\ \eta &= \bar{B}\,\xi' + \bar{B}'\,\eta' + \bar{B}''\,\zeta', \\ \zeta &= \bar{C}\,\xi' + \bar{C}'\,\eta' + \bar{C}''\,\zeta', \end{aligned}$$

on en déduit que les relations (34) sont équivalentes aux relations

$$(35) \qquad \begin{cases} A\,\bar{A} + B\,\bar{B} + C\,\bar{C} = 1, \\ A'\,\bar{A}' + B'\,\bar{B}' + C'\,\bar{C}' = 1, \\ A''\,\bar{A}'' + B''\,\bar{B}'' + C''\,\bar{C}'' = 1, \\ A'\,\bar{A}'' + B'\,\bar{B}'' + C'\,\bar{C}'' = 0, \\ A''\,\bar{A} + B''\,\bar{B} + C''\,\bar{C} = 0, \\ A\,\bar{A}' + B\,\bar{B}' + C\,\bar{C}' = 0. \end{cases}$$

18. Les transformations (33) constituent un groupe à 21 paramètres. Si l'on cherche en effet les transformations infinitésimales du groupe (33)

$$\begin{aligned} \delta\xi &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, \\ \delta\eta &= a'\,\xi + b'\,\eta + c'\,\zeta, \\ \delta\zeta &= a''\,\xi + b''\,\eta + c''\,\zeta, \end{aligned}$$

[10]) Ce groupe ne peut pas être prolongé par l'adjonction d'une deuxième famille de substitutions linéaires, comme dans le cas de l'espace sphérique à 7 dimensions. C'est un groupe simple clos du type C); c'est le groupe des homographies, dans l'espace projectif complexe à 3 dimensions, qui laissent invariante une antiinvolution de seconde espèce et une antipolarité elliptique échangeable avec cette antiinvolution; les points de l'espace quaternionien représentent les droites de l'antiinvolution [Voir E. Cartan [7]) et S. Wachs, *Essai sur la géométrie projective quaternionienne*, Mém. Acad. de Belgique, 1936].

on trouve que dans le tableau des coefficients, les éléments de la diagonale principale ont leur partie scalaire nulle et que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont chacun le conjugué changé de signe de l'autre; cela fournit bien un nombre de paramètres arbitraires égal à $3\times3 + 4\times3 = 21$.

On peut déduire facilement de (33) les équations du groupe G de l'espace sphérique à 13 dimensions, à savoir

$$
(36)\quad \begin{cases}
X' = \sqrt{3}\,C'\,\overline{C}''\,u + (A'\,\overline{A}'' - B'\,\overline{B}'')\,v + B'\,X\,\overline{C}'' + C'\,Y\,\overline{A}'' + A'\,Z\,\overline{B}'' \\
\qquad + C'\,\overline{X}\,\overline{B}'' + A'\,\overline{Y}\,\overline{C}'' + B'\,\overline{Z}\,\overline{A}'', \\
Y' = \sqrt{3}\,C''\,\overline{C}\,u + (A''\,\overline{A} - B''\,\overline{B})\,v + B''\,X\,\overline{C} + C''\,Y\,\overline{A} + A''\,Z\,\overline{B} \\
\qquad + C''\,\overline{X}\,\overline{B} + A''\,\overline{Y}\,\overline{C} + B''\,\overline{Z}\,\overline{A}, \\
Z' = \sqrt{3}\,C\,\overline{C}'\,u + (A\,\overline{A}' - B\,\overline{B}')\,v + B\,X\,\overline{C}' + C\,Y\,\overline{A}' + A\,Z\,\overline{B}' \\
\qquad + C\,\overline{X}\,\overline{B}' + A\,\overline{Y}\,\overline{C}' + B\,\overline{Z}\,\overline{A}', \\
v' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(C\,\overline{C} - C'\,\overline{C}')\,u + \tfrac{1}{2}(A\,\overline{A} - A'\,\overline{A}' - B\,\overline{B} + B'\,\overline{B}')\,v \\
\qquad + \tfrac{1}{2}(B\,X\,\overline{C} - B'\,X\,\overline{C}' + C\,\overline{X}\,\overline{B} - C'\,\overline{X}\,\overline{B}') \\
\qquad + \tfrac{1}{2}(C\,Y\,\overline{A} - C'\,Y\,\overline{A}' + A\,\overline{Y}\,\overline{C} - A'\,\overline{Y}\,\overline{C}) \\
\qquad + \tfrac{1}{2}(A\,Z\,\overline{B} - A'\,Z\,\overline{B}' + B\,\overline{Z}\,\overline{A} - B'\,\overline{Z}\,\overline{A}'), \\
u' = \left(C''\,\overline{C}'' - \frac{A''\,\overline{A}'' + B''\,\overline{B}''}{2}\right)u + \frac{\sqrt{3}}{2}(A''\,\overline{A}'' - B''\,\overline{B}'')\,v \\
\qquad + \frac{\sqrt{3}}{2}(B''\,X\,\overline{C}'' + C''\,Y\,\overline{A}'' + A''\,Z\,\overline{B}'' + C''\,\overline{X}\,\overline{B}'' \\
\qquad + A''\,\overline{Y}\,\overline{C}'' + B''\,\overline{Z}\,\overline{A}'').
\end{cases}
$$

On retrouve le groupe G_2 en partant des substitutions (33) qui transforment chacun des quaternions en un de ses multiples, de sorte qu'il ne reste que les coefficients A, B', C''.

19. Le groupe G_1 est celui qui laisse fixe la variable u, c'est-à-dire provient du sous-groupe de (33) qui laisse fixe $\zeta\overline{\zeta}$; il est donc caractérisé par les relations

$$A'' = B'' = 0, \quad \text{d'où} \quad C = C' = 0,$$

avec

$$
\begin{cases}
A\,\overline{A} + A'\,\overline{A}' = 1, \\
B\,\overline{B} + B'\,\overline{B}' = 1, \\
\overline{A}\,B + \overline{A}'\,B' = 0,
\end{cases}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{cases}
A\,\overline{A} + B\,\overline{B} = 1, \\
A'\,\overline{A}' + B'\,\overline{B}' = 1, \\
A\,\overline{A}' + B\,\overline{B}' = 0.
\end{cases}
$$

Ses équations peuvent être mises sous la forme

$$37) \qquad \begin{cases} X' = (B'X + A'\bar{Y})\bar{C}'', \\ \bar{Y}' = (BX + A\bar{Y})\bar{C}'', \end{cases}$$

$$38) \qquad \begin{cases} Z' = AZ\bar{B}' + B\bar{Z}\bar{A}' + (A\bar{A}' - B\bar{B}')v, \\ v' = \tfrac{1}{2}(AZ\bar{B} - A'Z\bar{B}' + B\bar{Z}\bar{A} - B'\bar{Z}\bar{A}') + (A\bar{A} - A'\bar{A}')v. \end{cases}$$

Le groupe G_1 est donc le produit direct du groupe

$$X' = X\bar{C}'', \quad \bar{Y}' = \bar{Y}\bar{C}'', \quad Z' = Z, \quad v' = v,$$

t du groupe obtenu en faisant $C'' = 1$ dans les formules (37) et (38); ce ernier groupe, d'ordre 10, est isomorphe au groupe des rotations de l'espace uclidien à 5 dimensions dont les coordonnées sont les composantes de Z t v. Les équations (38) sont précisément les équations du groupe des rotations e cet espace E_5; quant aux équations (37) elles indiquent comment ces otations transforment *les spineurs* de cet espace, chaque spineur à 4 compoantes complexes étant ici représenté par deux quaternions X et $\bar{Y}$. La forme ubique[11])

$$(X\bar{X} - Y\bar{Y})v + XYZ + \bar{Z}\bar{Y}\bar{X}$$

'est autre que le produit scalaire du vecteur (Z, v) de E_5 par le vecteur que éfinissent le spineur $(X, \bar{Y})$ et son conjugué $(\bar{X}, Y)$. L'espace à 8 dimensions es spineurs est ici, dans l'espace euclidien à 13 dimensions tangent en A $u = 1$, $v = X = Y = Z = 0$) à l'hypersphère de rayon 1 de l'espace euidien à 14 dimensions, le sous-espace tangent à la variété singulière V, tandis ue l'espace E_5 des vecteurs est le sous-espace normal en A à cette variété. *)n réalise ainsi à la fois l'espace E_5 des vecteurs et l'espace E_8 des spineurs e E_5; le groupe G_1 de stabilité du point A se décompose dans le groupe des rotaions de E_5, avec son effet en E_5 sur les vecteurs et en E_8 sur les spineurs, et dans e groupe qui multiplie à droite les composantes quaternioniennes d'un spineur ar un même facteur quaternionien unitaire sans altérer les vecteurs.*

---

[11]) Dans l'ouvrage déjà cité[9]) de E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, II, a forme fondamentale de l'espace à 5 dimensions est $(x^0)^2 + x^1 x^{1'} + x^2 x^{2'}$ et les comosantes complexes d'un spineur sont désignées par ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_{12}. On passe de ces notaions à celles du texte en posant

$$v = x^0, \quad Z = x^1 + j x^2, \quad X = \xi_0 - j\xi_{12}, \quad \bar{Y} = \xi_1 + j\xi_2$$

les unités quaternioniennes sont i, j, $k = ij$). La forme cubique du texte n'est autre ue la forme cubique $\bar{\xi} X \xi$ de l'ouvrage, où X est la matrice de degré 4 associée au vecteur le composantes x^0, x^1, x^2, $x^{1'}$, $x^{2'}$.

V. Le cas de l'espace sphérique à 25 dimensions.

20. Dans ce dernier cas on a $\nu = 8$ et les quantités X, Y, Z qui s'introduisent dans la forme cubique F sont des *octaves* [12]). Ici les formules (23) ne permettent plus de représenter la variété singulière à 16 dimensions de l'espace au moyen de trois octaves ξ, η, ζ parce que la multiplication des octaves n'est pas associative; du reste les seconds membres de ces formules sont altérés si l'on multiplie à droite ξ, η, ζ par un même octave unitaire. Il faut étudier séparément les groupes G_2, G_1 et G; nous laisserons de côté la question de savoir si la variété singulière est susceptible d'une représentation paramétrique rationnelle.

21. Le groupe G_2 est le groupe qui transforme orthogonalement les composantes des octaves X, Y, Z en laissant invariante la partie scalaire du produit XYZ. On doit remarquer que cette partie scalaire est la même, que ce produit soit interprété comme étant $(XY)Z$ ou comme étant $X(YZ)$; il ne change pas non plus par une permutation circulaire des octaves X, Y, Z. En posant

$$X = x_0 + \sum_{i=1}^{i=7} x_i e_i, \quad Y = y_0 + \sum_{i=1}^{i=7} y_i e_i, \quad Z = z_0 + \sum_{i=1}^{i=7} z_i e_i,$$

on trouve[13])

$$\begin{aligned}(39)\quad \mathfrak{F} = {} & x_0 y_0 z_0 - x_0 \Sigma y_i z_i - y_0 \Sigma z_i x_i - z_0 \Sigma x_i y_i \\ & - \Sigma x_i (y_{i+1} z_{i+3} - y_{i+3} z_{i+1} + y_{i+2} z_{i+6} - y_{i+6} z_{i+2} \\ & + y_{i+4} z_{i+5} - y_{i+5} z_{i+4}),\end{aligned}$$

en convenant de réduire *modulo* 7 les indices supérieurs à 7.

On peut d'abord voir que si une opération du groupe se réduit, en ce qui concerne l'octave Z, à l'opération identique, elle se réduit elle-même soit à l'opération identique, soit à l'opération $X' = -X$, $Y' = -Y$, $Z' = Z$. En effet dire que la partie scalaire de $(XY)Z$ est invariante quel que soit l'octave Z, c'est dire que le produit XY est invariant, car la partie scalaire d'un produit UV est $u_0 v_0 - u_1 v_1 - \ldots - u_7 v_7$ et son invariance pour chaque système de valeurs des v_i entraîne l'invariance de U. Soit a l'octave transformé de $X = 1$; si Y' est l'octave transformé de Y [14]), on aura

$$aY' = Y, \quad \text{d'où} \quad Y' = a^{-1} Y;$$

---

[12]) Voir sur les octaves un mémoire récent de E. A. Weiss: *Oktaven, Engelscher Komplex, Trialitätsprinzip* [Math. Zeitschr. **44** (1938), p. 580—611].

[13]) La loi de multiplication des unités e_i est $e_i^2 = -1$, $e_i e_{i+1} = -e_{i+1} e_i = e_{i+3}$, $e_i e_{i+2} = -e_{i+2} e_i = e_{i+6}$, $e_i e_{i+4} = -e_{i+4} e_i = e_{i+5}$, les indices supérieurs à 7 étant réduits modulo 7.

[14]) La loi de transformation des Y n'est pas nécessairement la même que la loi de transformation des X.

du reste le module de a devant être égal à 1 puisque les composantes x_0, x_i doivent subir une substitution orthogonale, on peut écrire

(40) $$Y' = \bar{a}\,Y \qquad (a\bar{a} = 1):$$

on en déduit

$$X'(\bar{a}\,Y) = X\,Y,$$

et, en faisant $Y = 1$,

(41) $$X' = X\,a.$$

L'octave a doit donc satisfaire à l'identité

$$(X\,a)(\bar{a}\,Y) = (a\,\bar{a})(X\,Y)$$

quels que soient les octaves X, Y; en particulier on doit avoir

$$(e_1\,a)(\bar{a}\,e_2) = a\,\bar{a}\,e_4;$$

le coefficient de e_4 dans le premier membre est

$$a_0^2 - \sum (e_1 e_i)(e_i e_2) a_i^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 - a_3^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2;$$

en l'égalant au coefficient $a\bar{a}$ de e_4 dans le second membre, on obtient

$$a_3^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 0;$$

on montrerait de même $a_1 = a_2 = a_4 = 0$. Par suite $a = \pm 1$, ce qu'il fallait démontrer.

De ce qui précède résulte qu'à toute substitution orthogonale sur les composantes de Z correspondent au plus deux substitutions orthogonales sur les composantes de X et de Y, c'est-à-dire deux transformations de G_2. Le groupe G_2 est donc au plus à $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ paramètres.

22. Le calcul montre effectivement que G_2 est à 28 paramètres et en fournit les transformations infinitésimales, que nous nous contenterons d'indiquer. En posant

$$X_{\alpha\beta} = x_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \quad Y_{\alpha\beta} = y_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\beta} - y_\beta \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \quad Z_{\alpha\beta} = z_\alpha \frac{\partial f}{\partial z_\beta} - z_\beta \frac{\partial f}{\partial z_\alpha},$$

les transformations infinitésimales sont

(42)
$$\begin{cases}
U_{0i} \equiv Z_{0i} - \frac{1}{2}(X_{i+1,i+3} + X_{i+2,i+6} + X_{i+4,i+5}) \\
\qquad + \frac{1}{2}(Y_{i+1,i+3} + Y_{i+2,i+6} + Y_{i+4,i+5}), \\
U_{i+1,i+3} \equiv Z_{i+1,i+3} + \frac{1}{2}(X_{0i} + X_{i+1,i+3} - X_{i+2,i+6} - X_{i+4,i+5}) \\
\qquad + \frac{1}{2}(-Y_{0i} + Y_{i+1,i+3} - Y_{i+2,i+6} - Y_{i+4,i+5}), \\
U_{i+2,i+6} \equiv Z_{i+2,i+6} + \frac{1}{2}(X_{0i} - X_{i+1,i+3} + X_{i+2,i+6} - X_{i+4,i+5}) \\
\qquad + \frac{1}{2}(-Y_{0i} - Y_{i+1,i+3} + Y_{i+2,i+6} - Y_{i+4,i+5}), \\
U_{i+4,i+5} \equiv Z_{i+4,i+5} + \frac{1}{2}(X_{0i} - X_{i+1,i+3} - X_{i+2,i+6} + X_{i+4,i+5}) \\
\qquad + \frac{1}{2}(-Y_{0i} - Y_{i+1,i+3} - Y_{i+2,i+6} + Y_{i+4,i+5});
\end{cases}$$

l'indice i prend toutes les valeurs 1, 2, . . ., 7, chaque indice supérieur à 7 étant réduit *modulo* 7.

Dans l'espace euclidien à 26 dimensions l'espace euclidien à 24 dimensions tangent au point P ($u = \cos t$, $v = \sin t$, $X = Y = Z = 0$) à l'hypersurface de paramètre t situé dans l'hypersphère de rayon 1 se décompose en trois sous-espaces à 8 dimensions, celui des vecteurs X, des vecteurs Y et des vecteurs Z. Si nous portons notre attention sur ce dernier, les vecteurs X du premier peuvent être regardés comme les *semi-spineurs de première espèce réels* et les vecteurs Y du second comme les *semi-spineurs de seconde espèce réels* de l'espace des Z[15]). Le groupe G_2 indique comment le groupe des rotations de l'espace à 8 dimensions transforme les vecteurs réels Z, les semi-spineurs de première espèce réels X et les semi-spineurs de seconde espèce Y. *Le principe de trialité*[16]) *de l'espace elliptique à 7 dimensions est ainsi mis en évidence d'une manière concrète.*

23. Le groupe G_1 est à $28 + 8 = 36$ paramètres et le groupe G à $36 + 16 = 52$ paramètres. Nous allons d'abord nous occuper du groupe G_1. Il transforme orthogonalement les vecteurs de l'espace E_{16} tangent à la variété singulière V au point A ($u = 1$, $v = X = Y = Z = 0$) et de l'espace E_9 normal à cette variété. L'espace E_{16} est défini par $Z = v = 0$ et l'espace E_9 par $X = Y = 0$. Le groupe G_1 transforme orthogonalement les vecteurs de E_9 suivant le groupe des rotations de cet espace. Quant aux vecteurs de E_{16} ils sont transformés comme les spineurs réels de E_9. Les spineurs de l'espace euclidien à 9 dimensions ont 16 composantes complexes, mais dans l'espace de ces spineurs il existe un domaine de réalité à l'intérieur duquel les spineurs ont 16 composantes réelles[17]). Le fait que G_1 transforme les vecteurs de E_{16}

---

[15]) Voir l'ouvrage déjà cité[9]) de E. Cartan. Dans l'espace euclidien réel E_8, les semi-spineurs de première espèce ont des composantes ξ_0, ξ_{ij}, ξ_{1234}, ceux de seconde espèce des composantes ξ_i, ξ_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3, 4$). Pour chaque espèce il existe un *domaine de réalité*; les semi-spineurs de première espèce réels sont définis par $\xi_{1234} = \bar{\xi}_0$, $\xi_{14} = -\bar{\xi}_{23}$, $\xi_{24} = -\bar{\xi}_{31}$, $\xi_{34} = -\bar{\xi}_{12}$, le carré scalaire d'un semi-spineur étant $\xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_{23}\bar{\xi}_{23} + \xi_{31}\bar{\xi}_{31} + \xi_{12}\bar{\xi}_{12}$; les semi-spineurs de seconde espèce réels sont définis par $\xi_{234} = -\bar{\xi}_1$, $\xi_{314} = -\bar{\xi}_2$, $\xi_{124} = -\bar{\xi}_3$, $\xi_{123} = \bar{\xi}_4$, le carré scalaire étant $\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + \xi_3\bar{\xi}_3 + \xi_4\bar{\xi}_4$. La forme trilinéaire $\mathfrak{F}$ est indiquée dans l'ouvrage en question, II, p. 51. Le groupe G_2 peut se compléter par cinq autres familles de substitutions linéaires, chaque famille effectuant sur les trois familles d'objets: vecteurs, semi-spineurs de première espèce, semi-spineurs de seconde espèce une permutation déterminée. En ce qui concerne le problème du texte aucune de ces cinq familles n'a à intervenir.

[16]) En dehors de l'ouvrage cité dans la note précédente, voir le Mémoire précédemment signalé[12]) de E. A. Weiss, p. 592—596.

[17]) Les composantes complexes d'un spineur de E_9 peuvent être notées ξ_0, ξ_i, ξ_{ij}, ξ_{ijk}, ξ_{1234} ($i, j, k = 1, 2, 3, 4$). Les spineurs réels sont définis par les conditions $\xi_{1234} = \bar{\xi}_0$, $\xi_{123} = \bar{\xi}_4$, $\xi_{234} = -\bar{\xi}_1$, $\xi_{314} = -\bar{\xi}_2$, $\xi_{124} = -\bar{\xi}_3$, $\xi_{14} = -\bar{\xi}_{23}$, $\xi_{24} = -\bar{\xi}_{31}$, $\xi_{34} = -\bar{\xi}_{12}$; le carré scalaire d'un spineur réel est $\xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + \xi_3\bar{\xi}_3 + \xi_4\bar{\xi}_4 + \xi_{23}\bar{\xi}_{23} + \xi_{31}\bar{\xi}_{31} + \xi_{12}\bar{\xi}_{12}$.

omme les spineurs réels de l'espace euclidien à 9 dimensions a pour raison à priori que la seule représentation linéaire de degré 16 du groupe des rotations le E_9 est celle des spineurs.

On a donc autour du point A à la fois l'espace E_9 des vecteurs réels et l'espace E_{16} des spineurs réels de l'espace euclidien à 9 dimensions. Le groupe G_1 de stabilité de A dans l'espace sphérique à 25 *dimensions n'est autre que le groupe des rotations de ce dernier espace, avec son effet en E_9 sur les vecteurs et en E_{16} sur les spineurs.*

24. Passons enfin au groupe G. Nous allons démontrer que G est un groupe simple du type F). D'abord le groupe G est clos comme étant le plus grand groupe orthogonal à 26 variables laissant invariante une forme algébrique entière des variables. Or tout groupe clos est ou simple, ou semi-simple (produit direct de plusieurs groupes simples), ou abélien, ou produit direct d'un groupe simple ou semi-simple et d'un groupe abélien[18]). Le *rang* d'un groupe clos est l'ordre de tout sous-groupe abélien maximum, le rang d'un groupe abélien étant par conséquent identique à son ordre. Il est clair qu'ici le groupe G n'est pas abélien.

Pour calculer le rang de G, remarquons d'abord que le groupe G_2, isomorphe au groupe orthogonal à 8 variables, est de rang 4; on peut du reste prendre dans G_2 le groupe abélien γ engendré par les transformations infinitésimales U_{01}, U_{24}, U_{37}, U_{56}; ce groupe est abélien parce que ces transformations ne font intervenir que les 12 transformations infinitésimales X_{01}, X_{24}, X_{37}, X_{56}, Y_{01}, ..., Z_{56}, manifestement échangeables entre elles. Cela étant toute transformation infinitésimale de G échangeable avec γ transformera l'une quelconque des variables u, v, invariantes par γ, en une combinaison des 26 variables qui sera aussi invariante par γ. Or γ n'admet manifestement d'autre combinaison linéaire invariante que u et v. Par suite la transformation infinitésimale cherchée transformera entre elles les variables u et v; par suite étant orthogonale, elle transformera entre elles les 24 autres variables. L'ensemble $u^3 - 3uv^2$ des termes de F qui sont du troisième degré en u, v sera donc aussi invariant: cela n'est possible que si chacune des variables u, v est invariante. Par suite toute transformation infinitésimale de G échangeable avec γ fait partie de G_2; γ est donc un sous-groupe abélien maximum de G, qui est par suite de rang 4.

Or les groupes simples de rang $\leqq 4$ ont pour ordres possibles

rang 4:	ordres 24, 28, 36, 52;	rang 2:	ordres 8, 10;
rang 3:	ordres 15, 21;	rang 1[19]):	ordres 1, 3.

[18]) Pour toutes ces propriétés, voir E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs* (Mém. Sc. Math. XLII, 1930).

[19]) Nous regardons ici le groupe abélien clos à 1 paramètre comme un groupe simple.

Ce tableau montre immédiatement qu'un groupe clos de rang 4 ne peut avoir l'ordre 52 que s'il est simple et par suite du type F).

Le groupe G des déplacements de la famille considérée d'hypersurfaces isoparamétriques de l'espace sphérique à 25 dimensions est donc une réalisation du groupe simple de rang 4 à 52 paramètres du type F); ce groupe ne s'était jusqu'à maintenant présenté dans aucun problème de Géométrie ou d'Analyse[20]).

Nous laisserons de côté la détermination effective de ses 52 transformations infinitésimales aux variables u, v, x_i, y_i, z_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 7)$.

VI. Un théorème sur les variétés singulières.

25. Les variétés singulières à 2 et 4 dimensions des espaces sphériques à 4 et 7 dimensions sont, considérées comme variétés riemanniennes, des espaces *symétriques*[21]) puisqu'elles sont applicables sur la sphère ordinaire et sur l'espace hermitien elliptique. Un raisonnement simple montre que cette propriété d'être symétriques appartient aussi aux variétés singulières à 8 et 16 dimensions des espaces sphériques à 13 et 25 dimensions. En effet soit A le point $(u = 1, v = z_i = 0)$ d'une de ces variétés. Considérons dans l'espace euclidien à $n + 1 = 3v + 2$ dimensions qui contient l'hypersphère de rayon 1 à n dimensions, la symétrie

$$u' = u, \quad v' = v, \quad z_i' = z_i, \quad x_i' = -x_i, \quad y_i' = -y_i$$

par rapport à la variété plane $x_i = y_i = 0$ normale à la variété V. Cette symétrie laisse évidemment invariante cette variété V comme cela résulte avec évidence de l'expression de la forme F. Cette transformation sur V est involutive; elle conserve manifestement la métrique de V; enfin elle admet le point A comme point invariant isolé, car les points de V invariants par cette transformation sont définis par les valeurs numériques de u, v, z_i qui satisfont aux relations

$$u^2 + v^2 + \Sigma z_i^2 = 1, \qquad u^3 - 3u(v^2 + \Sigma z_i^2) = 1,$$

équivalentes à

$$4u^3 - 3u = 1, \qquad v^2 + \Sigma z_i^2 = 1 - u^2.$$

L'équation en u a pour racines $u = 1$ et $u = -\frac{1}{2}$; à la première racine $u = 1$ correspondent les valeurs $v = z_i = 0$ (point invariant isolé); à la seconde $u = -\frac{1}{2}$ correspondent une infinité de valeurs v et z_i satisfaisant à l'unique relation $v^2 + \Sigma z_i^2 = \frac{3}{4}$.

---

[20]) Le représentant indiqué dans la Thèse de E. Cartan est effectivement un groupe linéaire orthogonal à 26 variables, mais de définition assez compliquée, laissant invariante une variété à 16 dimensions.

[21]) Voir sur la notion d'espace riemannien symétrique, une conférence de E. Cartan au Congrès international des mathématiciens de Zürich en 1932.

Les propriétés précédentes de la transformation considérée montrent que dans l'espace riemannien constitué par la variété V la symétrie par rapport à A est isométrique. Comme la variété riemannienne V admet un groupe de déplacements transitif, il en résulte que cette variété est symétrique, d'où le

Théorème. *Dans la famille des hypersurfaces isoparamétriques à trois courbures principales distinctes, les deux variétés singulières constituent des espaces riemanniens symétriques dont les groupes de déplacements sont respectivement à* 3, 8, 21 *et* 52 *paramètres*[22]).

Les hypersurfaces non singulières *ne constituent pas* des variétés riemanniennes symétriques.

Deuxième Partie.

VII. La non existence de familles d'hypersurfaces isoparamétriques à trois courbures principales distinctes n'ayant pas les mêmes degrés de multiplicité.

26. Nous nous proposons dans cette seconde Partie de démontrer que nous avons obtenu toutes les familles d'hypersurfaces isoparamétriques à trois courbures principales distinctes.

Reprenons les notations du Mémoire déjà cité et partons de la formule

2] $$\omega_{ij} = \gamma_{ijk}\omega_k,$$

indice de sommation k variant de 1 à n, dimension de l'espace ambiant. On a, pour $k \leqq n-1$ et supposant les courbures principales a_i et a_j distinctes,

43) $$\gamma_{ijk} = \frac{\lambda_{ijk}}{a_i - a_j};$$

λ_{ijk} est symétrique par rapport à ses trois indices et ne peut être différent de zéro que si la courbure principale a_k est distincte à la fois de a_i et de a_j (p. 179—180 du Mémoire); on a aussi $\gamma_{ijn} = 0$. Nous appellerons $a = \operatorname{tg} t_1$, $= \operatorname{tg} t_2$, $c = \operatorname{tg} t_3$ les trois courbures principales et réserverons dans ce qui suit les lettres $i, i', \ldots$, aux indices pour lesquels $a_i = a$, les lettres $j, j', \ldots$, aux indices pour lesquels $a_j = b$, les lettres $k, k', \ldots$, aux indices pour lesquels $a_k = c$.

En dérivant extérieurement la relation [2], on obtient

44) $$[\omega_{i\alpha}\omega_{\alpha j}] - (1 + a_i a_j)[\omega_i \omega_j] = \frac{\lambda_{ijk}}{a_i - a_j}[\omega_\alpha \omega_{\alpha k} + a_k \omega_k \omega_n] + [d\gamma_{ijk}\omega_k].$$

---

[22]) La variété à 8 dimensions est un espace symétrique du type C (II) et la variété à 16 dimensions est un espace symétrique du type F (II); voir sur les géodésiques de ce dernier, E. Cartan [Annales Ecole Norm. 44 (1927), No. 151, p. 466].

l'indice k de sommation ayant la signification qui vient d'être indiquée. En égalant dans (44) les termes en $[\omega_i\omega_j]$, on obtient la formule (11) du Mémoire cité, qui peut s'écrire

$$(45)\qquad 2\cos^2 t_1\cos^2 t_2\cos^2 t_3 \sum_k \lambda_{ijk}^2 = \sin(t_1-t_3)\sin(t_2-t_3)\cos(t_1-t_2) = 2h^2.$$

En égalant maintenant les termes en $[\omega_i\omega_{j'}]$ où $j' \neq j$, on obtient

$$\sum_k \lambda_{ijk}\lambda_{ij'k}\left[\frac{1}{(a_i-a_k)(a_j-a_k)} - \frac{1}{(a_i-a_j)(a_i-a_k)} + \frac{1}{(a_i-a_j)(a_j-a_k)}\right] = 0,$$

et, comme la quantité entre crochets est différente de zéro,

$$(46)\qquad \sum_k \lambda_{ijk}\lambda_{ij'k} = 0 \qquad \text{et de même} \qquad \sum_k \lambda_{ijk}\lambda_{i'jk} = 0.$$

Enfin en égalant les termes en $[\omega_{i'}\omega_{j'}]$, où $i' \neq i$, $j' \neq j$, on trouve

$$(47)\qquad \sum_k (\lambda_{ijk}\lambda_{i'j'k} + \lambda_{ij'k}\lambda_{i'jk}) = 0.$$

Nous simplifierons un peu les équations (45) en posant

$$(48)\qquad c_{ijk} = \frac{1}{h}\cos t_1\cos t_2\cos t_3\,\lambda_{ijk};$$

les formules (45), (46), (47) deviennent alors

$$(45')\qquad \sum_k c_{ijk}^2 = 1,$$

$$(46')\qquad \sum_k c_{ijk}c_{ij'k} = 0, \qquad \sum_k c_{ijk}c_{i'jk} = 0,$$

$$(47')\qquad \sum (c_{ijk}c_{i'j'k} + c_{ij'k}c_{i'jk}) = 0.$$

En égalant du reste dans (44) les termes en $[\omega_k\omega_n]$, on constate que *les c_{ijk} sont indépendants de t.*

27. Les formules précédentes vont nous montrer immédiatement que les degrés de multiplicité ν_1, ν_2, ν_3 des courbures principales a, b, c sont égaux entre eux. En effet supposons, ce qui ne restreint pas la généralité,

$$\nu_1 \geqq \nu_3, \qquad \nu_2 \geqq \nu_3.$$

Si l'on fixe les indices i et j, les ν_3 quantités c_{ijk} peuvent être regardées comme les composantes d'un vecteur $\vec{c}_{ij}$ de l'espace à ν_3 dimensions; d'après (45') ce vecteur est unitaire. Si l'on fixe l'indice i, les ν_2 vecteurs $\vec{c}_{i1}, \vec{c}_{i2}, \ldots, \vec{c}_{i\nu_2}$ sont, d'après (45') et (46'), ν_2 vecteurs unitaires rectangulaires. Cela n'est possible que si $\nu_2 \leqq \nu_3$; on a donc nécessairement $\nu_2 = \nu_3$. On démontrerait de même que $\nu_1 = \nu_3$. Les trois degrés de multiplicité ν_1, ν_2, ν_3 sont donc égaux entre eux.

VIII. Recherche directe des familles d'hypersurfaces isoparamétriques à trois courbures principales distinctes[23]).

28. Considérons deux systèmes de ν variables x_i, y_j et les ν formes bilinéaires

$$H_k(x,y) = \sum_{i,j} c_{ijk} x_i y_j;$$

es relations (45′), (46′), (47′) expriment simplement l'identité (14) du N° 4:

14) $$\sum_k H_k^2 = \sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2.$$

C'est précisément de cette identité que nous avons déduit les seules possibilités $\nu = 1, 2, 4, 8$. La forme trilinéaire

$$\Phi = \sum_{i,j,k} c_{ijk}\, x_i\, y_j\, z_k$$

st analogue à la forme que nous avions désignée par $\mathfrak{F}$. La recherche de la orme F nous avait montré (N° 6) qu'on peut toujours effectuer sur chacune les séries de ν variables x_i, y_j, z_k une substitution linéaire orthogonale de elle sorte que les coefficients de la forme $\mathfrak{F}$ deviennent certaines constantes ien déterminées. Nous allons en déduire qu'on peut ici ramener, par un hoix convenable des repères rectangulaires attachés aux divers points de 'espace, les coefficients c_{ijk} à avoir ces mêmes valeurs constantes.

En effet partons de l'identité

$$\sum_{i,j} \omega_i \omega_j \omega_{ij} = \sum_{i,j,k} \frac{\lambda_{ijk}}{a_i - a_j}\, \omega_i \omega_j \omega_k = \frac{h}{\sin(t_1 - t_2)\cos t_3} \sum_{i,j,k} c_{ijk} \omega_i \omega_j \omega_k.$$

Effectuons sur les ν vecteurs unitaires $\vec{e}_i$ d'indices $i, i', \ldots$, du repère une substitution linéaire infinitésimale

$$\delta \vec{e}_i = \sum_{i'} a_{ii'} \vec{e}_{i'} \qquad (a_{ii'} = -a_{i'i})$$

et de même sur les ν vecteurs unitaires $\vec{e}_j$ la substitution

$$\delta \vec{e}_j = \sum_{j'} b_{jj'} \vec{e}_{j'} \qquad (b_{jj'} = -b_{j'j});$$

on aura

$$\delta \omega_{ij} = \delta(d\vec{e}_i\, \vec{e}_j) = \sum_{i'} (d a_{ii'}\, \vec{e}_{i'} + a_{ii'}\, d\vec{e}_{i'})\, \vec{e}_j + \sum_{j'} d\vec{e}_i \cdot b_{jj'} \vec{e}_{j'}$$
$$= \sum_{i'} a_{ii'} \omega_{i'j} + \sum_{j'} b_{jj'} \omega_{ij'};$$

d'autre part on a

$$\delta \omega_i = \sum_{i'} a_{ii'} \omega_{i'}, \qquad \delta \omega_j = \sum_{j'} b_{jj'} \omega_{j'};$$

---

[23]) Le paragraphe VIII peut être passé par le lecteur, les considérations du paragraphe IX conduisant aux mêmes résultats par une voie plus simple.

on en déduit

$$\delta \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \omega_{ij} = 0.$$

Cela revient à dire que la forme cubique $\sum_{i,j,k} c_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k$ a une signification géométrique indépendante du choix des ν vecteurs unitaires $\vec{e}_i$, des ν vecteurs unitaires $\vec{e}_j$, des ν vecteurs unitaires $\vec{e}_k$; on peut par suite choisir ces vecteurs unitaires de manière à réduire les coefficients c_{ijk} à avoir les valeurs numériques fixes des coefficients de la forme $\mathfrak{F}$ déterminée dans la première partie. *C'est ce que nous supposerons dans la suite.*

29. On peut tirer de là une conséquence importante. Reprenons la relation (44) et ne conservons dans cette relation que les termes qui contiennent en facteur au moins une des formes ω_k. En faisant tout passer dans le premier membre, ces termes se réduisent à

$$\sum_{i'} [\omega_{ii'}\omega_{i'j}] + \sum_{j'} [\omega_{ij'}\omega_{j'j}] - \sum_{k} \frac{\lambda_{ijk}}{a_i - a_j} \sum_{k'} [\omega_{k'}\omega_{k'k}]$$
$$= \sum_{k} \left[\left(\sum_{i'} \frac{\lambda_{i'jk}}{a_i - a_j}\omega_{ii'} + \sum_{j'} \frac{\lambda_{ij'k}}{a_i - a_j}\omega_{jj'} + \sum_{k'} \frac{\lambda_{ijk'}}{a_i - a_j}\omega_{kk'} \right) \omega_k \right].$$

Il résulte de là que pour chaque système d'indices i, j, k, la somme

$$\sum_{i'} c_{i'jk}\omega_{ii'} + \sum_{j'} c_{ij'k}\omega_{jj'} + \sum_{k'} c_{ijk'}\omega_{kk'}$$

ne peut dépendre des formes ω_i ni des formes ω_j; par raison de symétrie elle ne peut dépendre non plus des formes ω_k; elle est donc identiquement nulle. On a par suite l'identité importante

$$\sum_{i'} c_{i'jk}\omega_{ii'} + \sum_{j'} c_{ij'k}\omega_{jj'} + \sum_{k'} c_{ijk'}\omega_{kk'} = 0. \tag{49}$$

Remarquons que cette identité a lieu quels que soint les repères rectangulaires choisis, *pourvu qu'ils donnent aux c_{ijk} les valeurs numériques fixes indiquées.* Si on peut attacher à chaque point une infinité de repères satisfaisant à cette condition, les formes $\omega_{ii'}$, $\omega_{jj'}$, $\omega_{kk'}$ font intervenir des paramètres auxiliaires et en faisant varier uniquement ces paramètres auxiliaires, les identités (49) expriment l'invariance de la forme trilinéaire $\sum c_{ijk}\omega_i\,\omega_j\omega_k$.

30. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que les seules familles d'hypersurfaces isoparamétriques à trois courbures principales distinctes sont celles qui ont été déterminées dans la première partie. En effet considérons un point A de la variété singulière V définie par $t_3 = \frac{\pi}{2}$; nous pouvons supposer $t_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}$, $t_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}$, d' ou $h = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Au point A est attaché un repère rectangulaire d'origine A; soient par rapport à ce repère

$$x_i,\ y_j,\ z_k,\ v,\ u$$

es coordonnées normales de Weierstrass d'un point M de l'espace sphérique mbiant, le point M étant

$$M = u\,A + \sum x_i \vec{e}_i + \sum y_j \vec{e}_i + \sum z_k \vec{e}_k + v\vec{e}_n.$$

Considérons le polynome

$$F \equiv u^3 - 3\,u v^2 + \frac{3}{2}u\Big(\sum x_i^2 + \sum y_j^2 - 2\sum z_k^2\Big) + \frac{3\sqrt{3}}{2}v\Big(\sum x_i^2 - \sum y_j^2\Big) - 3\sqrt{3}\sum c_{ijk}\,x_i y_j z_k.$$

Lorsqu'on fait varier le point A de V, le *point M restant fixe*, les coordonées relatives x_i, y_j, z_k, v, u de M varient. Nous allons montrer que *la fonction F de ces coordonnées conserve sa valeur numérique.* Supposons cela fait. On voit d'abord que tout point de V donne au polynome F la valeur 1 puisque les coordonnées relatives de ce point dans le repère qui lui est attaché soit $u = 1$, $= x_i = y_j = z_k = 0$. Soit maintenant un point M de l'hypersurface située à la distance t de V, et soit A le point où la trajectoire orthogonale des hypersurfaces isoparamétriques qui passe par M coupe la variété V; si on apporte le point M au repère d'origine A, ses coordonnées x_i, y_j sont nulles t on a de plus

$$u = \cos t, \qquad \sum_k z_k^2 + v^2 = \sin^2 t;$$

on en déduit

$$F = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t = \cos 3t.$$

De là résulte que l'équation générale des hypersurfaces isoparamétriques st

$$F = \cos 3t.$$

31. Tout revient donc à démontrer l'invariance de la valeur numérique ue prend le polynome F en un point fixe M de l'espace lorsqu'on fait varier es repères auxquels ce point est rapporté, ces repères ayant leur origine sur la ariété V. Or quand le repère varie, les coordonnées relatives d'un point fixe atisfont aux relations qui découlent de

$$d(u\,A + x_i\vec{e}_i + y_j\vec{e}_j + z_k\vec{e}_k + v\vec{e}_n) = 0.$$

es relations sont

$$\begin{cases} du = \sum x_i\,\omega_i + \sum y_j\,\omega_j + \sum z_k\omega_k + v\,\omega_n, \\ dv = \sum x_i\,\omega_{ni} + \sum y_j\,\omega_{nj} + \sum z_k\omega_{nk} - u\,\omega_n, \\ dx_i = \sum_{i'} x_{i'}\omega_{ii'} + \sum_j y_j\,\omega_{ij} + \sum_k z_k\omega_{ik} + v\,\omega_{in} - u\omega_i, \\ dy_j = \sum_i x_i\,\omega_{ji} + \sum_{j'} y_{j'}\omega_{jj'} + \sum_k z_k\omega_{jk} + v\omega_{jn} - u\omega_j, \\ dz_k = \sum_i x_i\,\omega_{ki} + \sum_j y_j\,\omega_{kj} + \sum_{k'} z_k\omega_{kk'} + v\omega_{kn} - u\omega_k. \end{cases} \quad (50)$$

Ici on est sur la variété V. Pour voir clairement comment les choses se passent, posons d'une manière générale, en un point quelconque de l'espace,

$$(51)\quad \begin{cases} \omega_i = 2\cos t_1\,\widetilde{\omega}_i, & \omega_j = 2\cos t_2\,\widetilde{\omega}_j, & \omega_k = 2\cos t_3\,\widetilde{\omega}_k, \\ \omega_{in} = 2\sin t_1\,\widetilde{\omega}_i, & \omega_{jn} = 2\sin t_2\,\widetilde{\omega}_j, & \omega_{kn} = 2\sin t_3\,\widetilde{\omega}_k, \end{cases}$$

d'où

$$\omega_{jk} = \sum_i \frac{2\,\lambda_{jki}\cos t_1\cos t_2\cos t_3}{\sin(t_2 - t_3)}\,\widetilde{\omega}_i,$$

et, en simplifiant,

$$(52)\quad \begin{cases} \omega_{jk} = \sum\limits_i c_{ijk}\,\widetilde{\omega}_i, \\ \omega_{ki} = \sum\limits_j c_{ijk}\,\widetilde{\omega}_j, \\ \omega_{ij} = \sum\limits_k c_{ijk}\,\widetilde{\omega}_k. \end{cases}$$

Cela posé les formules (50) deviennent, en remplaçant respectivement $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ par $-\sqrt{3}\,\widetilde{\omega}_i, \sqrt{3}\,\widetilde{\omega}_j$, 0, et $\omega_{in}, \omega_{jn}, \omega_{kn}$ par $-\widetilde{\omega}_i, -\widetilde{\omega}_j, 2\widetilde{\omega}_k$, enfin ω_n par 0,

$$(50')\quad \begin{cases} du = -\sqrt{3}\,\Sigma\, x_i\,\widetilde{\omega}_i + \sqrt{3}\,\Sigma\, y_j\,\widetilde{\omega}_j, \\ dv = \Sigma\, x_i\,\widetilde{\omega}_i + \Sigma\, y_j\,\widetilde{\omega}_j - 2\,\Sigma\, z_k\,\widetilde{\omega}_k, \\ dx_i = \sum\limits_{i'} x_{i'}\,\omega_{ii'} + \sum\limits_{j,k} c_{ijk}(y_j\,\widetilde{\omega}_k - z_k\,\widetilde{\omega}_j) - v\,\widetilde{\omega}_i + u\sqrt{3}\,\widetilde{\omega}_i, \\ dy_j = \sum\limits_{j'} y_{j'}\,\omega_{jj'} + \sum\limits_{k,i} c_{ijk}(z_k\,\widetilde{\omega}_i - x_i\,\widetilde{\omega}_k) - v\,\widetilde{\omega}_j - u\sqrt{3}\,\widetilde{\omega}_j, \\ dz_k = \sum\limits_{k'} z_{k'}\,\omega_{kk'} + \sum\limits_{i,j} c_{ijk}(x_i\,\widetilde{\omega}_j - x_j\,\widetilde{\omega}_i) + 2v\,\widetilde{\omega}_k. \end{cases}$$

Un calcul assez long, mais sans difficulté, montre alors qu'en tenant compte des relations (45′), (46′), (47′) et (49), la différentielle du polynome F quand les différentielles des variables sont données par les formules (50′), est identiquement nulle. *Le théorème est ainsi démontré.*

IX. Les familles d'hypersurfaces isoparamétriques dont les courbures principales sont toutes du même degré de multiplicité.

32. Les calculs de vérification faits dans le paragraphe VIII peuvent être évités en recourant à un théorème général sur les familles d'hypersurfaces isoparamétriques dont les courbures principales distinctes, en nombre quelconque p, sont toutes du même degré de multiplicité. Ce théorème est le suivant.

Théorème. *Si dans un espace sphérique à n dimensions il existe une famille d'hypersurfaces isoparamétriques à p courbures principales distinctes du même degré de multiplicité ν, l'équation générale de ces hypersurfaces est de la forme*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \cos p\,t,$$

ù P est un polynome harmonique de degré p satisfaisant à la condition

$$\sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 = p^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2)^{p-1}.$$

Remarquons d'abord qu'on peut toujours supposer que la somme des p ourbures principales distinctes est égale à $-p \operatorname{cotg} pt$. En effet[24]) ces ourbures sont de la forme $\operatorname{tg}\left(t + \frac{i\pi}{p} + \alpha\right)$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$, étant une constante, du reste quelconque. Ce sont les p racines de l'équation ui donne $\operatorname{tg} x$ connaissant $\operatorname{tg} px = \operatorname{tg}(pt + p\alpha)$. Or la somme des racines e cette équation de degré p est $p \operatorname{tg} px$ si p est impair et $-p \operatorname{cotg} px$ si p st pair, comme cela résulte immédiatement de la formule qui donne $\operatorname{tg} px$ n fonction rationelle de $\operatorname{tg} x$. Il suffit alors d. prendre $\alpha = 0$ pour p pair, $= \frac{\pi}{2p}$ pour p impair pour arriver au résultat énoncé.

Cela posé on a vu[25]) que les deux premiers paramètres différentiels de t alculés dans l'espace sphérique à n dimensions, sont

53) $$\Delta_1 t = 1, \quad \Delta_2 t = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = v p \operatorname{cotg} pt.$$

a fonction $V = \cos pt$ satisfait alors aux relations

54) $$\begin{cases} \Delta_1 V = p^2 \sin^2 pt = p^2 (1 - V^2), \\ \Delta_2 V = -p^2 \cos pt - p \sin pt \, \Delta_2 t = -p^2 (v+1) V = -p (p+n-1) V. \end{cases}$$

Nous allons former maintenant dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions ont l'hypersphère de rayon 1 réalise l'espace sphérique considéré, la fonction

55) $$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = r^p \cos pt = r^p V,$$

ans laquelle r désigne la distance du point (x_i) à l'origine et p la valeur, u point $\frac{x_i}{r}$ de l'hypersphère, de la fonction t. On peut poser

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_{n+1}^2 = dr^2 + r^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2),$$

n désignant par $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2$ le ds^2 de l'hypersphère de rayon 1. On a

56) $$dP = p r^{p-1} V \, dr + \sum_i r^{p-1} V_i \, r \omega_i.$$

Le laplacien de la fonction $P = r^p V$ peut être calculé par la formule

$$\int_{(n)} p r^{p-1} V r^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n - r^{p-1} V_1 \, dr \cdot r^{n-1} \omega_2 \omega_3 \ldots \omega_n + r^{p-1} V_2 \, dr \cdot r^{n-1} \omega_1 \omega_3 \ldots \omega_n - \ldots = \int_{(n+1)} \sum \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} \cdot dr \, r^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n,$$

---

[24]) Annali di Mat. 17 (1938), p. 187.

[25]) l. c.[1]), p. 178. On a $dt = \omega_n$ et, dans la formule du bas de la page 178, appliquée $f = t$, on a $\varphi = 1$, $\psi = 0$.

le premier membre étant une intégrale n-ple étendue à la frontière d'un domaine de l'espace euclidien et l'intégrale $(n+1)$-ple à ce domaine lui-même.

L'application de la formule de Stokes généralisée (ou des procédés du calcul extérieur) donne

$$\sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = p(p-1+n) r^{p-2} V + r^{p-2} \Delta_2 V = 0. \tag{57}$$

D'autre part on a

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 = p^2 r^{2p-2} V^2 + r^{2p-2} \Delta_1 V = p^2 r^{2p-2}. \tag{58}$$

33. Il importe de remarquer qu'on ignore à priori l'existence d'une famille *régulière* d'hypersurfaces. Nous supposons simplement l'existence *locale*, dans un certain domaine de l'espace sphérique, d'une fonction t satisfaisant aux équations (54); il en résulte l'existence dans un certain domaine de l'espace euclidien d'une fonction P satisfaisant aux équations (57) et (58). Cette fonction étant harmonique est *analytique* et par suite dérivable indéfiniment. Nous allons démontrer que c'est un polynome de degré p[26]).

Pour cela nous allons appliquer plusieurs fois de suite l'opération $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ aux deux membres de la relation (58). Remarquons

1° que cette opération appliquée à r^{2q} donne r^{2q-2} à un facteur constant près positif;

2° que cette opération appliquée à la fonction

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_q} \left(\frac{\partial^q P}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_q}}\right)^2$$

donne, à un facteur positif près, la fonction analogue où q est augmenté d'une unité: un calcul facile, s'appuyant sur la remarque que P est harmonique ainsi que toutes ses dérivées, met ce résultat en évidence.

Cela posé, l'application p fois répétée de l'opération $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ aux deux membres de l'équation (58) donne

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}} \left(\frac{\partial^{p+1} P}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{p+1}}}\right)^2 = 0,$$

d'où résulte la conclusion que P est un polynome entier de degré p (et certainement pas de degré moindre). Le théorème est ainsi démontré.

---

[26]) Si l'on savait à priori que la fonction t est définie dans tout l'espace sphérique, on pourrait démontrer sans calcul ultérieur que V étant une des fonctions qui généralisent les fonctions sphériques, P est effectivement un polynome de degré p.

Ce résultat prouve que toutes les familles considérées d'hypersurfaces ont *régulières*.

34. Le théorème du N°32 a une réciproque. Soit P un polynome harmonique de degré p satisfaisant à la relation

$$\sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 = p^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2)^{p-1}.$$

Un calcul facile donne, en désignant par $\Delta_1 V$ et $\Delta_2 V$ les paramètres différentiels, dans l'hypersphère de rayon 1, de la fonction $V = \frac{1}{r^p} P$,

$$\Delta_1 V = p^2 (1 - V^2), \qquad \Delta_2 V = - p (p + n - 1) V;$$

les hypersurfaces $V = c^{te}$ forment donc un système isoparamétrique.

On peut du reste voir directement que la fonction V varie entre -1 et $+1$, car en tout maximum ou minimum de cette fonction on a $\frac{\partial P}{\partial x_i} = \lambda x_i$, d'où par élévation au carré et addition, $\lambda^2 = p^2$, $\lambda = \pm p$. En multipliant par x_i et sommant, on trouve, au maximum et au minimum,

$$p P = \lambda, \quad \text{d'où} \quad P = \pm 1.$$

35. Le problème de la recherche des familles d'hypersurfaces isoparamétriques dont toutes les courbures principales ont le même degré de multiplicité est ainsi ramené à un problème purement algébrique, celui que nous avons résolu pour $p = 3$ dans la première partie de ce Mémoire.

Pour $p = 4$, dans l'espace sphérique à 5 dimensions, il existe une famille et une seule d'hypersurfaces isoparamétriques à 4 courbures principales distinctes, donnée par l'équation

$$\begin{aligned}\cos 4t = {} & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2 \\ & - 2 (x_3^2 - x_4^2 - 2 x_1 x_5 + 2 x_2 x_6)^2 - 2 (2 x_3 x_4 - 2 x_1 x_6 - 2 x_2 x_5)^2\end{aligned}$$

(Eingegangen am 22. Dezember 1938.)

Ein Satz über die Konvergenz von Kettenbrüchen.

Von

Josef Mall in Landsberg am Lech.

Satz: *Es sei ein Kettenbruch der Gestalt*

$$\text{I} \qquad \frac{1}{|b_1} + \frac{1}{|b_2} + \frac{1}{|b_3} + \frac{1}{|b_4} + \cdots$$

gegeben.

Die Koeffizienten $b_{2\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, *seien beliebige von Null verschiedene reelle Zahlen. Außerdem sei* $s_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} b_{2n}$ *für jeden Wert von* ν *verschieden von Null. Die Koeffizienten* $b_{2\nu-1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *seien nicht alle gleich Null. Insbesondere sei* $b_1 \neq 0$. *Man setze die* $b_{2\nu-1}$ *in die Form*

$$b_{2\nu-1} = |b_{2\nu-1}|\, e^{i\vartheta_{2\nu-1}}.$$

Es möge eine positive Zahl ε *geben, so daß für alle von Null verschiedenen* $b_{2\nu-1}$

$$\varepsilon \leqq \vartheta_{2\nu-1} \leqq \pi - \varepsilon.$$

Der Kettenbruch konvergiert unter diesen Voraussetzungen, wenn entweder

1. *eine der beiden Reihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_{2\nu+1}| \quad \textit{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu^2\, |b_{2\nu+1}|$$

divergiert oder

2. *wenn, falls beide Reihen konvergieren,*

$$\lim_{\nu \to \infty} \Big| \sum_{n=1}^{\nu} b_{2n} \Big| = \infty.$$

In allen übrigen Fällen divergiert der Kettenbruch.

Dieser Satz ist für den Spezialfall, daß alle $\vartheta_{2\nu-1}$ einander gleich sind, von H. Hamburger mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen worden[1]). Er ist also eine naturgemäße Verallgemeinerung jenes Hamburgerschen Kriteriums und wird hier wesentlich einfacher bewiesen. Der Satz gilt übrigens auch ohne die Voraussetzungen $s_\nu \neq 0$ und $b_1 \neq 0$; diese sind nur gemacht, um beim Beweis lästige Ausnahmefälle zu vermeiden.

[1]) Hans Hamburger, Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems II. Math. Annalen 82, S. 120—164; speziell S. 150.

§ 1.

Hilfsformeln.

Die Näherungszähler und -nenner des Kettenbruches I bezeichnen ir mit A_n und B_n. Für sie gelten folgende Formeln:

a) $$A_n = b_n\, A_{n-1} + A_{n-2},$$

b) $$B_n = b_n\, B_{n-1} + B_{n-2},$$

c) $$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n-1}\,^{2}).$$

$\overline{B_n}$ sei konjugiert komplex zu B_n.

Wir setzen

) $$B_n \overline{B_{n-1}} = \sigma_n + i\,\tau_n.$$

ultipliziert man (1b) mit $\overline{B_{n-1}}$, so folgt

) $$B_n \overline{B_{n-1}} = b_n\,|B_{n-1}|^2 + B_{n-2}\,\overline{B_{n-1}}.$$

Wir setzen weiter

$$_{n+1} = \alpha_{2n+1} + i\beta_{2n+1} = |b_{2n+1}|(\cos\vartheta_{2n+1} + i\sin\vartheta_{2n+1})$$
$$= |b_{2n+1}|\sin\vartheta_{2n+1}(\cot\vartheta_{2n+1} + i) = \beta_{2n+1}(\cot\vartheta_{2n+1} + i).$$

ach den Voraussetzungen unseres Satzes bleibt $\sin\vartheta_{2n+1}$ für alle von ull verschiedenen b_{2n+1} größer als eine bestimmte Zahl c, ebenso ot $\vartheta_{2n+1}|$ für alle von Null verschiedenen b_{2n+1} kleiner als eine be- immte Zahl c_1.

Wir erhalten

) $$\beta_{2n+1} = |b_{2n+1}|\sin\vartheta_{2n+1} > |b_{2n+1}|\cdot c,$$

a) $$|b_{2n+1}| = \beta_{2n+1}|\cot\vartheta_{2n+1} + i| < \beta_{2n+1}(c_1 + 1) = \beta_{2n+1}\cdot k,$$

enn $c_1 + 1 = k$ gesetzt wird.

Für die Indizes $n = 2\nu + 1$ und $n = 2\nu$ erhalten wir aus (2) und (3)

a) $$\sigma_{2\nu+1} + i\,\tau_{2\nu+1} = (\alpha_{2\nu+1} + i\beta_{2\nu+1})\,|B_{2\nu}|^2 + \sigma_{2\nu} - i\,\tau_{2\nu},$$

b) $$\sigma_{2\nu} + i\,\tau_{2\nu} = b_{2\nu}|B_{2\nu-1}|^2 + \sigma_{2\nu-1} - i\,\tau_{2\nu-1}.$$

araus folgt

) $$\tau_{2\nu+1} = \beta_{2\nu+1}\,|B_{2\nu}|^2 - \tau_{2\nu},$$
$$\tau_{2\nu} = -\tau_{2\nu-1}.$$

a $b_1 \neq 0$ ist, ist $\tau_1 > 0$.

Durch wiederholte Anwendung der Formeln (6) findet man

) $$\tau_{2\nu+1} \geqq \tau_{2\nu-1} \geqq \ldots \geqq \tau_3 \geqq \tau_1 > 0.$$

---

[2]) Siehe O. Perron, Lehre von den Kettenbrüchen 1929, 2. Aufl., § 2 und 6.

Wir führen nun folgende Polynome ein

$$U_\nu = -\sum_{\mu=1}^{\nu-1} s_\mu b_{2\mu+1} A_{2\mu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{8a}$$

$$V_\nu = 1 - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} s_\mu b_{2\mu+1} B_{2\mu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{8b}$$

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 1. \tag{8c}$$

Dabei ist also

$$U_\nu = -s_{\nu-1} b_{2\nu-1} A_{2\nu-2} + U_{\nu-1},$$
$$V_\nu = -s_{\nu-1} b_{2\nu-1} B_{2\nu-2} + V_{\nu-1} \qquad (\nu > 1).$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich hieraus mit Hilfe von (1a) und (1b)

$$A_{2\nu} = U_\nu + s_\nu A_{2\nu-1}, \tag{9a}$$

$$B_{2\nu} = V_\nu + s_\nu B_{2\nu-1}. \tag{9b}$$

Der Kettenbruch

$$\text{II} \qquad \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{s_1}} + \cfrac{1}{-s_1^2 b_3} + \cfrac{1}{\cfrac{-b_4}{s_1 s_2}} + \cfrac{1}{-s_2^2 b_5} + \cfrac{1}{\cfrac{-b_6}{s_2 s_3}} + \cdots$$

hat nun die Näherungszähler

$$U_1 = 0, \quad \frac{A_2}{s_1}, \quad U_2, \quad \frac{A_4}{s_2}, \quad U_3, \ \ldots$$

und die Näherungsnenner

$$V_1 = 1, \quad \frac{B_2}{s_1}, \quad V_2, \quad \frac{B_4}{s_2}, \quad V_3, \ldots.$$

Den Beweis hierfür erbringt man leicht durch vollständige Induktion.

Setzt man

$$\frac{A_{2\nu}}{s_\nu} = A'_{2\nu}, \qquad \frac{B_{2\nu}}{s_\nu} = B'_{2\nu} \tag{10}$$

sowie

$$U_\nu = U'_\nu, \qquad V_\nu = V'_\nu, \tag{11}$$

so erhält man die Rekursionsformeln

$$B'_{2\nu} = \frac{-b_{2\nu}}{s_{\nu-1} s_\nu} V'_\nu + B'_{2\nu-2}, \tag{12a}$$

$$V'_\nu = -s^2_{\nu-1} b_{2\nu-1} B'_{2\nu-2} + V'_{\nu-1}. \tag{12b}$$

Analoge Rekursionsformeln gelten für die $A_{2\nu}$ und U_ν. Setzt man

$$B'_{2\nu} \overline{V'_\nu} = \sigma'_{2\nu-1} + i\tau'_{2\nu-1}, \tag{13}$$

$$V'_\nu \overline{B'_{2\nu-2}} = \sigma'_{2\nu-2} + i\tau'_{2\nu-2}, \tag{14}$$

so erhält man ähnlich wie früher die Formeln

$$\tau'_{2\nu-1} = -\tau'_{2\nu-2}, \tag{15a}$$

$$\tau'_{2\nu-2} = -\beta_{2\nu-1} s^2_{\nu-1} |B'_{2\nu-2}|^2 - \tau'_{2\nu-3}. \tag{15b}$$

Daraus folgt:

$$\tau'_{2\nu+1} \geqq \tau'_{2\nu-1} \geqq \ldots \geqq \tau'_3 \geqq \tau'_1 > 0,$$

da $\tau'_1 = J(b_1) > 0$ ist.

Wir betrachten ferner den Kettenbruch III mit den Näherungszählern

$$0, \quad \frac{A_3}{1+b_3 s_1}, \quad U_2(1+b_3 s_1), \quad \frac{A_5}{(1+b_3 s_1)(1+b_5 s_2)},$$

$$U_3(1+b_3 s_1)(1+b_5 s_2), \quad \frac{A_7}{(1+b_3 s_1)(1+b_5 s_2)(1+b_7 s_3)}, \ldots$$

und den Näherungsnennern

$$1, \quad \frac{B_3}{1+b_3 s_1}, \quad V_2(1+b_3 s_1), \quad \frac{B_5}{(1+b_3 s_1)(1+b_5 s_2)},$$

$$V_3(1+b_3 s_1)(1+b_5 s_2), \quad \frac{B_7}{(1+b_3 s_1)(1+b_5 s_2)(1+b_7 s_3)}, \ldots.$$

Seine Teilzähler sind alle gleich 1. Für seine Teilnenner gelten folgende Formeln, wie man durch vollständige Induktion erkennt:

(16a) $$b'_1 = \frac{b_1 b_2 b_3 + b_3 + b_1}{b_3 s_1 + 1},$$

(16b) $$b'_{2\nu} = -(1+b_3 s_1)^2 \ldots (1+b_{2\nu-1} s_{\nu-1})^2 (1+b_{2\nu+1} s_\nu)\, b_{2\nu+1} s_\nu^2, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

(16c) $$b'_{2\nu-1} = \frac{b_{2\nu+1}}{(1+b_3 s_1)^2 \ldots (1+b_{2\nu-1} s_{\nu-1})^2 (1+b_{2\nu+1} s_\nu)}, \quad \nu = 2, 3, \ldots.$$

Wenn wir die Näherungszähler und -nenner gerader und ungerader Ordnung zur Abkürzung mit den Buchstaben U''_ν, V''_ν und $A''_{2\nu+1}$, $B''_{2\nu+1}$ bezeichnen, erhalten wir allgemein die Formeln

(17a) $$V''_{\nu+1} = V_{\nu+1}(1+b_3 s_1)\ldots(1+b_{2\nu+1} s_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

(17b) $$B''_{2\nu+1} = \frac{B_{2\nu+1}}{(1+b_3 s_1)\ldots(1+b_{2\nu+1} s_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

und entsprechende Formeln für $U''_{\nu+1}$ und $A''_{2\nu+1}$.

§ 2.

Ein Hilfssatz.

Hilfssatz. Die Folge der Brüche

$$\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

und die Folge der Brüche

$$\frac{U_\nu}{V_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

sind beide konvergent.

Beweis. Wir führen den Beweis zunächst für die Folge der Brüche

$$\frac{U_\nu}{V_\nu}.$$

Aus (13) ergibt sich

$$(18)\quad |B'_{2\nu} V'_\nu| = |B'_{2\nu} V_\nu| = |\sigma'_{2\nu-1} + i\tau'_{2\nu-1}| \geqq \tau'_{2\nu-1} \geqq \tau'_1 > 0.$$

Daraus folgt: Die Nenner V_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und $B'_{2\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sind sämtlich von Null verschieden.

Unter Benützung der Formel (32) in Perron, Lehrbuch § 6 und mit Hilfe der Formeln (15a) und (15b) erhält man

$$\left|\frac{U_\nu}{V_\nu} - \frac{U_{\nu-1}}{V_{\nu-1}}\right| = \left|\frac{U'_\nu}{V'_\nu} - \frac{U'_{\nu-1}}{V'_{\nu-1}}\right| = \left|\frac{b_{2\nu-1} s^2_{\nu-1}}{V'_\nu V'_{\nu-1}}\right| = \frac{|b_{2\nu-1} s^2_{\nu-1}|\,|B'_{2\nu-2}|^2}{|V'_\nu B'_{2\nu-2}|\,|V'_{\nu-1} B'_{2\nu-2}|}$$

$$\leqq k \frac{\tau'_{2\nu-1} - \tau'_{2\nu-3}}{\tau'_{2\nu-1} \cdot \tau'_{2\nu-3}}$$

(siehe 4a) oder

$$(19)\qquad \left|\frac{U_\nu}{V_\nu} - \frac{U_{\nu-1}}{V_{\nu-1}}\right| \leqq k\left(\frac{1}{\tau'_{2\nu-3}} - \frac{1}{\tau'_{2\nu-1}}\right).$$

Daraus folgt ohne weiteres die Existenz von $\lim_{\nu\to\infty} \frac{U_\nu}{V_\nu}$. Unter Verwendung der Formeln (3), (5a, b) und (6) beweist man genau so die Konvergenz der Folge $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$.

§ 3.

Beweis des Konvergenzsatzes.

Zunächst zeigen wir, daß die Divergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} s^2_\nu |b_{2\nu+1}|$$

für die Konvergenz unseres Kettenbruches eine hinreichende Bedingung darstellt. Wir beweisen, daß die Näherungsbrüche für $\nu \to \infty$

$$\frac{U_\nu}{V_\nu},\ \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}},\ \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}},$$

wenn die obige Bedingung erfüllt ist, denselben Grenzwert besitzen. Aus (2) ergibt sich

$$|B_{2\nu+1}\,\overline{B_{2\nu}}| = |\sigma_{2\nu+1} + i\tau_{2\nu+1}| \geqq \tau_{2\nu+1} > \tau_1.$$

Da $\tau_1 > 0$ ist, folgt hieraus, daß die Näherungsnenner B_n $(n = 1, 2, \ldots$ alle von Null verschieden sind. Nach (18) gilt das gleiche für die V_ν

Von den Näherungsbrüchen ist daher keiner sinnlos. Mit Hilfe von (1c) und (13) erhalten wir für die Näherungsbrüche des Kettenbruches II die Abschätzung

$$\left|\frac{A'_{2\nu}}{B'_{2\nu}} - \frac{U'_\nu}{\overline{V}'_\nu}\right| = \frac{1}{|B'_{2\nu}\overline{V}'_\nu|} < \frac{1}{\tau'_{2\nu-1}}. \tag{20}$$

Multiplizieren wir (9b) mit $\overline{V}'_\nu$ und beachten (10) und (11), so folgt

$$B'_{2\nu}\overline{V}'_\nu = \frac{|\overline{V}'_\nu|^2}{s_\nu} + B_{2\nu-1}\overline{V}'_\nu.$$

Daraus ergibt sich, daß

$$B'_{2\nu}\overline{V}'_\nu \quad \text{und} \quad B_{2\nu-1}\overline{V}'_\nu$$

den gleichen imaginären Teil besitzen. Wir erhalten unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses wieder die Abschätzung

$$\left|\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} - \frac{U'_\nu}{\overline{V}'_\nu}\right| = \frac{1}{|B_{2\nu-1}\overline{V}'_\nu|} < \frac{1}{\tau'_{2\nu-1}}. \tag{21}$$

Es muß jetzt noch gezeigt werden, daß $\tau'_{2\nu-1}$ mit wachsendem ν gegen ∞ strebt. Wir berechnen zu diesem Zweck eine Formel zur Abschätzung von $\tau'_{2\nu-1}$. Aus (12b) folgt mit Hilfe von (4a)

$$\left|\frac{V'_\nu}{\overline{V}'_{\nu-1}}\right| \leqq 1 + \left|\frac{b_{2\nu-1}\, s^3_{\nu-1}\, B'_{2\nu-2}}{\overline{V}'_{\nu-1}}\right| < 1 + k\left|\frac{\beta_{2\nu-1}\, s^3_{\nu-1}\, B'^2_{2\nu-2}}{\overline{V}'_{\nu-1} B'_{2\nu-2}}\right|$$

oder

$$\left|\frac{V'_\nu}{\overline{V}'_{\nu-1}}\right| < 1 + \frac{k\,\beta_{2\nu-1}\, s^3_{\nu-1}\, |B'_{2\nu-2}|^2}{\tau'_{2\nu-3}}.$$

Mit Hilfe von (15a) und (15b) folgt hieraus

$$\left|\frac{V'_\nu}{\overline{V}'_{\nu-1}}\right| < 1 + \frac{k(\tau'_{2\nu-1} - \tau'_{2\nu-3})}{\tau'_{2\nu-3}} < 1 + \frac{k(\tau'_{2\nu-1} - \tau'_{2\nu-3})}{\tau'_1}$$

oder

$$\left|\frac{V'_\nu}{\overline{V}'_{\nu-1}}\right| < e^{\frac{k(\tau'_{2\nu-1} - \tau'_{2\nu-3})}{\tau'_1}}. \tag{22}$$

Setzt man in (22) der Reihe nach $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, und multipliziert die entsprechenden Formeln miteinander, so ergibt sich

$$\left|V'_\nu\right| < e^{\frac{k\cdot(\tau'_{2\nu-1} - \tau'_1)}{\tau'_1}}$$

oder

$$|V'_\nu| < e^{k'\tau'_{2\nu-1}}, \tag{23}$$

wenn $k' = \frac{k}{\tau'_1}$ gesetzt wird.

Weiter ist

$$|B'_{2\nu}\overline{V}'_{\nu}| = |\sigma'_{2\nu-1} + i\tau'_{2\nu-1}| \geqq \tau'_{2\nu-1},$$

$$|B'_{2\nu}| \geqq \frac{\tau'_{2\nu-1}}{|\overline{V}'_{\nu}|} \geqq \frac{\tau'_1}{e^{k'\tau'_{2\nu-1}}}.$$

Daraus folgt

$$\beta_{2\nu+1}\, s_\nu^2 |B'_{2\nu}|^2 \geqq \frac{\tau_1'^2\, \beta_{2\nu+1}\, s_\nu^2}{e^{2k'\tau'_{2\nu-1}}}.$$

Mit Hilfe von (15a) und (15b) ergibt sich

$$\tau'_{2\nu+1} - \tau'_{2\nu-1} \geqq \frac{\tau_1'^2\, \beta_{2\nu+1}\, s_\nu^2}{e^{2k'\tau'_{2\nu-1}}}$$

oder

$$e^{\tau'_{2\nu+1}} - e^{\tau'_{2\nu-1}} \geqq \frac{\tau_1'^2\, \beta_{2\nu+1}\, s_\nu^2}{e^{2k'\tau'_{2\nu-1}}}. \tag{24}$$

Aus (24) folgt

$$e^{\tau_{2\nu+1}(1+2k')} \geqq e^{\tau_{2\nu-1}(1+2k')} + s_\nu^2\, \beta_{2\nu+1}\, \tau_1'^2.$$

Summiert man von $\nu = 1$ an, so erhält man mit Rücksicht auf (4a)

$$e^{(1+2k')\tau'_{2\nu+1}} > \tau_1'^2 \sum_{\mu=1}^{\nu} \beta_{2\mu+1}\, s_\mu^2 > \frac{1}{k}\,\tau_1'^2 \sum_{\mu=1}^{\nu} |b_{2\mu+1}|\, s_\mu^2.$$

Hieraus folgt, da die Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} s_\mu^2 |b_{2\mu+1}|$ divergiert, sogleich

$$\lim_{\nu\to\infty} \tau'_{2\nu+1} = \infty.$$

Nach (20) und (21) konvergieren daher die Näherungsbrüche $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ und $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ gegen den Grenzwert der Brüche $\frac{U_\nu}{V_\nu}$. Damit ist die Konvergenz des Kettenbruches I unter der Voraussetzung, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu^2 |b_{2\nu+1}|$ divergiert, nachgewiesen.

Eine analoge in der praktischen Ausführung etwas einfachere Überlegung lehrt, daß die Divergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_{2\nu+1}|$ für die Konvergenz des Kettenbruches hinreichend ist.

Man braucht hier nur die Folgen $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ und $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ zu betrachten. An Stelle der Formel (23) tritt hier eine entsprechende für die $B_{2\nu}$. Für $\tau_{2\nu+1}$ erhält man die Abschätzung

$$e^{(1+2k')\tau_{2\nu+1}} > c \sum_{\mu=1}^{\nu} |b_{2\mu+1}|.$$

Da der Beweis sich gedanklich nicht von dem obigen unterscheidet und in der Durchführung einfacher ist, verzichten wir auf eine ausführliche Wiedergabe desselben.

Wir wollen nun annehmen, die Reihen

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |b_{2\mu+1}| \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} s_\mu^2 |b_{2\mu+1}| \tag{26}$$

seien beide konvergent. Wir beweisen, daß dann der Kettenbruch im allgemeinen divergiert und nur, wenn $\lim |s_\nu| = \infty$ ist, konvergiert. Zu diesem Zweck betrachten wir den Kettenbruch III in § I und untersuchen die Reihe seiner Teilnenner

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |b'_\nu| \qquad \text{(siehe Formel 16 a, b, c,).}$$

Nach den Voraussetzungen unseres Satzes sind zunächst alle im Nenner der $b'_{2\nu-1}$ auftretenden Faktoren von Null verschieden. Außerdem konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + b_{2\nu+1} s_\nu) \tag{27}$$

und hat einen von Null verschiedenen Wert. Aus der Konvergenz der Reihen (26) folgt nämlich unmittelbar auch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |b_{2\nu+1}||s_\nu|$$

und hieraus sofort die Konvergenz des unendlichen Produktes. Wegen der Konvergenz von (27) existieren zwei Zahlen k und K, so daß für jeden Wert von m gilt

$$k < \left| \prod_{\nu=1}^{m} (1 + b_{2\nu+1} s_\nu) \right| < K, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{28}$$

Unter Anwendung von (28) auf die Formeln (16 a, b, c) erhalten wir für die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |b'_\nu|$ folgende Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |b'_\nu| \leqq |b'_1| + K^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} |b_{2\nu-1}| s_{\nu-1}^2 + \frac{1}{k^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_{2\nu+1}|.$$

Da die beiden Reihen rechts nach Voraussetzung konvergieren, konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |b'_\nu|.$$

Nach den Sätzen von Stern und Koch[3]) divergiert dann der Kettenbruch III und es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\nu\to\infty} A''_{2\nu+1} = A'', \quad \lim_{\nu\to\infty} B''_{2\nu+1} = B'', \quad \lim_{\nu\to\infty} U''_{\nu} = U'', \quad \lim_{\nu\to\infty} V''_{\nu} = V''.$$

Außerdem gilt

$$A''V'' - U''B'' = 1.$$

Aus (17a) und (17b) erschließt man sofort, daß auch die Grenzwerte

$$\lim_{\nu\to\infty} A_{2\nu+1} = A, \quad \lim_{\nu\to\infty} B_{2\nu+1} = B\,(B \neq 0),$$

$$\lim_{\nu\to\infty} U_{\nu} = U, \qquad \lim_{\nu\to\infty} V_{\nu} = V\,(V \neq 0)$$

existieren. Nach Perron, Lehrbuch, § 6, Formel 30 ist

$$A_{2\nu+1}V_{\nu} - B_{2\nu+1}U_{\nu} = b_{2\nu+1}s_{\nu} + 1.$$

Beim Grenzübergang erhält man

$$AV - BU = 1, \qquad \text{da } \lim_{\nu\to\infty} b_{2\nu+1}s_{\nu} = 0 \text{ ist.}$$

Unter Verwendung von (1c) und (9b) folgt

$$\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} = \frac{-1}{(V_{\nu} + s_{\nu}B_{2\nu-1})\,B_{2\nu-1}}.$$

Man erkennt hieraus, daß der Kettenbruch I sicher divergiert, wenn $|s_{\nu}|$ endliche Häufungswerte besitzt. Ist aber

$$\lim_{\nu\to\infty} |s_{\nu}| = \infty,$$

so folgt aus

$$\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = \frac{U_{\nu} + s_{\nu}A_{2\nu-1}}{V_{\nu} + s_{\nu}B_{2\nu-1}},$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\frac{U_{\nu}}{s_{\nu}} + A_{2\nu-1}}{\frac{V_{\nu}}{s_{\nu}} + B_{2\nu-1}} = \frac{A}{B} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$$

Der Kettenbruch konvergiert also in diesem Fall. Damit ist der Lehrsatz vollständig bewiesen.

---

[3]) Perron, Lehre von den Kettenbrüchen 1928, 2. Aufl., § 49.

(Eingegangen am 24. Dezember 1938.)

Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen.

Von

Franz Wecken in Marburg (Lahn).

Einleitung.

Die von Besicovitch und Bohr [2], [3] und Kovanko [13], [14] betrachteten verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen bilden metrische und topologische Räume $\{B^p fp\}$ bzw. $\{fp\alpha_p\}$ und $\{fp\alpha\}$, die in ihrer Struktur eine gewisse Analogie zu den Räumen L^p, L der in einem Intervall in der p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren bzw. der dort Lebesgue-meßbaren Funktionen zeigen, die besonders an dem „Fischer-Rießschen Satz“ ([3], S. 109) deutlich wird. Aber obwohl die Lebesguesche Integraltheorie durch Radon [21], Fréchet [7] u. a. zu einer Maß- und Integraltheorie auf abstrakten Mengen verallgemeinert worden war, blieb es hier bei einer bloßen Analogie: die allgemeine Theorie war auf die fastperiodischen Funktionen nicht anwendbar, da hier eine dem Lebesgueschen Maß entsprechende totaladditive Mengenfunktion nicht existierte.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß sich gleichwohl die abstrakte Integraltheorie, nachdem sie in eine geeignete Form gebracht ist (Kap. I, § 1 bis 3), für die fastperiodischen Funktionen nutzbar machen läßt (Kap. II, § 4 bis 6). Dazu wird für die Maßtheorie an Stelle eines Borelschen Mengenkörpers ein algebraisches System („Σ-System“, § 1) zugrunde gelegt, mit dessen Hilfe ein Bereich $\mathfrak{M}$ von Dingen erklärt wird, die als meßbare Funktionen bezeichnet werden (§ 2). Für sie gilt die bekannte Integraltheorie, deren für uns wichtige Punkte in § 3 kurz zusammengestellt sind.

§ 4 zeigt, daß gewisse Klassen von Punktmengen der reellen Zahlenachse mit geeigneten Verknüpfungen und mit der von Besicovitch und Bohr definierten „Dichte“ als Maßfunktion ein unter die Definition in § 1 fallendes System bilden, für das also die Überlegungen von Kap. I Geltung haben. Dementsprechend erhalten wir abstrakte Funktionenräume $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^p$, die (in § 5) durch Räume von „konkreten“ Funktionen $f(x)$ realisiert werden. In § 6 wird der enge Zusammenhang dieser Räume mit den von Besicovitch, Bohr und Kovanko untersuchten Funktionenfamilien aufgezeigt, insbesondere erweist sich der allgemeinste von uns angegebene Bereich als mit dem Kovankoschen identisch. Damit ergeben sich für die schon bekannten Funktionen einige Sätze: Kennzeichnung der Funktionen $f(x)$ durch Eigenschaften der Punktmengen $\mathfrak{e}\,[Re\, f(x) < \lambda_1,\ Im\, f(x) < \lambda_2]$; Existenz einer Verteilungsfunktion; Vollständigkeit der Funktionenräume.

Ein besonderes Interesse beansprucht hier der (vollständige euklidische) Raum $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}^2$ der quadratisch integrierbaren Funktionen. Der Funktionenraum $\mathfrak{M}$ ist zu einem Ring $\mathfrak{M}$ von normalen Operatoren in $\mathfrak{R}$ isomorph (§ 3), und die Definition und Untersuchung von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ kann in dem betrachteten Spezialfall, wie in § 6 angedeutet, unabhängig von der Theorie der fastperiodischen Funktionen durchgeführt werden.

Kapitel I.

Maß- und Integraltheorie auf Σ-Systemen.

§ 1.

Σ-Systeme.

Die auf den Untersuchungen Radons [21] fußende, von Fréchet [7] begründete Maß- und Integraltheorie auf abstrakten Mengen geht aus von einem aus Teilmengen $A, B, \ldots$ einer festen Menge E gebildeten σ-Körper (oder „Borelschen Körper") $\mathfrak{K}$, auf dem eine (gewöhnlich monotone) totaladditive Mengenfunktion μA definiert ist; zweckmäßig fordert man $E \in \mathfrak{K}$ (Nikodym [20]). Die Mengen aus $\mathfrak{K}$ bzw. aus einer gewissen Erweiterung von $\mathfrak{K}$ (Saks [25], § 5) werden als meßbar bezeichnet; μA heißt das Maß von A. Mit ihrer Hilfe werden meßbare Funktionen auf E erklärt. Die „Nullmengen" $X \in \mathfrak{K}$ mit $\mu X = 0$ bilden wieder einen σ-Körper $\mathfrak{N}$.

Für viele Untersuchungen ist es belanglos, ob man die betrachteten Mengen durch *„äquivalente"* ersetzt, d. h. durch solche, die sich nur um Nullmengen unterscheiden. Infolge des Umstandes, daß $\mathfrak{N}$ ein σ-Körper ist, läßt sich mit den „Mengen bis auf Nullmengen" wie mit den Mengen eines σ-Körpers operieren, und für die meßbaren Funktionen ergibt sich ein entsprechender Äquivalenzbegriff. Das Rechnen mit Mengen *bis auf eine Nullmenge* bedeutet algebraisch die Bildung des Restklassenringes $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ des als *Boolescher Ring* (vgl. Köthe [12]) aufgefaßten σ-Körpers $\mathfrak{K}$ nach dem σ-Körper $\mathfrak{N}$, der Ideal in $\mathfrak{K}$ ist; $\mathfrak{B}$ ist wieder ein Boolescher Ring, ist also zu einem geeigneten Mengenkörper isomorph ([12], 131) und hat überdies die für den σ-Körper charakteristische Eigenschaft, daß innerhalb $\mathfrak{B}$ die Vereinigung abzählbar vieler Elemente stets gebildet werden kann. Dieses System $\mathfrak{B}$ legen wir der Betrachtung zugrunde.

Definition 1. *Als Σ-System werde eine Menge $\mathfrak{B}$ von Elementen $A, B, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften bezeichnet:*

1. *$\mathfrak{B}$ ist eine Boolesche Algebra*[1]) *mit den Operationen $A \dotplus B$ (Vereinigung), AB (Durchschnitt), A' (Komplement), dem Einselement E und Nullelement N, und der Anordnungsbeziehung $A \subset B$ oder $B \supset A$ (d. h. $AB = A$).*

[1]) Vgl. [12], 132.

2. *Zu* $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ *gibt es stets ein* $A \in \mathfrak{B}$ *mit* $A \supset A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *so daß aus* $B \in \mathfrak{B}$, $B \supset A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $B \supset A$ *folgt; Bezeichnung:* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} A_n$ („*Vereinigung aller* A_n“).

3. *Für alle* $A \in \mathfrak{B}$ *läßt sich eine „Maßfunktion“* μA *mit folgenden Eigenschaften erklären:*

(1) $$0 \leqq \mu A \leqq \infty;$$

(2) aus $A = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} A_n$, $A_n A_m = N$ $(n \neq m)$ folgt $\mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$;

(3) aus $\mu A = 0$ folgt $A = N$;

(4) es gibt $E_1, E_2, \ldots$ mit $\mu E_n < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} E_n = E$.

Mit der durch $A + B = AB' \dot{+} A'B$ erklärten Addition und der Multiplikation AB ist $\mathfrak{B}$ ein Boolescher Ring. — Mit 2. ist die duale Forderung der Existenz des Durchschnittes $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar vieler Elemente aus $\mathfrak{B}$ gleichwertig. — Die Bedingung (4) (vgl. Jessen [10], 77) verlangt etwas weniger als die gewöhnlich geforderte Endlichkeit von μA; es gibt hier die zwei Möglichkeiten $\mu E = \infty$ (*Fall U*) und: $\mu E < \infty$, μA beschränkt (*Fall B*). Im Falle *U* bilden die $A \subset X$, wo $X \neq N$ mit $\mu X < \infty$ fest gewählt ist, ein Σ-System mit der beschränkten Maßfunktion μ. — Aus (2), (3) und (4) schließt man leicht, daß $\mathfrak{B}$ keine unabzählbare Teilmenge von Elementen $A, B, \ldots \neq N$ mit $AB = N$ (für $A \neq B$) enthält. — Beispiele von Σ-Systemen werden in § 4 gegeben werden.

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{B}$ *ein* Σ*-System mit der unbeschränkten Maßfunktion* μ, *so läßt sich auf* $\mathfrak{B}$ *eine beschränkte Maßfunktion* ϱ *definieren.*

Beweis. Es seien Elemente $A_1, A_2, \ldots$ gewählt mit $E = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} A_n$, $\mu A_n < \infty$, $A_n A_m = N$ $(n \neq m)$, was nach Def. 1 offenbar möglich ist. Wir wählen Zahlen $c_1, c_2, \ldots$ mit $0 < c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu A_n < \infty$ und setzen

$$\varrho A = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu(A A_n);$$

man erkennt leicht die Gültigkeit der Formeln (1) bis (3) mit ϱ statt μ sowie $\varrho A \leqq \varrho E = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu A_n < \infty$.

Im Falle *B* läßt sich durch das gleiche Verfahren eine unbeschränkte Maßfunktion konstruieren, falls $\mathfrak{B}$ unendlich viele Elemente enthält.

Ein zu $\mathfrak{B}$ isomorpher Mengenkörper $\mathfrak{R}$ [2]) hat natürlich auch die in Def. 1 geforderten Eigenschaften, braucht aber deshalb kein σ-Körper zu sein. Ist $\mathfrak{R}$ ein solcher, so erstreckt sich die Isomorphie von selbst auch auf die abzählbar-unendlichen Operationen. Die Frage liegt nahe, ob eine isomorphe Darstellung des Σ-Systems $\mathfrak{B}$ durch einen σ-Körper $\mathfrak{R}$ überhaupt immer möglich ist.

Satz 2. *In Def. 1 kann die Forderung 2 (ohne inhaltliche Abänderung der Definition) dahin verschärft werden, daß die abzählbare Menge durch eine solche von beliebiger Mächtigkeit ersetzt wird. Die Vereinigung einer Menge von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist gleich derjenigen einer passenden abzählbaren Teilmenge.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{B}$; ϱ sei eine (nach Satz 1 existierende) beschränkte Maßfunktion auf $\mathfrak{B}$. a sei die obere Grenze aller Zahlen ϱB, wo B die Vereinigung irgend abzählbar vieler Elemente aus $\mathfrak{A}$ ist; $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Folge solcher Vereinigungen mit $\varrho B_n \to a$ und es sei $A = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} B_n$. Man erkennt leicht, daß $\varrho A = a$ ist; ferner gilt für jedes $B \in \mathfrak{B}$, das alle $X \in \mathfrak{A}$ umfaßt, $B \supset B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und daher $B \supset A$. Es ist nur noch zu zeigen: aus $X \in \mathfrak{A}$ folgt $X \subset A$. Wäre nun für irgendein $X \in \mathfrak{A}$ nicht $X \subset A$, so wäre $C = A \dot{+} X \neq A$, $C + A \neq N$, $\varrho C = \varrho A + \varrho (C + A) > \varrho A = a$, während nach Definition von a $\varrho C \leqq a$ sein muß (Widerspruch).

Nach Satz 2 erfüllt $\mathfrak{B}$ die in [12], 137 erwähnten Axiome (Σ) und (Π). — Ein Element $A \in \mathfrak{B}$ mit $A \neq N$, für das ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \subset A$, $N \neq B \neq A$ nicht existiert, möge vorübergehend ein *unzerlegbares Element* [3]) heißen.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{B}$ ein Σ-System und gibt es $A \in \mathfrak{B}$, $A \neq N$, so daß ein unzerlegbares $U \subset A$ nicht existiert, so gibt es keinen zu $\mathfrak{B}$ isomorphen σ-Körper. Andernfalls ist $\mathfrak{B}$ isomorph zu dem von sämtlichen Teilmengen einer festen abzählbaren Menge gebildeten σ-Körper.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}$ ein zu $\mathfrak{B}$ isomorpher σ-Körper; er besteht aus Teilmengen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ einer festen Menge $\mathfrak{e}$. Satz 2 gilt auch für $\mathfrak{R}$, denn da die kleinste, alle Mengen $\mathfrak{a}$ einer Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}$ umfassende Menge $\mathfrak{m} \in \mathfrak{R}$ die Vereinigungsmenge abzählbar vieler $\mathfrak{a}$ ist:

$$\mathfrak{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} \mathfrak{a}_n,$$

besteht $\mathfrak{m}$ nur aus Elementen $\alpha \in \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ und ist also wirklich Vereinigungsmenge von $\mathfrak{A}$. Ebenso enthält $\mathfrak{R}$ auch den Durchschnitt aller Mengen aus $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{d} = \prod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a} \in \mathfrak{R}. \tag{5}$$

---

[2]) Für den Fall der Lebesgueschen Maßtheorie wurde ein solcher durch v. Neumann [19] konstruiert.

[3]) Bei Stone [26], 50 „atomic element".

Nach [26], theor. 54 können wir nun $\mathfrak{R}$ als „reduziert" annehmen; d. h. ist $\alpha \in \mathfrak{e}$, so enthält der Durchschnitt aller $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ mit $\alpha \in \mathfrak{a}$ genau das Element α: $\prod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R},\, \alpha \in \mathfrak{a}} \mathfrak{a} = \{\alpha\}$. Nach (5) ist $\{\alpha\} \in \mathfrak{R}$, und $\mathfrak{R}$ enthält folglich alle Teilmengen von $\mathfrak{e}$. Da auf $\mathfrak{R}$ eine beschränkte Maßfunktion ϱ mit $\varrho\{\alpha\} > 0$ existiert, muß $\mathfrak{e}$ abzählbar sein. Da jedes $\{\alpha\} \in \mathfrak{R}$ offenbar unzerlegbar ist, umfaßt jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{a} \neq 0$ eine unzerlegbare Teilmenge, und daher jedes $A \in \mathfrak{B}$ mit $A \neq N$ ein unzerlegbares $U \in \mathfrak{B}$. Damit ist alles bewiesen.

In den meisten uns interessierenden Fällen wird $\mathfrak{B}$ überhaupt keine unzerlegbaren Elemente enthalten und daher die erste Behauptung von Satz 3 gelten.

Wir fahren in der Untersuchung eines beliebigen Σ-Systems fort. Mit Durchschnitt und Vereinigung abzählbar vieler $A \in \mathfrak{B}$ sind in $\mathfrak{B}$ auch $\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n$ und $\underline{\lim_{n \to \infty}} A_n$ stets sinnvoll und $\lim_{n \to \infty} A_n$ läßt sich wie üblich erklären (vgl. z. B. Carathéodory [5], 114); für $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ schreiben wir auch $A_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} A$ oder $A_n \to A$. Daneben läßt sich mittels der Maßfunktion ein anderer Grenzwertbegriff einführen:

Definition 2. *Eine Folge $\{A_n\}$ aus $\mathfrak{B}$ heißt gegen $A \in \mathfrak{B}$ maßkonvergent — in Zeichen $\mu\text{-}\lim A_n = A$ oder $A_n \overset{\mu}{\underset{n \to \infty}{\longrightarrow}} A$, — wenn für jedes $X \in \mathfrak{B}$ mit $\mu X < \infty$ $\mu(A_n X + A X) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ gilt. $\{A_n\}$ heißt in sich maßkonvergent, wenn $\mu(A_n X + A_m X) \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0$ für $X \in \mathfrak{B}$ mit $\mu X < \infty$ gilt.*

Zur Rechtfertigung dieser Definition betrachten wir zunächst Fall B; hier läßt sich durch

$$\|A, B\|_\mu = \mu(A + B)$$

eine μ-Entfernung zwischen den Elementen von $\mathfrak{B}$ erklären ([20], 133), die den Hausdorffschen Axiomen genügt und $\mathfrak{B}$ zu einem vollständigen metrischen Raume macht ([20], 139, théor. c). Die Konvergenz im Sinne dieser Metrik ist dann die Maßkonvergenz der Def. 2.

Satz 4. *Aus $E_n \to A$ folgt $E_n \overset{\mu}{\to} A$. Aus $E_n \overset{\mu}{\to} A$ folgt die Existenz einer Teilfolge E_{ν_k} mit $E_{\nu_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} A$. Die Maßkonvergenz ist von der gewählten Maßfunktion unabhängig.*

Beweis. Aus $E_n \to A$ folgt $E_n + A \to N$, also, da $\mu(XA) = \tau A$ (X fest, $\mu X < \infty$) eine beschränkte totaladditive Funktion auf $\mathfrak{B}$ ist, $\mu(X(E_n + A)) \to \mu(XN) = 0$ (vgl. [20], 136), folglich $E_n \overset{\mu}{\to} A$. Ist umgekehrt $E_n \overset{\mu}{\to} A$, so ist die Existenz einer Folge E_{ν_n} mit $E_{\nu_n} \to A$ zu zeigen. Es liege zunächst Fall B vor. Verfolgen wir den Beweis des théor. c in [20], 139, dessen Voraussetzungen hier erfüllt sind; nach Wahl positiver Zahlen σ_k

mit $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k < \infty$ und einer Teilfolge ν_k mit $\|E_n, E_m\|_\mu < \sigma_k$ für $n, m > \nu_k$ wird geschlossen, daß mit passendem $\bar{E}$ $\|E_n, \bar{E}\|_\mu \to 0$ gilt, und zwar ist dort

$$\bar{E} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \dot{+} E_{\nu_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_{\nu_n};$$

es ist also $A = \bar{E}$. Dasselbe gilt aus Dualitätsgründen mit $\underline{E} = \underline{\lim}\, E_{\nu_n}$; man hat also $\bar{E} = \underline{E} = \lim E_{\nu_n} = A = \mu\text{-}\lim E_n$. Im Falle U folgt zunächst aus $E_n \xrightarrow{\mu} A$ nur für jedes X mit $\mu X < \infty$ die Existenz einer Teilfolge E_{n_k} mit $E_{n_k} X \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} AX$, hieraus schließt man aber mit dem Diagonalverfahren leicht auf die Existenz von $m_1, m_2, \ldots$ mit $E_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$. — Ist σ eine andere Maßfunktion, so ist zu zeigen, daß aus $E_n \xrightarrow{\mu} A$ $E_n \xrightarrow{\sigma} A$ folgt. Nun enthält jede Teilfolge aus $\{E_n\}$, da sie gegen A μ-konvergent ist, eine gegen A konvergente und daher auch σ-konvergente Folge. Daß aber eine Folge E_n, von der jede Teilfolge eine gegen A σ-konvergente Teilfolge enthält, selbst σ-konvergent gegen A sein muß, folgt durch Betrachtung des Ausdruckes $\sigma(XE_n + XA)$ $(\sigma X < \infty)$.

Nach Satz 4 kann die Maßkonvergenz stets aus einer Metrik hergeleitet werden, da es nach Satz 1 eine beschränkte Maßfunktion gibt.

Die Ausdrücke $A + B$ und AB sind, wie man leicht sieht, in beiden Variablen stetig hinsichtlich beider Konvergenzbegriffe.

§ 2.

Meßbare Funktionen.

Ist $\mathfrak{B}$ ein von Teilmengen einer Menge E gebildeter σ-Körper, so bezeichnen wir als (hinsichtlich $\mathfrak{B}$) meßbare Funktion eine für $x \in E$ definierte, zunächst reellwertige, endliche Funktion $f(x)$ mit $E[f(x) \leqq \lambda] \in \mathfrak{B}$ für $-\infty < \lambda < \infty$, d. h. mit der Eigenschaft, daß für reelles λ die Menge der $x \in E$ mit $f(x) \leqq \lambda$ stets zu $\mathfrak{B}$ gehört. Durch die von λ abhängige Mengenschar $E(\lambda) = E[f(x) \leqq \lambda]$, die gewisse einfache Eigenschaften hat, ist $f(x)$ umgekehrt eindeutig bestimmt, und die Schar $E(\lambda)$ kann (unter Beachtung jener Eigenschaften) willkürlich vorgegeben werden; diese Scharen sind also den Funktionen $f(x)$ eineindeutig zugeordnet (vgl. [5], 371). Ist nun $\mathfrak{B}$ ein Σ-System mit der Einheit E, so ist eine Funktion $f(x)$ auf E nicht sinnvoll, wohl aber kann die Schar $E(\lambda)$ gebildet werden. So ergibt sich folgende Begriffsbildung.

Definition 3. *Eine für $-\infty < \lambda < \infty$ erklärte Funktion $E(\lambda)$ mit Werten aus einem Σ-System $\mathfrak{B}$ werde als (reelle) charakteristische Schar be-*

zeichnet, wenn folgende Bedingungen[4]) *erfüllt sind*:

$$E(\lambda) \subset E(\nu) \quad \text{für} \quad \lambda < \nu, \tag{6}$$

$$E(\lambda) \to E(\nu)^{5}) \quad \text{für} \quad \lambda > \nu,\ \lambda \to \nu, \tag{7}$$

$$E(\lambda) \underset{\lambda \to -\infty}{\longrightarrow} N, \qquad E(\lambda) \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} E^{5}). \tag{8}$$

Jeder charakteristischen Schar werde eine „reelle meßbare Funktion f über $\mathfrak{B}$" zugeordnet durch die symbolische Schreibweise $E[f \leqq \lambda] = E(\lambda)$. $\mathfrak{M}_1$ sei die Menge aller dieser Funktionen.

Wir nennen (6) die Monotonie, (7) die Rechtsstetigkeit, (8) die Vollständigkeit der Schar $E(\lambda)$. Ohne nähere Erklärung verwenden wir auch Bezeichnungen wie $E[\alpha < f < \beta]$, $E[|f| > \varepsilon]$ usw. — Man kann den Elementen $f \in \mathfrak{M}_1$ eineindeutig Funktionen auf einer Menge e zuordnen, indem man zu einem zu $\mathfrak{B}$ isomorphen Mengenkörper $\mathfrak{K}$ (bestehend aus Teilmengen von e) übergeht. Auf $\mathfrak{K}$ ist μ als additive Mengenfunktion erklärt und erfüllt auch, wie man leicht sieht, die weitere Bedingung, auf Grund deren sich $\mathfrak{K}$ zu einem Borelschen Körper $\bar{\mathfrak{K}}$ mit der totaladditiven Maßfunktion μ eindeutig erweitern läßt (vgl. Kolmogoroff [11], 215ff.; [10], 78). Auf die durch $\bar{\mathfrak{K}}$ festgelegten reellen meßbaren Funktionen ist die bekannte abstrakte Maßtheorie anwendbar. Die Mengen von $\bar{\mathfrak{K}}$ „bis auf Nullmengen" bilden ein zu $\mathfrak{B}$ isomorphes Σ-System $\mathfrak{K}'$ und die meßbaren Funktionen auf e „bis auf eine Nullmenge" einen zu $\mathfrak{M}_1$ isomorphen Funktionenbereich $\mathfrak{M}_1'$. Die Aussagen über meßbare Funktionen auf e lassen sich nun großenteils sofort in solche über $\mathfrak{M}_1'$ bzw. $\mathfrak{M}_1$ übersetzen. In diesem Sinne wenden wir die Begriffe und Sätze der Maßtheorie auf $\mathfrak{M}_1$ an, ohne auf die Darstellung durch $\mathfrak{M}_1'$ noch besonders zu verweisen.

Demnach ist in $\mathfrak{M}_1$ eine Addition und Multiplikation sinnvoll; $\mathfrak{M}_1$ ist ein kommutativer Ring. Durch formale Zusammensetzung

$$f_1 + i f_2 = f$$

bilden wir *komplexe meßbare Funktionen* f über $\mathfrak{B}$; ihre Gesamtheit sei $\mathfrak{M}$. Die Rechenregeln für sie sollen die üblichen sein. Die $f \in \mathfrak{M}$ können auch direkt gekennzeichnet werden durch eine zweiparametrige charakteristische Schar

$$E(z) = E(z_1 + i z_2) = E[f_1 \leqq z_1]\, E[f_2 \leqq z_2]$$

(entsprechend der komplexen Zerlegung der Einheit, vgl. [18], 410). $\mathfrak{M}$ ist ein *kommutativer Ring*, der die komplexen Zahlen enthält. Die Ausdrücke

[4]) Die formale Übereinstimmung mit der Definition einer Zerlegung der Einheit [17], 91) wird später (S. 389) eine Erklärung finden.

[5]) Wegen (6) kann hier $\to$ durch $\overset{\mu}{\to}$ ersetzt werden.

$\bar{f}$, $|f| = \sqrt{f\bar{f}}$, beschränkte Funktion, obere Grenze der Werte von $|f|$, gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ sind in $\mathfrak{M}$ sinnvoll. Auch eine Konvergenz schlechthin $f_n \to f$ läßt sich in $\mathfrak{M}$ sofort erklären, indem man für die punktweise Konvergenz von Punktfunktionen einen Ausdruck wählt, der in $\mathfrak{M}$ sinnvoll bleibt; so erhält man als notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz in $\mathfrak{M}$

$$E\,[|f_n - f| > \varepsilon]_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} N \text{ für jedes } \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Liegt Fall B vor, so wird durch

$$\begin{aligned} &\mu E\,[|f| > \eta] \leqq \eta \leqq \mu E\,[|f| \geqq \eta], \\ &D_\mu[f] = \eta; \quad D_\mu[f, g] = D_\mu[f - g] \end{aligned} \tag{10}$$

eine *Entfernung* $D_\mu[f, g]$ für die Elemente $f, g \in \mathfrak{M}$ erklärt, die den Hausdorffschen Axiomen genügt [6]). Der hieraus fließende Konvergenzbegriff

$$D_\mu[f_n, f]_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

wird *asymptotische* Konvergenz oder *Maßkonvergenz* [7]) genannt und von uns mit

$$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mu}{\longrightarrow}} f, \qquad f = \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n \tag{11}$$

bezeichnet; eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$E\,[|f_n - f| > \varepsilon]_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mu}{\longrightarrow}} N \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0. \tag{12}$$

Durch (12) erklären wir (11) auch im Falle U. Der Vergleich mit (9) macht den Zusammenhang zwischen der Konvergenz bzw. Maßkonvergenz in $\mathfrak{B}$ einerseits und $\mathfrak{M}$ andererseits deutlich; dementsprechend gilt

Satz 5. *$\mathfrak{M}$ ist mit der Metrik D_ϱ ein vollständiger metrischer Raum, wenn ϱ eine beschränkte Maßfunktion ist. Aus $f_n \to f$ folgt $f_n \overset{\mu}{\to} f$; jede maßkonvergente Folge aus $\mathfrak{M}$ enthält eine (gegen dieselbe Grenzfunktion) konvergente Teilfolge. Der Begriff der Maßkonvergenz ist von der gewählten Maßfunktion μ unabhängig.*

Beweis. Die letzte Behauptung folgt aus Satz 4 und (12), die anderen sind bekannt [8]).

Aus $f_n \to f$ und $g_n \to g$ folgt natürlich $f_n g_n \to fg$ und $f_n + g_n \to f + g$, d. h. die Ringoperationen in $\mathfrak{M}$ verhalten sich stetig gegenüber der (gewöhnlichen) Konvergenz. Daß dies auch hinsichtlich der Maßkonvergenz und der ϱ-Metrik gilt, erkennt man mittels des oben benutzten Schlusses, daß eine Folge, von der jede Teilfolge eine gegen ein festes Element maßkonvergente Teilfolge enthält, selbst gegen dies Element maßkonvergent sein muß.

---

[6]) Vgl. Fréchet [6], § 16.

[7]) F. Rieß [23]; bei Kolmogoroff [11] „Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit".

[8]) Vgl. z. B. [23], [11].

Ist $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ eine Funktion von n komplexen Veränderlichen $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ und sind $f_1, \ldots, f_n$ Elemente von $\mathfrak{M}$, so ist $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ nicht ohne weiteres sinnvoll, wohl aber wenn φ ein Polynom in $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ ist. Hiervon ausgehend kann man durch wiederholte Grenzübergänge ein Element $f = \varphi(f_1, \ldots, f_n) \in \mathfrak{M}$ auch dann erklären, wenn φ eine beliebige Bairesche Funktion von $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ ist. Eine direkte Definition von f durch Angabe der charakteristischen Schar ist ebenfalls möglich; es kann nämlich der Beweis des Satzes 7 in [5], 377 auch unter der schwächeren Voraussetzung geführt werden, daß φ nicht halbstetig ist, sondern nur einer Baireschen Klasse angehört.

Eine Funktion $f \in \mathfrak{M}$ mit $f^2 = f$, die demnach nur die Werte Null und Eins annimmt und eine charakteristische Schar

$$E(\lambda) = E[f \leqq \lambda] = \begin{cases} N & \text{für } \lambda < 0, \\ A' & \text{für } 0 \leqq \lambda < 1, \\ E & \text{für } 1 \leqq \lambda \end{cases}$$

hat, wird als charakteristische Funktion oder *c-Funktion* von A bezeichnet: $f = \chi_A$. Für $A, B \in \mathfrak{B}$ gilt

(13) $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A+B} = (\chi_A - \chi_B)^2$, $\chi_{A \dotplus B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.

Falls $\mu E = 1$ ist [9]), ist

(14) $$\|A, B\|_u = D_\mu[\chi_A, \chi_B].$$

Definition 4. *Eine Funktion $f = f_1 + if_2 \in \mathfrak{M}$, für die $E_1(\lambda) = E[f_1 \leqq \lambda]$ und $E_2(\lambda) = E[f_2 \leqq \lambda]$ in $-\infty < \lambda < \infty$ stückweise konstant mit nur endlich vielen Sprungstellen sind, wird als endlichwertige Funktion bezeichnet. $\mathfrak{E}$ sei die Menge aller endlichwertigen Funktionen.*

$\mathfrak{E}$ ist der kleinste, alle c-Funktionen umfassende Z-Modul, wenn Z der komplexe Zahlkörper ist, und $\mathfrak{E}$ ist ein Ring.

Es sei $\mathfrak{M}^\infty$ die Menge der beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{M}$ und $D^\infty[f]$ die obere Grenze der Werte von $|f|$, $D^\infty[f, g] = D^\infty[f - g]$. $\mathfrak{M}^\infty$, die Menge der $f \in \mathfrak{M}$ mit $D^\infty[f] < \infty$, ist mit der „gleichmäßigen" Metrik $D^\infty[f, g]$ ein vollständiger metrischer Raum.

Satz 6. *$\mathfrak{E}$ liegt dicht in $\mathfrak{M}^\infty$.*

Beweis. Es sei $g = g_1 + ig_2 \in \mathfrak{M}^\infty$; $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Setzt man $\varphi(t) = \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{2t}{\varepsilon}\right]$, $f = \varphi(g_1) + i\,\varphi(g_2)$, so ist offenbar $f \in \mathfrak{E}$; man hat $|\varphi(t) - t| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, daher $|f - g| \leqq \varepsilon$.

[9]) Diese Normierung ist im Falle B keine wesentliche Einschränkung.

§ 3.

Die Räume $\mathfrak{M}^p$.

Ohne auf die verschiedenen Arten der Erklärung des Lebesgue-Radonschen Integrales einzugehen, erwähnen wir, daß im Falle B für $f_1 \in \mathfrak{M}_1$ das bestimmte Integral

$$\int_E f_1 \, d\mu \tag{15}$$

immer dann existiert, wenn das mit der „Verteilungsfunktion“

$$\sigma(\lambda) = \mu E\,[f_1 \leqq \lambda]$$

gebildete reelle Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\sigma(\lambda) \tag{16}$$

existiert, und daß der Wert von (15) durch (16) erklärt werden kann ([11], 235). Diese Festsetzung kann man auch im Falle U aufrechterhalten, wenn man

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \mu E\,[f_1 \leqq \lambda] & \text{für} \quad \lambda < 0 \\ -\mu E\,[f_1 > \lambda] & \text{für} \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

setzt (was auch im Falle B zulässig ist) und die Endlichkeit von $\sigma(\lambda)$ für $\lambda \neq 0$ fordert. Das Integral ist damit also durch die charakteristische Schar ausgedrückt. Für $f_1 \geqq 0$ soll außerdem (15) durch Zulassung des Wertes $+\infty$ stets einen Sinn erhalten. Für $f = f_1 + i f_2 \in \mathfrak{M}$ sei

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + i \int_E f_2 \, d\mu,$$

wenn die rechte Seite Sinn hat und endlich ist. Für $A \in \mathfrak{B}$ erklären wir wie üblich $\int_A f \, d\mu = \int_E \chi_A \, f \, d\mu$, wenn die rechte Seite Sinn hat. — Notwendig und hinreichend für die Existenz und Endlichkeit von $\int_E f \, d\mu$ ist die Endlichkeit von $\int_E |f| \, d\mu = \int_0^{\infty} \lambda \, d\nu(\lambda)$, wo $\nu(\lambda) = -\mu E\,[|f| > \lambda]$ ist. Es ist für $p > 0$

$$\int_E |f|^p \, d\mu = \int_0^{\infty} \lambda^p \, d\,\nu(\lambda). \tag{17}$$

Wird für $p \geqq 1$

$$D^p[f] = D_\mu^p[f] = \left[\int_E |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}, \quad D^p[f, g] = D^p[f - g]$$

gesetzt, so bilden die $f \in \mathfrak{M}$ mit $D^p[f] < \infty$ zufolge der Minkowskischen Ungleichung

$$D^p[f + g] \leqq D^p[f] + D^p[g]$$

einen linearen Raum $\mathfrak{M}^p$ mit der Metrik $D^p[f, g]$, durch die die „Konvergenz im Mittel" erklärt wird. Die Konvergenz im Mittel zieht die Maßkonvergenz derselben Folge nach sich ([1], 4). — Die Maßkonvergenz kann im Falle B auch aus einer durch das Integral definierten Metrik

18) $$D'[f, g] = D'_\mu[f - g] = \int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu$$

abgeleitet werden ([1], 9); man rechnet leicht nach, daß für $\mu E = 1$ $\frac{1}{2} D_\mu[f]^2 \leqq D'_\mu[f] \leqq 2\, D_\mu[f]$ ist.

Ist $1 \leqq p \leqq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt die Cauchy-Höldersche Ungleichung

19) $$D^1[f g] \leqq D^p[f]\, D^q[g].$$

Zufolge (19) erzeugt jedes $g \in \mathfrak{M}^q$ ein stetiges lineares Funktional $l(f)$ in $\mathfrak{M}^p$:

$$l(f) = \int_E f \bar{g}\, d\mu \quad \text{für} \quad f \in \mathfrak{M}^p;$$

insbesondere wird in $\mathfrak{M}^2$ durch $(f, g) = \int f \bar{g}\, d\mu$ ein inneres Produkt erklärt, das $\mathfrak{M}^2$ zu einem euklidischen Raume macht.

Ist $\mu E = 1$, so folgt aus (19) $D^1[f] \leqq D^p[f]$ und allgemein für $r < p$ $D^r[f] \leqq D^p[f]$; es ist daher im Falle B

20) $$\mathfrak{M}^r \supset \mathfrak{M}^p \quad \text{für} \quad r < p.$$

Jede beschränkte totaladditive Funktion νA auf $\mathfrak{B}$ ist das unbestimmte Integral einer Funktion $f \in \mathfrak{M}^1$: $\nu A = \int_A f d\mu$. Hieraus schließt man: Sämtliche Maßfunktionen ϱA auf $\mathfrak{B}$ werden erhalten, indem man, von einer beliebigen Maßfunktion μ ausgehend, $\varrho A = \int_A k d\mu$ oder kurz

21) $$d\varrho = k d\mu$$

gesetzt mit einer willkürlichen Funktion $k \geqq 0$ aus $\mathfrak{M}_1$, für die $E[k = 0] = N$ ist.

Für eine konvergente Folge $f_n \to f$, $f_n \geqq 0$ gilt der Satz von *Fatou*: Ist $\int_E f_n\, d\mu \leqq c < \infty$, so ist auch $\int_E f d\mu \leqq c$. Hiervon ausgehend, beweist man in bekannter Weise die *Vollständigkeit* von $\mathfrak{M}^p$ (Fischer-Rießscher Satz; vgl. z. B. [23]; [17], 111). $\mathfrak{M}^p$ ist danach ein Raum „vom Typus (B)" ([1], 53).

Ist $\mu E = 1$, so ist für $A, B \in \mathfrak{B}$

22) $$(\|A, B\|_\mu)^{\frac{1}{p}} = D^p[\chi_A, \chi_B].$$

Maßkonvergenz der Elemente von $\mathfrak{B}$ und Mittelkonvergenz ihrer c-Funktionen bedingen sich daher im Falle B gegenseitig.

Satz 7. *Wird für* $\omega > 0$

$$\varphi_\omega(z) = \begin{cases} z & \text{wenn } |z| \leqq \omega \\ \omega \frac{z}{|z|} & \text{wenn } |z| \geqq \omega \end{cases}$$

und $f_\omega = \varphi_\omega(f)$ *gesetzt, so gilt*

$$D[f, f_\omega] \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für} \quad f \in \mathfrak{M}, \tag{23}$$

$$D^p[f, f_\omega] \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für} \quad f \in \mathfrak{M}^p \qquad (1 \leqq p \leqq \infty). \tag{24}$$

Beweis. Aus Def. 3 (8) folgt zunächst für reelles und daraus auch für komplexes $f \in \mathfrak{M}$

$$E[|f| > \omega] \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} N. \tag{25}$$

Hieraus folgt (23), da $E[|f - f_\omega| > 0] = E[|f| > \omega]$ ist. — Ist $f \in \mathfrak{M}^p$, $1 \leqq p < \infty$, so ist

$$(D^p[f, f_\omega])^p = \int_E |f - f_\omega|^p \, d\mu = \int_{E[|f|>\omega]} (|f| - \omega)^p \, d\mu \leqq \int_{E[|f|>\omega]} |f|^p \, d\mu \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

da $|f|^p$ integrabel ist. — Für $f \in \mathfrak{M}^\infty$ und hinreichend großes ω ist $f_\omega = f$.

Satz 8. *Ist* $\mu E < \infty$ *und* $\mathfrak{X}$ *eine in* $\mathfrak{B}$ *dichte Unteralgebra von* $\mathfrak{B}$, *so liegt die Menge* $\mathfrak{E}_\mathfrak{X}$ *der endlichwertigen Funktionen* f *mit* $E[f \leqq \lambda] \in \mathfrak{X}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *dicht in* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$.

Beweis. In $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^p$ liegt nach Satz 7 $\mathfrak{M}^\infty$ dicht, in $\mathfrak{M}^\infty$ nach Satz 6 $\mathfrak{E}$ gleichmäßig dicht. Nach (22) lassen sich alle c-Funktionen durch diejenigen der $X \in \mathfrak{X}$ mit der Metrik D^p approximieren. Da die Addition in $\mathfrak{M}^p$ und Multiplikation mit Zahlen aus Z D^p-stetig ist, gilt Entsprechendes für die mit den c-Funktionen gebildeten Z-Moduln, d. h. für $\mathfrak{E}_\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{E}$: $\mathfrak{E}_\mathfrak{X}$ liegt D^p-dicht in $\mathfrak{E}$, daher in $\mathfrak{M}^\infty$ und in $\mathfrak{M}^p$, daher auch D_μ-dicht in $\mathfrak{M}^\infty$ und in $\mathfrak{M}$.

Satz 9. $\mathfrak{M}$ *sowie* $\mathfrak{M}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ *ist dann und nur dann separabel wenn* $\mathfrak{B}$ *es ist.*

Beweis. Es liege zunächst Fall B vor. $\mathfrak{B}$ sei separabel, $\mathfrak{S}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{X}$ sei der (ebenfalls abzählbare) durch Anwendung der Ringoperationen aus $\mathfrak{S}$ und dem Element E gebildete Unterring von $\mathfrak{B}$. Kombiniert man die c-Funktionen der $X \in \mathfrak{X}$ linear mit Koeffizienten aus einem in Z dichten abzählbaren Zahlkörper, so erhält man abzählbar viele endlichwertige Funktionen, die in $\mathfrak{E}_\mathfrak{X}$ (vgl. Satz 8) und daher in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^p$ dicht liegen, also sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^p$ separabel. Ist umgekehrt $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}^p$ separabel, dann ist es auch die von den c-Funktionen gebildete Teilmenge, also nach (14) und (22) auch $\mathfrak{B}$. — Für Fall U berufen wir uns darauf, daß

die Räume $\mathfrak{M}_\mu^p$, $\mathfrak{M}_\varrho^p$ für verschiedene Maßfunktionen μ, ϱ sich linear und isometrisch aufeinander abbilden lassen: es ist ja nach (21) $d\mu = k d\varrho$, und

$$f \in \mathfrak{M}_\mu^p \longleftrightarrow f^* = f \cdot k^{\frac{1}{p}} \in \mathfrak{M}_\varrho^p$$

ist die gewünschte Abbildung, die offenbar die Separabilität erhält.

Der Raum $\mathfrak{M}^2$ ist, wie erwähnt, ein vollständiger komplexer euklidischer Raum (vgl. Löwig [15]; Rellich [22]). Er ist offenbar n-dimensional, wenn $\mathfrak{B}$ endlich ist und 2^n Elemente [10]) enthält; Hilbertsch, wenn $\mathfrak{B}$ unendlich und separabel ist; sonst nichtseparabel. Ist $f \in \mathfrak{M}^\infty$, $g \in \mathfrak{M}^p$, so ist $fg \in \mathfrak{M}^p$; daher ist die Multiplikation mit einem festen $f \in \mathfrak{M}^\infty$ innerhalb $\mathfrak{M}^2$ eine lineare Transformation F:

$$Fg = fg,$$

die sofort als beschränkter normaler Operator (v. Neumann [18]) zu erkennen ist. Diese Operatoren bilden einen kommutativen algebraischen Ring $\mathfrak{M}^\infty$. Es zeigt sich, daß starke Operatorkonvergenz $F_n \to F$ in $\mathfrak{M}^\infty$ gleichbedeutend ist mit: $f_n \to f$, $|f_n| \leqq$ const. Dies erkennt man durch Anwendung der Operatoren auf passende endlichwertige Funktionen. Folglich ist $\mathfrak{M}^\infty$ stark abgeschlossen; da in $\mathfrak{M}^\infty$ mit F auch der Adjungierte F^* vorkommt (er wird durch die Funktion $\bar{f}$ erzeugt), ist $\mathfrak{M}^\infty$ ein abelscher Ring im Sinne von [18], Def. 1. Die reellen $f \in \mathfrak{M}^\infty$ liefern die selbstadjungierten $F \in \mathfrak{M}^\infty$, die c-Funktionen die Projektoren. Das Spektrum von F ist identisch mit dem Wertebereich der Funktion f; die charakteristische Schar $E(\lambda)$ einer reellen Funktion $f_1 \in \mathfrak{M}^\infty$ liefert durch ihre c-Funktionen die Spektralschar oder Zerlegung der Einheit von F_1 (vgl. S. 383, insbesondere Anm. [4])) und Entsprechendes gilt für die komplexe charakteristische Schar einer komplexen Funktion $f \in \mathfrak{M}^\infty$. Den f mit $|f| = 1$ entsprechen die unitären F; $\mathfrak{D}^\infty$ $[f]$ ist die genaue Schranke von F. Man erkennt unschwer $\mathfrak{M}^{\infty\prime} = \mathfrak{M}^\infty$ [18], Def. 3), d. h. $\mathfrak{M}^\infty$ läßt sich als abelscher Ring beschränkter Operatoren in $\mathfrak{M}^2$ nicht erweitern.

Die Zahl $\int_E f d\mu$ kann als „Spur" des Operators F, und $\mu A = \int_E \chi_A d\mu$, die Spur eines Projektors P, als „Dimension" des Eigenraumes von P gedeutet werden; vgl. die Theorie der Operatorenringe von Murray und v. Neumann [16], insbesondere I, ch. XV). Die Analogie mit dieser Theorie erstreckt sich noch weiter ([16], I, ch. XVI; II, ch. IV), wie hier kurz angedeutet sei:

Erweitert man $\mathfrak{M}^\infty$ durch Hinzunahme aller normalen Operatoren, deren komplexe Zerlegung der Einheit zu $\mathfrak{M}^\infty$ gehört, so erhält man einen Bereich $\mathfrak{N}$ von unbeschränkten Operatoren Q, und zwar sind die Q definiert durch

$$Qf = qf, \quad \text{wenn} \quad f \in \mathfrak{M}^2, \quad qf \in \mathfrak{M}^2 \quad (q \in \mathfrak{M} \text{ fest}),$$

[10]) Vgl. [12], 133.

so daß die Operatoren in $\mathfrak{M}$ den Funktionen in $\mathfrak{M}$ eineindeutig entsprechen. Die Spektralscharen der $Q \in \mathfrak{M}$ werden von den charakteristischen Scharen der $q \in \mathfrak{M}$ erzeugt. Erklärt man algebraische Operationen in $\mathfrak{M}$ ähnlich wie sie in [16], I, theor. XV für die $X \in U(\boldsymbol{M})$ definiert sind, so wird $\mathfrak{M}$ ein zu $\mathfrak{M}$ isomorpher Ring.

Kapitel II.

Verallgemeinerte fastperiodische Funktionen.

§ 4.

Fastperiodische Punktmengen.

Wir können nur wenige wesentlich verschiedene, d. h. nicht isomorphe Beispiele von Σ-Systemen mit unendlich vielen Elementen angeben. Die Frage, welche Realisationen der Def. 1 es sonst noch gibt, lassen wir offen[10a]).

1. E sei die Menge der natürlichen Zahlen, deren jede mit einem positiven endlichen Maß belegt ist; $\mathfrak{B}$ wird von den sämtlichen Teilmengen von E gebildet (vgl. Satz 3). $\mathfrak{B}$ ist separabel.

2. $\mathfrak{B}$ besteht aus den L-meßbaren Teilmengen eines linearen Intervalles „bis auf Nullmengen", also aus Äquivalenzklassen; μ ist das Lebesguesche Maß. $\mathfrak{B}$ enthält keine unzerlegbaren Elemente (vgl. S. 380) und ist separabel, gestattet eine Darstellung durch einen (nach Satz 3 nicht Borelschen) Körper von Mengen, die jeweils aus der betreffenden Äquivalenzklasse entnommen sind (v. Neumann [19]). Zahlreiche andere Beispiele sind hierzu isomorph, was durch das „Übertragungsprinzip" (Rieß [24], 497; Jessen [9], § 7) ausgedrückt wird; auch Maßtheorien in unendlichdimensionalen Räumen fallen hierunter ([11], 24ff; [9]).

3. Ein Σ-System der unter 2. genannten Art kann mit einem der ersten Art oder mit einem endlichen in naheliegender Weise kombiniert werden. Beispiel: Stieltjes-Integrale mit unstetiger Belegungsfunktion. Auch diese Systeme sind separabel.

4. Das jetzt zu konstruierende (nicht separable) System $\mathfrak{B}$ wird aus Klassen von L-meßbaren[11]) Punktmengen der reellen Achse bestehen.

10a) Bei der Korrektur bemerke ich, daß in einer Arbeit von Y. Mizoguti, Japan. Journ. of Math. **15** (1938), S. 27 — 50, die Konstruktion von Σ-Systemen beliebig hoher Mächtigkeit enthalten ist.

11) Es wäre ohne weiteres möglich, ohne die Voraussetzung der L-Meßbarkeit auszukommen, indem man in der unten folgenden Definition von $\underline{\mu}\,\mathfrak{a}$ und $\overline{\mu}\,\mathfrak{a}$ m durch $\underline{m}$ bzw. $\overline{m}$ (das innere und äußere Maß) ersetzt. Jedoch hätte diese Erweiterung keinen Einfluß auf die Struktur des zu konstruierenden Σ-Systems (Def. 5). Wir beschränken uns daher auf meßbare Mengen und Funktionen, um in Übereinstimmung mit den bekannten Definitionen zu bleiben.

$\mathfrak{L}$ sei die Gesamtheit aller (nicht notwendig beschränkten) L-meßbaren Mengen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ auf der reellen Zahlenachse $\mathfrak{e}$; die leere Menge wird mit 0 bezeichnet. $\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$ sei die Vereinigungsmenge, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ der Durchschnitt, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ die Summe mod 2 von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{e}$. Mit $\sum_{\alpha} \dot{+}\, \mathfrak{a}_\alpha$, $\prod_{\alpha} \mathfrak{a}_\alpha$ werden Vereinigung und Durchschnitt endlich oder abzählbar vieler Mengen von $\mathfrak{L}$ bezeichnet. $m\mathfrak{a}$ sei das L-Maß von $\mathfrak{a}$. Wir schreiben, wie üblich, den Mengen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}$ eine obere Dichte $\overline{\mu}\mathfrak{a}$ und eine untere Dichte $\underline{\mu}\mathfrak{a}$ zu:

$$(26) \qquad \overline{\mu}\,\mathfrak{a} = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{m(\mathfrak{a}(-T, T))}{2T}, \qquad \underline{\mu}\,\mathfrak{a} = \underline{\lim_{T \to \infty}} \frac{m(\mathfrak{a}(-T, T))}{2T},$$

und definieren die Dichte durch $\mu\mathfrak{a} = \overline{\mu}\mathfrak{a}$, falls $\overline{\mu}\mathfrak{a} = \underline{\mu}\mathfrak{a}$ ist. Offenbar gilt

$$(27) \qquad 0 \leqq \overline{\mu}\mathfrak{a}; \text{ aus } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \text{ folgt } \overline{\mu}\mathfrak{a} \leqq \overline{\mu}\mathfrak{b}; \quad \overline{\mu}(\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}) \leqq \overline{\mu}\mathfrak{a} + \overline{\mu}\mathfrak{b};$$

ferner ist $\mu(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mu\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$, wenn $\mu\mathfrak{a}$ und $\mu\mathfrak{b}$ sinnvoll und $\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 0$ ist[12]). Die Mengen $\mathfrak{n}$ mit $\overline{\mu}\mathfrak{n} = 0$ (also $\mu\mathfrak{n} = 0$) bilden zufolge (27) ein Ideal $\mathfrak{N}$ in dem Booleschen Ring $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ sei der Restklassenring nach diesem Ideal, also das System der L-meßbaren Mengen „bis auf Mengen der Dichte Null". In $\mathfrak{L}^*$ sind die Operationen $\sum_1^n$, $\sum_1^n \dot{+}$ und $\prod_1^n$ sinnvoll, nicht aber $\sum_1^\infty \dot{+}$, da $\mathfrak{N}$ offenbar kein σ-Körper ist. Die $\mathfrak{a}$ enthaltende Restklasse nach $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}^*$. Aus $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^*$ folgt $\overline{\mu}\mathfrak{a} = \overline{\mu}\mathfrak{b}$; $\overline{\mu}$ ist also in $\mathfrak{L}^*$ durch $\overline{\mu}\mathfrak{a}^* = \overline{\mu}\mathfrak{a}$ erklärbar. $\overline{\mu}(\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}^*)$ ist dann zufolge (27) eine im Raum $\mathfrak{L}^*$ erklärte Entfernung im Hausdorffschen Sinne. Wir verwenden dementsprechend in $\mathfrak{L}^*$ die Bezeichnungen $\overline{\mu}$-Konvergenz, $\overline{\mu}$-Stetigkeit usw. $\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}^*$ und $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*$ sind in $\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{b}^*$ $\overline{\mu}$-stetig.

Satz 10. *Der Raum $\mathfrak{L}^*$ ist vollständig.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots$ mit $\overline{\mu}(\mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}_m) \underset{n, m \to \infty}{\longrightarrow} 0$ gegeben; zu zeigen ist die Existenz von $\mathfrak{b} \in \mathfrak{L}$ mit $\overline{\mu}(\mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Es ist dabei erlaubt, uns auf eine Teilfolge $\mathfrak{c}_n$ der $\mathfrak{b}_n$ zu beschränken. Diese wählen wir so, daß

$$(28) \qquad \overline{\mu}(\mathfrak{c}_n + \mathfrak{c}_m) < 2^{-n} \quad \text{für } m > n \geqq 1$$

ist und setzen $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{c}_n + \mathfrak{c}_{n+1}$ $(n > 0)$; es ist also $\mathfrak{c}_{n+1} = \mathfrak{a}_0 + \ldots + \mathfrak{a}_n$. Da nach (28) $\overline{\mu}\mathfrak{a}_n < 2^{-n}$ $(n > 0)$ ist, gibt es ein $\xi_n > 0$, so daß

$$(29) \qquad \frac{1}{2T} m(\mathfrak{a}_n(-T, T)) \leqq 2^{-n} \text{ für } T > \xi_n$$

ist, und man kann außerdem $\xi_{n-1} < \xi_n$, $\xi_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, $\xi_0 = 0$ fordern. Nun sei

$$\mathfrak{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{+}\, ((-\xi_n, -\xi_{n-1}) + (\xi_{n-1}, \xi_n))\, \mathfrak{c}_n.$$

[12]) μ ist hiernach ein „Inhalt" (aber kein „Maß"), vgl. Jessen [10], 76f.

Es sei $k > 0$, ganz; $T > \xi_k$; r sei bestimmt durch $\xi_r < T \leqq \xi_{r+1}$; es ist[13])

$$
\begin{aligned}
(-T, T)\,\mathfrak{b} &= (-\xi_1, \xi_1)\,\mathfrak{c}_1 + \big((-\xi_2, -\xi_1) + (\xi_1, \xi_2)\big)\,\mathfrak{c}_2 + \dots \\
&\quad + \big((-T, -\xi_r) + (\xi_r, T)\big)\,\mathfrak{c}_{r+1} \\
&= (-T, T)\,\mathfrak{a}_0 + \big((-T, -\xi_1) + (\xi_1, T)\big)\,\mathfrak{a}_1 + \dots \\
&\quad + \big((-T, -\xi_{k-1}) + (\xi_{k-1}, T)\big)\,\mathfrak{a}_{k-1} \\
&\quad + \big((-T, -\xi_k) + (\xi_k, T)\big)\,\mathfrak{a}_k + \dots \\
&\quad + \big((-T, -\xi_r) + (\xi_r, T)\big)\,\mathfrak{a}_r;
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
(-T, T)\,\mathfrak{c}_k = (-T, T)\,\mathfrak{a}_0 + (-T, T)\,\mathfrak{a}_1 + \dots + (-T, T)\,\mathfrak{a}_{k-1}. \tag{31}
$$

Addition mod 2 von (30) und (31) ergibt

$$
\begin{aligned}
(-T, T)\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}_k) &= (-\xi_1, \xi_1)\,\mathfrak{a}_1 + \dots + (-\xi_r, \xi_r)\,\mathfrak{a}_r + \big((-T, -\xi_k) \\
&\quad + (\xi_k, T)\big)\,\mathfrak{a}_k + \dots + \big((-T, -\xi_r) + (\xi_r, T)\big)\,\mathfrak{a}_r \\
&\subset \sum_{n=1}^{k-1} \dot{+}\, (-\xi_n, \xi_n)\,\mathfrak{a}_n \dot{+} \sum_{n=k}^{r} \dot{+}\, (-T, T)\,\mathfrak{a}_n.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt nach (29)

$$
m\big((-T, T)\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}_k)\big) \leqq \sum_{n=1}^{k-1} 2\,\xi_n + \sum_{n=k}^{r} 2^{-n} \cdot 2\,T < 2 \sum_{n=1}^{k-1} \xi_n + 2\,T \cdot 2^{1-k},
$$

$$
\frac{1}{2\,T}\, m\big((-T, T)\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}_k)\big) < \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{k-1} \xi_n + 2^{1-k};
$$

$T \to \infty$ ergibt $\bar{\mu}\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}_k) \leqq 2^{1-k}$, $\bar{\mu}\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, w. z. b. w.

Definition 5. *Die Punktmengen* $\mathfrak{p}$ *der Gestalt*

$$
\mathfrak{p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{+}\, (\alpha + n\omega,\ \beta + n\omega) \qquad (\alpha < \beta < \alpha + \omega)
$$

werden als $\mathfrak{P}$*-Mengen bezeichnet.* $\mathfrak{R}$ *sei der kleinste, alle* $\mathfrak{P}$*-Mengen enthaltende Mengenkörper,* $\mathfrak{R}^*$ *die Menge der Äquivalenzklassen* $\mathfrak{k}^*$ *mit* $\mathfrak{k} \in \mathfrak{R}$. $\mathfrak{B}$ *sei die abgeschlossene Hülle*[14]) *von* $\mathfrak{R}^*$ *in* $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{A}$ *die Menge der* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{L}$ *mit* $\mathfrak{q}^* \in \mathfrak{B}$; *die Mengen aus* $\mathfrak{A}$ *heißen fastperiodische Punktmengen.*

Satz 11. *Für die fastperiodischen Punktmengen* $\mathfrak{q}$ *existiert die Dichte* $\mu\mathfrak{q}$.

Beweis. Die Existenz von $\mu\mathfrak{q}$ ist gleichbedeutend mit der Existenz des Mittelwertes ([2], 274) der c-Funktion von $\mathfrak{q}$. Die c-Funktionen der $\mathfrak{P}$-Mengen sind periodisch, meßbar und beschränkt, daher fastperiodisch nach Stepanoff ([4], § 9). Die c-Funktionen der Mengen aus $\mathfrak{R}$ entstehen aus ihnen durch Ringoperationen (vgl. (13)), sind daher ebenfalls vom Stepanoffschen Typus.

[13]) Bis auf endlich viele Punkte, die wir vernachlässigen.

[14]) Hinsichtlich der $\bar{\mu}$-Metrik.

Denn da zwei solche Funktionen stets eine relativ dichte Menge gemeinsamer
-Verschiebungszahlen haben ([4], § 2), kann man eine solche Menge auch für
Summe und (wenn sie beschränkt sind) Produkt angeben. Daher existiert
ür sie stets der Mittelwert ([4], 245), d. h. $\mu\mathfrak{k}$ für $\mathfrak{k} \in \mathfrak{K}$. Wegen der $\overline{\mu}$-Stetigkeit
von $\overline{\mu}\mathfrak{a}$ und $\underline{\mu}\mathfrak{a}$ existiert dann auch $\mu\mathfrak{q}$ für jedes $\mathfrak{q} = \overline{\underline{\mu}}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{k}_n$ ($\mathfrak{k}_n \in \mathfrak{K}$),
also für $\mathfrak{q} \in \mathfrak{A}$, w. z. b. w.

Satz 12. *$\mathfrak{B}$ ist ein Σ-System mit der Maßfunktion μ, und zwar das kleinste $\mathfrak{K}^*$ enthaltende.*

Beweis. $\mathfrak{K}^*$ ist eine Boolesche Algebra, und da die Ringoperationen
$\overline{\mu}$-stetig sind, gilt dasselbe von der abgeschlossenen Hülle $\mathfrak{B}$. Einselement
ist $\mathfrak{e}^*$, Nullelement 0^*. μ ist auf $\mathfrak{A}$, also auf $\mathfrak{B}$ definiert und additiv (S. 391);
1), (3), (4) in Def. 1 sind offenbar erfüllt. Zu zeigen bleibt nun noch: Sind
$\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2^*, \ldots \in \mathfrak{B}$ und ist $\mathfrak{a}_i^* \mathfrak{a}_k^* = 0^*$ $(i \neq k)$, so gibt es ein $\mathfrak{a}^* \in \mathfrak{B}$ mit
$\mathfrak{a}_n^* \subset \mathfrak{a}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\mu\mathfrak{a}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\mathfrak{a}_n^*$, so daß aus $\mathfrak{b}^* \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{a}_n^* \subset \mathfrak{b}^*$ $(n = 1,$
$2, \ldots)$ folgt: $\mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{b}^*$. Es sei $\mathfrak{b}_n^* = \sum_{k=1}^{n} \dot{+}\, \mathfrak{a}_k^*$; dann ist $\sum_{k=1}^{n} \mu\mathfrak{a}_k^* = \mu\mathfrak{b}_n^*$
$\leqq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu\mathfrak{a}_k^*$ konvergent; für $m > n$ ist $\mu(\mathfrak{b}_m^* + \mathfrak{b}_n^*) = \mu \sum_{k=n+1}^{m} \dot{+}\, \mathfrak{a}_k^*$
$= \sum_{k=n+1}^{m} \mu\mathfrak{a}_k^* \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$; es gibt also, da $\mathfrak{B}$ nach Konstruktion $\overline{\mu}$-vollständig
ist, ein $\mathfrak{a}^* \in \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{b}_n^* \underset{n\to\infty}{\overset{\overline{u}}{\longrightarrow}} \mathfrak{a}^*$. Hieraus folgt $\mu\mathfrak{b}_n^* \to \mu\mathfrak{a}^*$, d. h. $\mu\mathfrak{a}^* = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\mathfrak{a}_k^*$.
Für $n > k$ ist $\mathfrak{a}_k^* \subset \mathfrak{b}_n^*$, d. h. $\mathfrak{a}_k^* \mathfrak{b}_n^* = \mathfrak{a}_k^*$; $n \to \infty$ gibt $\mathfrak{a}_k^* \mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_k^*$, $\mathfrak{a}_k^* \subset \mathfrak{a}^*$.
Ist $\mathfrak{a}_k^* \subset \mathfrak{b}^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so folgt $\mathfrak{b}_n^* \subset \mathfrak{b}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und durch $n \to \infty$
analog wie oben $\mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{b}^*$. Damit sind alle Bedingungen der Def. 1 für $\mathfrak{B}$
verifiziert. — Da ein Σ-System stets μ-vollständig ist (S. 381), muß es mit $\mathfrak{K}^*$
auch seine $\overline{\mu}$-abgeschlossene Hülle, also $\mathfrak{B}$, enthalten, w. z. b. w.

Diese Vervollständigung einer Booleschen Algebra mit additiver positiver
Funktion läßt sich auch abstrakt durchführen[15]). Das von Kolmogoroff oder
Jessen angegebene Erweiterungsverfahren (vgl. S. 383) ist dagegen auf $\mathfrak{K}$
und μ nicht anwendbar, da notwendige Bedingungen (Stetigkeitsaxiom, Total-
additivität) nicht erfüllt sind.

Daß das angegebene Σ-System von den vorher genannten wesentlich ver-
schieden ist, wird daraus folgen, daß es nicht separabel ist; diese Tatsache, die
auch hier leicht zu beweisen wäre, wird sich später (S. 401) ergeben. Man kann
sich auch überzeugen, daß $\mathfrak{B}$ kein unzerlegbares Element enthält (siehe S. 402).

---

[15]) Vgl. M. H. Mac Neille, Extensions of measure, Proc. Nat. Acad. sci. USA. 24 (1938), S. 188—193.

§ 5.

$\mathfrak{F}$-Funktionen.

Um die allgemeine Theorie des Kap. I, angewandt auf das Beispiel 4 d$^{\circ}$ § 4, in konkrete Aussagen über Funktionen einer reellen Veränderlichen zu übersetzen, ordnen wir den (abstrakten) meßbaren Funktionen auf $\mathfrak{B}$ Klassen von Funktionen $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ zu.

Definition 6. *$\mathfrak{F}$ sei die Menge der für reelle x bis auf eine Menge der Dichte Null definierten Funktionen $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, so daß für alle bis auf abzählbar viele (kurz: für fast alle) reellen λ $\mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \lambda] \in \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{e}[f_2(x) \leqq \lambda] \in \mathfrak{A}$ ist, und die außerdem „asymptotisch beschränkt" sind* (vgl. [14], 4), *d. h. für die*

$$\overline{\mu}\,\mathfrak{e}\,[|f(x)| > \omega] \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{32}$$

gilt. Die Funktionen aus $\mathfrak{F}$ heißen $\mathfrak{F}$-Funktionen. Für meßbare, endliche $f(x)$, $g(x)$ sei $\bar{D}_\mu[f]$ die untere Grenze aller $\alpha > 0$ mit $\overline{\mu}\,\mathfrak{e}[|f(x)| > \alpha] \leqq \alpha$; $\bar{D}_\mu[f, g] = \bar{D}_\mu[f - g]$. Zwei Funktionen $f, g \in \mathfrak{F}$ sollen äquivalent heißen, wenn $D_\mu[f, g] = 0$ ist; f^* sei die Äquivalenzklasse von f. $\mathfrak{F}^*$ sei die Menge aller Klassen f^* mit $f \in \mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_1^*$ enthalte die reellwertigen Funktionen aus $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}^*$.

Satz 13. *$\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}$ sei der Bereich der reellen bzw. komplexen meßbaren Funktionen über dem in Satz 12 genannten Σ-System $\mathfrak{B}$ (mit Elementen $\mathfrak{e}^*, \mathfrak{a}^*, \ldots$). Es besteht eine zwischen $\mathfrak{F}^*$ und $\mathfrak{M}$ eineindeutige Zuordnung, die jedem $f(x) = f_1(x) + i f_2(x) \in \mathfrak{F}$ ein $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2 \in \mathfrak{M}$ zuordnet vermöge*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \lambda]^* &= \mathfrak{e}^*[\tilde{f}_1 \leqq \lambda] \\ \mathfrak{e}[f_2(x) \leqq \lambda]^* &= \mathfrak{e}^*[\tilde{f}_2 \leqq \lambda] \end{aligned}\right\} \text{ für fast alle } \lambda. \tag{33}$$

$\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ sind algebraische Ringe, die genannte Zuordnung zwischen $\mathfrak{F}^*$ und $\mathfrak{M}$ ist ein algebraischer Isomorphismus. Aus $f \in \mathfrak{F}$, $\bar{D}_\mu[f, g] = 0$ folgt $g \in \mathfrak{F}$. Für $f \in \mathfrak{F}$ ist $\bar{D}_\mu[f] = D_\mu[\tilde{f}]$.

Beweis. Wir zerlegen den Beweis in folgende Schritte:

I. Zu jedem $f_1 \in \mathfrak{F}_1$ gibt es genau ein $\tilde{f}_1 \in \mathfrak{M}_1$ mit (33).

II. Zu jedem $u_1 \in \mathfrak{M}_1$ gibt es ein $f_1 \in \mathfrak{F}_1$ mit $u_1 = \tilde{f}_1$.

III. Ist $f_1(x) \in \mathfrak{F}_1$, $g_1(x)$ reell, $\bar{D}_\mu[f_1, g_1] = 0$, so ist $g_1 \in \mathfrak{F}_1$, $\tilde{g}_1 = \tilde{f}_1$.

IV. Für $f_1 \in \mathfrak{F}_1$ ist $\bar{D}_\mu[f_1] = D_\mu[\tilde{f}_1]$.

V. Für $f_1, g_1 \in \mathfrak{F}_1$ ist $f_1 + g_1 \in \mathfrak{F}_1$, $\widetilde{f_1 + g_1} = \tilde{f}_1 + \tilde{g}_1$.

VI. Für $f_1, g_1 \in \mathfrak{F}_1$ ist $f_1 g_1 \in \mathfrak{F}_1$, $\widetilde{f_1 g_1} = \tilde{f}_1 \tilde{g}_1$.

VII. Die Aussagen I bis VI gelten auch im Komplexen (also ohne den Index 1).

Nach I (und VII) ist dann eine Zuordnung $\mathfrak{F} \to \mathfrak{M}$ erklärt, deren Bildbereich nach II genau $\mathfrak{M}$ ist. Nach III und IV ergibt sich eine eineindeutige Zuordnung zwischen $\mathfrak{F}^*$ und $\mathfrak{M}$, die nach V und VI ein Ringisomorphismus ist. Die weiteren Behauptungen sind in IV bis VI enthalten.

I. Zu jedem $f_1(x) \in \mathfrak{F}_1$ wird durch (33) eine charakteristische Schar (Def. 3) definiert, denn die Monotonie ist klar, die Rechtsstetigkeit läßt sich durch Abänderung an abzählbar vielen Stellen erzwingen, die Vollständigkeit folgt aus (32).

II. $u_1 \in \mathfrak{M}_1$ ist gegeben durch seine charakteristische Schar $\mathfrak{e}^*[u_1 \leqq \lambda] = \mathfrak{e}^*(\lambda)$. Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine dichte Folge reeller Zahlen; wir wählen sukzessive Mengen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ aus $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{e}_n^* = \mathfrak{e}^*(\lambda_n)$ mit der Bedingung, daß aus $\lambda_n < \lambda_m$ bzw. $\lambda_n > \lambda_m$ für $m < n$ stets $\mathfrak{e}_n \subset \mathfrak{e}_m$ bzw. $\mathfrak{e}_n \supset \mathfrak{e}_m$ folgen soll. Dies ist möglich, denn für jedes $\mathfrak{e}_n$ sind nur $n - 1$ Ungleichungen zu befriedigen, die bis auf Mengen der Dichte Null ohnehin gelten. Dann gibt es nach [5], 371 genau eine reelle Funktion $f_1(x)$ mit

$$\mathfrak{e}[f_1(x) < \lambda_n] \subset \mathfrak{e}_n \subset \mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \lambda_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{34}$$

freilich wird auf der Menge $\mathfrak{n} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{e}_n \dotplus \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{e}_n'$ $f_1(x) = \pm\infty$, aber es ist (zufolge (8), Def. 3) $\mu\mathfrak{n} = 0$, und wir können $f_1(x)$ auf $\mathfrak{n}$ undefiniert lassen. Aus (25) folgt (32). Aus (34) folgt nun leicht für alle Stetigkeitsstellen von $\mathfrak{e}^*(\lambda)$, also für fast alle λ, $\mathfrak{e}^*(\lambda) = \mathfrak{e}[f_1(x) < \lambda]^* = \mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \lambda]^*$, also $f_1 \in \mathfrak{F}_1, u_1 = \tilde{f}_1$. Insbesondere kann man, wenn u_1 endlichwertig ist, eine im eigentlichen Sinne endlichwertige Funktion $f_1(x)$ mit $\tilde{f}_1 = u_1$ finden, indem man für die Unstetigkeitsstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{e}^*[u_1 \leqq \lambda]$ die Beziehung $\mathfrak{e}[f_1 = \alpha_\nu]^* = \mathfrak{e}^*[u_1 = \alpha_\nu]$ und außerdem $\sum_\nu \dotplus \mathfrak{e}[f_1(x) = \alpha_\nu] = \mathfrak{e}$ befriedigt.

III. Es sei $f_1(x) \in \mathfrak{F}_1$, $\overline{D}_\mu[f_1 - g_1] = 0$, $g_1(x)$ reell; zu zeigen ist, daß für fast alle λ $\mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \lambda]^* = \mathfrak{e}[g_1(x) \leqq \lambda]^*$ ist. Es sei im Gegenteil

$$\overline{\mu}(\mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \alpha] + \mathfrak{e}[g_1(x) \leqq \alpha]) > 0 \tag{35}$$

für nichtabzählbar viele α; wir wählen α als Stetigkeitsstelle von $\mathfrak{e}^*[\tilde{f}_1 \leqq \lambda]$ bzw. $\mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \lambda]^*$. Es ist nach (35) entweder

$$\overline{\mu}\mathfrak{e}[f_1(x) \leqq \alpha < g_1(x)] > 0 \quad \text{oder} \quad \overline{\mu}\mathfrak{e}[g_1(x) \leqq \alpha < f_1(x)] > 0;$$

o. B. d. A. sei $\bar{\mu}\mathfrak{e}\,[g_1 \leqq \alpha < f_1] = \beta > 0$ und daher wegen der verlangten Stetigkeit auch für hinreichend kleines $\delta > 0$ $\bar{\mu}\mathfrak{e}\,[g_1 \leqq \alpha;\ \alpha + \delta < f_1] \geqq \frac{\beta}{2}$. Es folgt

$$\bar{\mu}\mathfrak{e}\,[|f_1 - g_1| > \delta] \geqq \bar{\mu}\mathfrak{e}\,[f_1 - g_1 > \delta] \geqq \frac{\beta}{2}$$

und hieraus $\bar{D}_\mu\,[f_1, g_1] \geqq \operatorname{Min}\left(\delta, \frac{\beta}{2}\right) > 0$ (Widerspruch).

IV. Offenbar ist $D_\mu\,[\tilde{f}]$ die untere Grenze der α mit $\mu\mathfrak{e}^*\,[|\tilde{f}| > \alpha] < \alpha$. Da für fast alle λ $\mathfrak{e}^*\,[\tilde{f} \leqq \lambda] = \mathfrak{e}\,[f(x) \leqq \lambda]^*$ ist, stimmen auch die monotonen Funktionen $\mu\mathfrak{e}^*\,[|\tilde{f}| > \alpha] - \alpha$ und $\bar{\mu}\mathfrak{e}\,[|f(x)| > \alpha] - \alpha$ für fast alle α überein, und die Grenze zwischen positiven und negativen Funktionswerten ist bei beiden dieselbe.

V. Es seien $f_1(x)$, $g_1(x) \in \mathfrak{F}_1$. Ist zunächst $g_1(x) = aq(x)$, wo $q(x)$ die charakteristische Funktion einer Menge $\mathfrak{q} \in \mathfrak{F}$ ist, und ist etwa $a > 0$, so ist

$$\mathfrak{e}\,[(f_1(x) + g_1(x)) < \lambda] = \mathfrak{e}\,[f_1(x) < \lambda] + \mathfrak{q}\mathfrak{e}\,[\lambda - a \leqq f_1(x) < \lambda],$$

und beim Übergang zu Äquivalenzklassen entsteht rechts die charakteristische Schar von $\tilde{f}_1 + \widetilde{aq} = \tilde{f}_1 + \tilde{g}_1$, womit die Behauptung für diesen Fall bewiesen ist. Durch wiederholte Anwendung überträgt sich der Schluß auf alle endlichwertigen $g_1(x) \in \mathfrak{F}_1$. Ist endlich $g_1(x) \in \mathfrak{F}_1$ beliebig, so sei (nach II) $h_1(x) \in \mathfrak{F}_1$ gewählt mit $\tilde{h}_1 = \tilde{f}_1 + \tilde{g}_1$ und $g_0(x) \in \mathfrak{F}_1$ endlichwertig (siehe oben) mit $D_\mu\,[\tilde{g}_1, \tilde{g}_0] < \frac{\varepsilon}{2}$ (Satz 8). Dann ist

$$\begin{aligned}\bar{D}_\mu\,[h_1(x), f_1(x) + g_1(x)] &\leqq \bar{D}_\mu\,[h_1, f_1 + g_0] + \bar{D}_\mu\,[g_1, g_0] \\ &= D_\mu\,[\tilde{h}_1, \widetilde{f_1 + g_0}] + D_\mu\,[\tilde{g}_1, \tilde{g}_0] = D_\mu\,[\tilde{f}_1 + \tilde{g}_1, \tilde{f}_1 + \tilde{g}_0] + D_\mu\,[\tilde{g}_1, \tilde{g}_0] \\ &= 2\,D_\mu\,[\tilde{g}_1, \tilde{g}_0] < \varepsilon,\end{aligned}$$

daher $\bar{D}_\mu\,[h_1, f_1 + g_1] = 0$; daraus nach III die Behauptung.

VI. Wir wählen endlichwertige $f_{1n}(x)$, $g_{1n}(x) \in \mathfrak{F}_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $\tilde{f}_{1n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}_1$, $\tilde{g}_{1n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{g}_1$, also $\bar{D}_\mu\,[f_1, f_{1n}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $D_\mu\,[g_1, g_{1n}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; es genügt zu zeigen: $\bar{D}_\mu\,[f_1 g_1, f_{1n} g_{1n}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir ω mit

$$\bar{\mu}\mathfrak{e}\,[|f_1| > \omega] < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \bar{\mu}\mathfrak{e}\,[|g_1| > \omega] < \frac{\varepsilon}{4},$$

was nach (32) möglich ist; dann

$$\delta > 0 \text{ mit } \delta < \frac{\varepsilon}{8},\ \delta < \frac{\varepsilon}{4\omega},\ \delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}};$$

$$n_0 \text{ mit } \bar{D}_\mu\,[f_1, f_{1n}] < \delta \text{ und } \bar{D}_\mu\,[g_1, g_{1n}] < \delta \text{ für } n > n_0.$$

Dann ist für $n > n_0$

$$f_1 g_1 - f_{1n} g_{1n} = f_1 (g_1 - g_{1n}) + g_1 (f_1 - f_{1n}) + (g_{1n} - g_1)(f_1 - f_{1n});$$
$$\overline{\mu} \mathfrak{e} [|g_1 - g_{1n}| > \delta] < \delta, \quad \overline{\mu} \mathfrak{e} [|f_1 - f_{1n}| > \delta] < \delta,$$
$$\overline{\mu} \mathfrak{e} [|f_1 g_1 - f_{1n} g_{1n}| > 2\,\delta\omega + \delta^2] < 4\,\delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

also wegen $2\,\delta\omega + \delta^2 < \varepsilon$

$$\overline{D}_\mu [f_1 g_1, f_{1n} g_{1n}] \leqq \varepsilon,$$

wie behauptet.

VII. Die Behauptungen I, II, III, V, VI übertragen sich nun unmittelbar auf die komplexen $f(x) \in \mathfrak{F}$, die man dazu in Real- und Imaginärteil spaltet. Für IV folgt dann das gleiche durch Betrachtung der Funktion $|f(x)|^2 = f_1^2(x) + f_2^2(x)$.

Die $\mathfrak{F}$-Funktionen $n(x)$ mit $\overline{D}_\mu [n(x)] = 0$ bilden ein Ideal $\mathfrak{F}_0$ in $\mathfrak{F}$, und $\mathfrak{F}^*$ ist der Restklassenring $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$. Wir lassen jetzt die Unterscheidung von $\mathfrak{F}^*$ und $\mathfrak{M}$ fallen, betrachten also die Funktionenklassen f^* als Elemente von $\mathfrak{M}$ und schreiben für $f(x) \in \mathfrak{F}$ $D_\mu [f]$ statt $D_\mu [\tilde{f}]$. — Äquivalente Funktionen brauchen nirgends übereinzustimmen, z. B. ist $f(x) = \frac{1}{x}$ äquivalent zu $g(x) = 0$. — $\mathfrak{F}$ kann durch folgende Angaben gekennzeichnet werden:

Definition 6′. *$\mathfrak{F}$ ist die Menge der komplexen Funktionen $f(x)$, die durch endlichwertige Funktionen $g(x)$, welche jeden ihrer Werte auf einer zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Menge annehmen, approximiert werden können im Sinne der $\overline{D}_\mu$-Metrik* (oder der „asymptotisch-gleichmäßigen Konvergenz“ nach [13], 3).

Diese Formulierung folgt aus Satz 8, da $\mathfrak{R}^*$ in $\mathfrak{B}$ dicht liegt.

Ist $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ eine Bairesche Funktion, so ist (vgl. S. 385) der Ausdruck $\varphi(f_1^*, \ldots, f_n^*) = f^* \in \mathfrak{M}_1$ für $f_1^*, \ldots, f_n^* \in \mathfrak{M}_1$ sinnvoll; jedoch darf, wie man leicht an Beispielen sieht, ein Repräsentant $f(x)$ von f^* nicht ohne weiteres in der Form $f(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ gebildet werden. Es gilt jedoch folgendes:

Satz 14. *Für jede stetige komplexwertige Funktion $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ von n komplexen Argumenten $z_\nu = x_\nu + i y_\nu$ und beliebige $f_1(x), \ldots, f_n(x) \in \mathfrak{F}$ gilt*

$$\varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = f(x) \in \mathfrak{F}, \quad f^* = \varphi(f_1^*, \ldots, f_n^*).$$

Beweis. Wenn φ ein Polynom in $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 13. Durch solche Polynome kann nun φ in jedem endlichen abgeschlossenen Bereich gleichmäßig approximiert werden. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $\omega = \omega(\varepsilon) > 0$ gewählt mit $\overline{\mu} \mathfrak{e} [|f_\nu| > \omega] < \frac{\varepsilon}{n}$ (nach (32)) und $\psi_\varepsilon(z_1, \ldots, z_n)$ als Polynom in $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ mit $|\varphi(z_1, \ldots, z_n) - \psi_\varepsilon(z_1, \ldots, z_n)| < \varepsilon$ für $|z_\nu| \leqq \omega$. Dann ist mit $f(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$

$$\mathfrak{e} [|f(x) - \psi_\varepsilon(f_1(x), \ldots, f_n(x))| > \varepsilon] \subset \sum_{\nu=1}^{n} \dot{+}\, \mathfrak{e} [|f_\nu(x)| > \omega],$$

daher $\overline{\mu}\mathfrak{e}\,[|f(x) - \psi_\varepsilon(f_1(x), \ldots, f_n(x))| > \varepsilon] < \varepsilon$,

$$\bar{D}_\mu [f(x), \psi_\varepsilon(f_1(x), \ldots, f_n(x))] \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

also $f(x) \in \mathfrak{F}$ und $\psi_\varepsilon(f_1, \ldots, f_n)^* \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f^*$. Da andererseits punktweise $\psi_\varepsilon(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ gilt, folgt $\psi_\varepsilon(f_1^*, \ldots, f_n^*) \to \varphi(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ (Konvergenz in $\mathfrak{M}$) und daher $f(x)^* = \varphi(f_1^*, \ldots, f_n^*)$.

§ 6.

$\mathfrak{F}$-Funktionen als fastperiodische Funktionen.

Die Funktion $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$ (α, β reell) gehört zu $\mathfrak{F}$, denn $\mathfrak{e}\,[f(x) < \lambda]$ ist für reelles λ eine $\mathfrak{P}$-Menge (Def. 5; 6). $\mathfrak{F}$ enthält daher alle trigonometrischen bzw. Exponentialpolynome $q(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu t}$. Nun sind die von Kovanko ([13], 5) eingeführten f. p. α-Funktionen aus den trigonometrischen Polynomen gewonnen durch Bildung der abgeschlossenen Hülle mit der Metrik $\bar{D}_\mu$, gehören daher zu $\mathfrak{F}$, und damit auch alle von Besicovitch und Bohr [2] betrachteten verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen, da diese unter den f. p. α-Funktionen enthalten sind. Die Identität der Menge $\mathfrak{F}$ mit der Menge {f. p. α} ergibt sich daraus, daß die endlichwertigen Funktionen über $\mathfrak{R}$, die nach Def. 6′ in $\mathfrak{F}$ dicht liegen, zu {f. p. α} gehören; sie sind nämlich vom Stepanoffschen Typus (siehe Beweis von Satz 11). Also können wir $\mathfrak{F}$ auch auf folgende Art kennzeichnen:

Definition 6″. *Die Funktionen aus $\mathfrak{F}$ sind genau die Kovankoschen f. p. α-Funktionen.*

Von Kovanko sind für sie mehrere gleichwertige Definitionen angegeben [13], [14]. — Wir können also jetzt folgende Tatsachen aussprechen:

Für die reellen f. p. α-Funktionen existiert die Verteilungsfunktion

$$\sigma(\lambda) = \mu\mathfrak{e}\,[f(x) \leqq \lambda]$$

für fast alle λ, für die komplexen die komplexe Verteilungsfunktion

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda_1 + i\lambda_2) = \mu\mathfrak{e}\,[f_1(x) \leqq \lambda_1;\ \ f_2(x) \leqq \lambda_2]$$

für fast alle λ_1, λ_2.

Dieser Satz wurde von Wintner ([28], Anhang) für die reellen, von Haviland [8] für die komplexwertigen stetigen fastperiodischen Funktionen bewiesen. — Weiter gilt:

Jede Folge $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) von f. p. α-Funktionen mit $\mu\mathfrak{e}\,[|f_n - f_m| > \varepsilon]_{n, m \to \infty} 0$ (für jedes $\varepsilon > 0$) ist $\bar{D}_\mu$-konvergent gegen eine f. p. α-Funktion (*Vollständigkeit* von {f. p. α}).

Da alle beschränkten $\mathfrak{F}$-Funktionen B f. p. sind [14], sieht man leicht: $\mathfrak{A}$ *besteht genau aus denjenigen Punktmengen, deren c-Funktion B f. p. ist.*

Satz 15. *Für* $f(x) \in \{B \text{ f. p.}\}$ *ist*

$$M\{f(x)\} = \int_{e^*} f^* \, d\mu. \tag{36}$$

Beweis. Ist $f(x) = \chi_{\mathfrak{q}}(x)$ die c-Funktion einer Menge $\mathfrak{q} \in \mathfrak{A}$, so folgt aus den Definitionen unmittelbar

$$M\{f(x)\} = \mu\,\mathfrak{q} = \mu\,\mathfrak{q}^* = \int_{e^*} \chi_{\mathfrak{q}^*} \, d\mu = \int_{e^*} f^* \, d\mu$$

(vgl. Beweis von Satz 11). Wegen der Linearität von $M\{f(x)\}$ und $\int f^* \, d\mu$ folgt (36) dann auch für endlichwertige Funktionen $f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \, \chi_{\mathfrak{q}_\nu}(x)$ $(\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n \in \mathfrak{A})$. Durch endlichwertige Funktionen aus $\mathfrak{F}$ können die beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{F}$ (also aus $\{B \text{ f. p.}\}$) gleichmäßig approximiert werden; hierbei verhält sich $\int_{e^*} f^* \, d\mu$ sowie $M\{f\}$ stetig, so daß sich (36) auf die beschränkten $f(x) \in \{B \text{ f. p.}\}$ überträgt. Ist $f(x) \in \{B \text{ f. p.}\}$ beliebig, so wenden wir (36) auf die Funktion $f_\omega(x)$ (Satz 7) an; aus $M\{|f - f_\omega|\} \underset{\omega \to \infty}{\to} 0$ [2], 253, Lemma 8) folgt $M\{f_\omega\} \underset{\omega \to \infty}{\to} M\{f\}$. Andererseits folgt aus der Beschränktheit von $\int_{e^*} f_\omega^* \, d\mu = M\{f_\omega\}$ (bei $\omega \to \infty$) und der Definition von $\int_{e^*} f^* \, d\mu$ (vgl. (16)) die Endlichkeit von $\int_{e^*} f^* \, d\mu$ und die Beziehung $\int_{e^*} f_\omega^* \, d\mu \to \int_{e^*} f^* \, d\mu$ und damit (36).

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}^r$ die Menge der $f(x) \in \mathfrak{F}$ mit $f^* \in \mathfrak{M}^r$, so folgt aus Satz 15: $\{B^1 \text{ f. p.}\} \subset \mathfrak{F}^1$. Wegen $\mu e^* = 1$ ist nach (20) $\mathfrak{F}^r \subset \mathfrak{F}^p$ für $r > p$. Da (nach [14]) $\{B^r \text{ f. p.}\}$ die Menge der $f(x) \in \{B^1 \text{ f. p.}\}$ mit $|f(x)|^r \in \{B^1 \text{ f. p.}\}$, und da $\mathfrak{F}^r$ die Menge der $f(x) \in \mathfrak{F}^1$ mit $|f(x)|^r \in \mathfrak{F}^1$ ist, folgt allgemein

$$\{B^r \text{ f. p.}\} \subset \mathfrak{F}^r \qquad (1 \leqq r < \infty).$$

Nach Satz 15 haben beide Räume die gleiche Metrik

$$D_{B^r}[f, g] = D^r[f^*, g^*],$$

und da $\{B^r \text{ f. p.}\}$ die endlichwertigen Funktionen enthält, liegt $\{B^r \text{ f. p.}\}$ dicht in $\mathfrak{F}^r$. $\mathfrak{F}^r$ enthält aber sicher Funktionen $f(x)$, die nicht zu $\{B^r \text{ f. p.}\}$ gehören, z. B. $f(x) = \frac{1}{x}$.

Satz 16. *Zu jedem* $f(x) \in \mathfrak{F}^r$ $(1 \leqq r < \infty)$ *gibt es ein* $g(x) \in \{B^r \text{ f. p.}\}$ *mit* $f^* = g^*$.

Beweis. Da man $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ mit $f_l \in \mathfrak{F}^r$, $f_l \geqq 0$ setzen kann, nehmen wir o. B. d. A. $f(x) \geqq 0$ an. Es sei

$$f_k(x) = \operatorname{Min}(k, f(x)) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$g(x) = f_k(x) \quad \text{für} \quad \xi_k < |x| < \xi_{k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

wo $\{\xi_k\}$ eine noch festzulegende Folge mit $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots$, $\xi_k \underset{k \to \infty}{\to} \infty$ ist. Für $|x| > \xi_k$, also bis auf ein endliches Intervall, gilt

$$f_k(x) \leqq g(x) \leqq f(x),$$

daher $\bar{D}_\mu[f, g] \leqq D_\mu[f, f_k]$, und wegen $D_\mu[f, f_k] \underset{k \to \infty}{\to} 0$ folgt $D_\mu[f, g] = 0$. Mit $g_k(x) = \operatorname{Min}(k, g(x))$ gilt (Satz 15)

$$\underline{M}\{g^r\} \geqq M\{g_k^r\} = \int (g_k^*)^r \, d\mu \underset{k \to \infty}{\to} \int (g^*)^r \, d\mu,$$

$$\underline{M}\{g^r\} \geqq \int_{\mathfrak{E}^*} (g^*)^r \, d\mu. \tag{37}$$

Wird vorübergehend $M^T\{h(x)\} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(x) \, dx$ gesetzt, so ist

$$M^T\{f_k^r\} \underset{T \to \infty}{\to} M\{f_k^r\};$$

man kann daher ξ_k wählen mit

$$M^T\{f_k^r\} < M\{f_k^r\} + \frac{1}{k} \quad \text{für} \quad T > \xi_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Nun ist für $|x| < \xi_{k+1}$ $g(x) \leqq f_k(x)$, daher

$$M^T\{g^r\} \leqq M^T\{f_k^r\} < M\{f_k^r\} + \frac{1}{k} \leqq \int (f^*)^r \, d\mu + \frac{1}{k} = \int (g^*)^r \, d\mu + \frac{1}{k}$$
$$(\xi_k < T \leqq \xi_{k+1}).$$

Mit $T \to \infty$ strebt auch k gegen Unendlich; es folgt

$$\overline{M}\{g^r\} = \overline{\lim_{T \to \infty}} M^T\{g^r\} \leqq \int (g^*)^r \, d\mu;$$

in Verbindung mit (37) ergibt dies

$$M\{g^r\} = \int (g^*)^r \, d\mu = \lim_{k \to \infty} M\{g_k^r\}.$$

Nun folgt aus der Konvexität und Monotonie der Funktion $v(u) = u^r$ ($u \geqq 0$, $r \geqq 1$) $\Delta v \geqq (\Delta u)^r$, also $(\Delta u)^r \leqq \Delta(u^r)$, daher ist

$$|g - g_k|^r \leqq g^r - g_k^r,$$

$$M\{|g - g_k|^r\} \leqq M\{g^r\} - M\{g_k^r\},$$

d. h. $D_{B^r}[g, g_k] \underset{k \to \infty}{\to} 0$, $g \in \{B^r \text{ f. p.}\}$.

Korollar. *Die Räume* $\{B^r$ f. p.$\}$ $(r \geqq 1)$ *sind vollständig* [16]).

Setzt man für komplexes z $\langle z\rangle = \frac{|z|}{1+|z|}$, so ist $\langle f(x)\rangle \in \{B$ f. p.$\}$ für $f(x) \in \mathfrak{F}$; es wird nach (18) in $\mathfrak{M}$ durch

$$D'_\mu[f^*, g^*] = \int_{\mathfrak{E}^*} \langle f^* - g^*\rangle \, d\mu = M\{\langle f(x) - g(x)\rangle\}$$

eine mit der D_μ-Metrik gleichwertige Metrik erklärt. $\mathfrak{F}$ ist also die Menge der mit der Metrik D'_μ durch trigonometrische Polynome approximierbaren Funktionen. Ersetzt man hier $\langle\rangle$ durch $||$, so erhält man $\{B$ f. p.$\}$ statt $\mathfrak{F}$. Diese Analogie reicht noch weiter, es gilt nämlich, wie hier ohne Beweis mitgeteilt sei, folgendes:

Definition 6'''. $\mathfrak{F}$ *ist die Menge der Funktionen* $f(x)$, *für die es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine „hinreichend gleichmäßige" Menge* $\{\tau_i\}$ *gibt mit*

$$M_x\{\langle f(x+\tau_i) - f(x)\rangle\} < \varepsilon,$$

$$\overline{M}_x \overline{M}_i \frac{1}{c} \int_x^{x+c} \langle f(t+\tau_i) - f(t)\rangle \, dt < \varepsilon \text{ für jedes } c > 0.$$

Diese Definition geht aus derjenigen von $\{B$ f. p.$\}$ ([2], 227) hervor durch Ersetzen von $||$ durch $\langle\rangle$. Die $\mathfrak{F}$-Funktionen sind damit durch Verschiebungseigenschaften gekennzeichnet, wie dies in anderer Form auch durch Kovanko [14] geschehen ist. —

Anknüpfend an den Schluß von § 3 kann man den Bereich $\mathfrak{M}$ noch unter einem anderen Gesichtspunkt betrachten. Der Raum $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}^2$ ist ein vollständiger komplexer euklidischer Raum, in dem die Funktionen [17]) $\varphi_\lambda = (e^{i\lambda x})^*$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden ([3], 109; [20], § 3), ist also nicht separabel, und damit ist nach Satz 9 auch $\mathfrak{B}$ nicht separabel, wie oben (S. 393) behauptet. Die Elemente $f \in \mathfrak{M}$ erzeugen nach S. 389. normale Operatoren F in $\mathfrak{R}$ durch $Fg = fg$. Die von Wintner ([28], Anhang) behandelten „fastperiodischen Matrizen" sind im wesentlichen eine Matrizendarstellung dieser Operatoren, wobei f und g auf die stetigen fastperiodischen Funktionen eingeschränkt sind. Der hierfür wesentliche Satz, daß die Fourierreihe von fg durch formale Multiplikation der Reihen von f und g entsteht, überträgt sich durch Grenzübergänge auf $g \in \mathfrak{R}$, $f \in \mathfrak{M}^\infty$. Ist M der kleinste die sämtlichen Fourierexponenten von f enthaltende Modul (kurz: der Exponenten- oder *Frequenzenmodul von* f), so sei $\mathfrak{R}_\varkappa$ der (separable!) abgeschlossene Unterraum von $\mathfrak{R}$, der von den φ_λ mit $\lambda \equiv \varkappa \pmod{\mathsf{M}}$ aufgespannt wird; man erkennt leicht, daß $\mathfrak{R}_\varkappa$ durch F in sich transformiert

[16]) Für $r = 2$ in [3], 109 bewiesen.

[17]) Von hier ab werden die Elemente von $\mathfrak{M}$ mit $f, \varphi, \ldots$ (ohne *) bezeichnet.

wird. Mittels solcher invarianter Unterräume kann man umgekehrt jedem $H \in \mathfrak{M}$ bzw. $h \in \mathfrak{M}$ (zwar nicht eine Fourierreihe, aber) einen abzählbaren Frequenzenmodul zuordnen; es gilt dann der Satz, daß rationale Operationen und D_{μ}-lim, angewandt auf Funktionen $f_1, f_2, \ldots \in \mathfrak{M}$, deren Moduln in einem festen Modul M enthalten sind, zu keiner Vergrößerung des Moduls führen.

Mittels der Frequenzenmoduln lassen sich Ergebnisse von Wintner [29] über statistische Unabhängigkeit von Verteilungsfunktionen fastperiodischer Funktionen verallgemeinern. Sind $f, g \in \mathfrak{M}^{\infty}$, so entsteht, wie erwähnt, die Fourierreihe von fg durch Ausmultiplizieren der Reihen von f und g. Sind die Frequenzenmoduln von f und g fremd (bis auf die Null), so multiplizieren sich dabei die konstanten Glieder, es ist also

$$\int_{\mathfrak{e}^*} f d\mu \cdot \int_{\mathfrak{e}^*} g d\mu = \int_{\mathfrak{e}^*} fg d\mu. \tag{38}$$

Es seien nun $f, g \in \mathfrak{M}_1$ [18]) beliebig, aber mit fremden Frequenzenmoduln; letzteres gilt auch für die c-Funktionen von $\mathfrak{e}^* [f \leqq \alpha]$ und $\mathfrak{e}^* [g \leqq \beta]$. Setzt man diese in (38) ein, so folgt

$$\mu \mathfrak{e}^* [f \leqq \alpha;\ g \leqq \beta] = \mu \mathfrak{e}^* [f \leqq \alpha] \cdot \mu \mathfrak{e}^* [g \leqq \beta].$$

Dies bedeutet genau die statistische Unabhängigkeit von f und g ([11], 50). Das von Wintner diskutierte Additionstheorem folgt hieraus als spezielle Anwendung.

Ist $\mathfrak{q} \in \mathfrak{A}$, $\mu \mathfrak{q} \neq 0$, so gibt es stets ein $\mathfrak{r} \in \mathfrak{A}$ mit $0 < \mu \mathfrak{r} < 1$, so daß $\chi_{\mathfrak{q}}$ und $\chi_{\mathfrak{r}}$ fremde Frequenzenmoduln haben. Dann ist nach (38) $\mu(\mathfrak{q}\mathfrak{r}) = \mu \mathfrak{q} \cdot \mu \mathfrak{r}$, also $\mathfrak{q}\mathfrak{r} \subset \mathfrak{q}$, $0 < \mu(\mathfrak{q}\mathfrak{r}) < \mu \mathfrak{q}$. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{q}^*$ in $\mathfrak{B}$ kein unzerlegbares Element ist; da $\mathfrak{q}^* \neq 0^*$ willkürlich war, enthält $\mathfrak{B}$ kein unzerlegbares Element, wie auf S. 393 behauptet.

Über die Spektren der Operatoren aus $\mathfrak{M}$ lassen sich einige allgemeine Angaben machen [19]). Ist $f \in \mathfrak{M}$, M der Frequenzenmodul von f, und sind φ_{λ}, $\mathfrak{R}_{\varkappa}$ wie oben erklärt, so ist Φ_{λ} unitär, $\Phi_{\varkappa} \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_{\varkappa}$, $\Phi_{\varkappa} \mathfrak{v} F$; daher sind die Abschnitte von F in den $\mathfrak{R}_{\varkappa}$ unitär äquivalent. Ist f reell, so folgt

$$F = \sum_{\varkappa \bmod \mathsf{M}} \oplus F_{\mathfrak{R}_{\varkappa}} \sim \aleph \times E,$$

wo E der Typ von $F_{\mathfrak{R}_0}$ ist. F hat hiernach durchweg die Vielfachheit $\aleph$ und, da $\mathfrak{R}_0$ separabel ist, primitiven Spektralbereich (im weiteren Sinne, siehe [27], Anhang II). Dieser wird übrigens durch die Verteilungsfunktion von f erzeugt.

Der Aufbau des Bereiches $\mathfrak{M}$ läßt sich übrigens völlig unabhängig von allem Vorhergehenden folgendermaßen durchführen. Man erkläre $\mathfrak{R}$ als den

---

[18]) Wir beschränken uns der Deutlichkeit halber auf reelle Funktionen.

[19]) Bezeichnungen in diesem Abschnitt nach Wecken [27].

Raum der formalen „Fourierreihen“ $\sum_\lambda a(\lambda)\,\varphi_\lambda$ mit $\sum_\lambda |a(\lambda)|^2 < \infty$, wobei die φ_λ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, und in $\mathfrak{R}$ beschränkte Operatoren $\Phi_\varkappa$ durch die Forderung $\Phi_\varkappa\,\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda+\varkappa}$; die $\Phi_\varkappa$ erzeugen einen Abelschen Ring $\mathfrak{M}^\infty$ von Operatoren F mit der „Spur“ $\mathfrak{S}F = (F\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)$. Der erweiterte Ring $\mathfrak{M}$ läßt sich dann wie auf S. 389 erklären. Die Projektoren $P \in \mathfrak{M}^\infty$ bzw. ihre Eigenräume in $\mathfrak{R}$ bilden mit geeigneten Verknüpfungen ein Σ-System mit der Maßfunktion $\mathfrak{S}P$, das, wie wir wissen, zu dem in § 4 konstruierten System $\mathfrak{B}$ isomorph ist[20]). Die nur von der Struktur von $\mathfrak{B}$ abhängigen Eigenschaften von $\mathfrak{M}$ müssen sich also auch an $\mathfrak{M}$ finden lassen. Aber auch Verschiebungseigenschaften der Elemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ lassen sich mittels Operatoren in $\mathfrak{R}$ ausdrücken, nämlich durch die Gruppe der Translationen U_α $(U_\alpha f(x) = f(x+\alpha))$, die als unitäre Operatoren in $\mathfrak{R}$ durch $U_\alpha\,\varphi_\lambda = e^{i\alpha\lambda}\,\varphi_\lambda$ festgelegt sind.

Schriftenverzeichnis.

S. Banach.

[1] Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

A. S. Besicovitch and H. Bohr.

[2] Almost Periodicity and General Trigonometric Series, Acta math. **57** (1931), S. 203—292.

A. S. Besicovitch.

[3] Almost periodic functions. Cambridge 1932.

S. Bochner.

[4] Abstrakte fastperiodische Funktionen, Acta math. **63** (1933), S. 149—184.

C. Carathéodory.

[5] Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig und Berlin 1918.

M. Fréchet.

[6] Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable, Bulletin of the Calcutta Math. Soc. **11** (1921), S. 187—206.

[7] Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bulletin de la Soc. Math. de France **43** (1915), S. 248—265.

E. K. Haviland.

[8] On statistical methods in the theory of almost periodic functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **19** (1933), S. 549—555.

B. Jessen.

[9] The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, Acta math. **63** (1934), S. 249—323.

[10] Abstrakt Maal- og Integralteori I, Mat. Tidsskr. B **1934**, S. 73—84.

A. Kolmogoroff.

[11] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. d. Math. **2** (1933), S. 195—262.

[20]) Sie bilden auch ein „orthogonales System mit Mengenindex“, vgl. F. Maeda, Journ. of Sci. of the Hirosima University, A 8, S. 19.

G. Köthe.
[12] Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie, Jahresber. d. D. Math.-Ver. **47** (1937), I, S. 125—144.

A. S. Kovanko.
[13] Sur les classes de fonctions près que-périodiques généralisées, Annali di mat. p. ed app. Ser. IV, **9** (1931), S. 1—24.
[14] Sur la structure des fonctions près que périodiques généralisées, Recueil math. Moscou **42** (1934), S. 3—18.

H. Löwig.
[15] Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl, Acta sci. math. Szeged **7** (1935), S. 1—33.

F. J. Murray and J. v. Neumann.
[16] On rings of operators, I., Ann. of math. **37** (1936), S. 116—229. II., Trans. Am. Math. Soc. **41** (1937), S. 208—248.

J. v. Neumann.
[17] Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Annalen **102** (1930), S. 49—131.
[18] Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, Math. Annalen **102** (1930), S. 370—427.
[19] Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maße Null", Journ. f. d. r. u. ang. Math. **165** (1931), S. 109—115.

O. Nikodym.
[20] Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. Math. **15** (1930), S. 131—179.

J. Radon.
[21] Theorie und Anwendung der absolut additiven Mengenfunktionen, Wiener Ber. **122** (1913), IIa 2, S. 1295—1438.

F. Rellich.
[22] Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen, Math. Annalen **110** (1935), S. 342—356.

F. Rieß.
[23] Sur les suites de fonctions mesurables, C. R. Paris **148** (1909), S. 1303—1305.
[24] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen **69** (1910), S. 449—497.

St. Saks.
[25] Théorie de l'intégrale. Warszawa 1933.

M. H. Stone.
[26] The theory of representations for Boolean algebras, Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 37—111.

F. Wecken.
[27] Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren, Math. Annalen **116** (1939), S. 422—455.

A. Wintner.
[28] Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Leipzig 1929.
[29] Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen, Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 618—629.

(Eingegangen am 14. Januar 1939.)

Zur Geometrie der Polygone, Polyeder und Polytope in linearen Räumen beliebiger Stufe bei euklidischer und nichteuklidischer Maßbestimmung.

Von

Rudolf Mehmke in Stuttgart.

Einleitung.

Es hat in einer 1937 erschienenen Abhandlung Herr E. Schönhardt[1]) olgende Sätze aufgestellt und bewiesen:

Projiziert man in der Ebene einen Vektor v senkrecht auf die Seiten ines regelmäßigen n-Ecks, oder im Raume auf die sämtlichen k-Kanten ines regelmäßigen Polyeders, so ist die Summe der Projektionen $n/2\ v$ bzw. /3 v [2]), oder in einen Satz zusammengefaßt und auf regelmäßige Polytope n einem d-dimensionalen Raum ausgedehnt: die fragliche Summe beträgt $/d \cdot v$. (Für $d > 3$ ist der Satz als Vermutung hingestellt.) Ferner: Die umme der senkrechten Projektionen eines Vektors v auf die f Flächennormalen der Flächen eines regelmäßigen Polyeders ist $\frac{1}{3} f v$ bzw. $\frac{2}{3} f v$. Endlich ird am Schluß der Abhandlung noch bewiesen, daß in der Ebene die Summe er Projektionen eines Vektors v parallel den Schwerlinien eines beliebigen — uch unregelmäßigen — Dreiecks auf die Gegenseiten $\frac{3}{2} v$ beträgt, und im aume die Summe der Projektionen von v parallel den Verbindungsebenen es Schwerpunkts eines unregelmäßigen Tetraeders mit den Kanten des etraeders auf die Gegenkanten gleich $2 v$ ist.

Diese Sätze lassen sich, wie gezeigt werden soll, in verschiedenen Richungen verallgemeinern, erstens dadurch, daß man außer einem Vektor — ls (nach Grassmannscher Auffassung) einem endlichen Stellvertreter des n seiner Richtung liegenden unendlich fernen Punktes — einen beliebigen ndlichen Punkt projiziert, auch in dazu geeigneten Fällen außerdem Bivekoren, Ebenenstücke, Kurven usw., zweitens dadurch, daß man z. B. im Falle nes ebenen Dreiecks nicht parallel den Schwerlinien, sondern parallel drei eliebigen, sich in einem und demselben Punkte schneidenden Ecktransersalen des Dreiecks projiziert, und noch auf einige andere Arten.

---

[1]) E. Schönhardt, Über die Summe der Projektionen eines Vektors, „Deutsche athematik", Jahrgang 2, Heft 3, S. 446—451.

[2]) Wie Schönhardt angibt, ist ihm der Satz für den Fall eines gleichseitigen reiecks, $n = 3$, als von A. Thoma herrührend mitgeteilt worden.

Für Untersuchungen wie die folgenden ist ohne Zweifel das geeignetste analytische Hilfsmittel die Möbius-Grassmannsche Punktrechnung, die denn auch allein angewendet werden soll[3]).

Solange nichts anderes bemerkt wird, ist euklidische Maßbestimmung vorausgesetzt.

I. Sätze über regelmäßige Polygone, Polyeder und Polytope.

1. Ebene.

Die senkrechten Projektionen eines veränderlichen Punktes x auf die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks, in beliebiger Anordnung, seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und ihr Schwerpunkt heiße x':

$$n x' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Ordnet man x und x' einander zu, so entstehen, wie leicht zu zeigen ist, zwei affine Punktsysteme Σ und Σ'. Denn Parallelprojektionen sind Sonderfälle affiner Umbildungen — Symbole für solche nennen wir Affinoren, wie üblich — und heißt $\mathfrak{A}_i$ der Affinor, der zu x_i gehört:

$$x_i = \mathfrak{A}_i x,$$

so kommt mit

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n = n\mathfrak{A}:$$

$$x' = \mathfrak{A} x.$$

Weil bei der Gruppe von Drehungen und Spiegelungen, die das gegebene Vieleck in sich selbst überführen, die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bloß unter sich vertauscht werden, also x' seine Lage behält, sind Σ und Σ' sogar ähnliche Punktfelder in ähnlicher Lage, wobei der Mittelpunkt m des Vielecks deren selbstentsprechender Punkt ist.

Was für endliche Punkte ihr Schwerpunkt, ist für Vektoren ihr arithmetisches Mittel. Deshalb sind, wenn die senkrechten Projektionen irgendeines Vektors v auf die Seiten des n-Ecks $v_1, v_2, \ldots, v_n$ heißen und v' ihr arithmetisches Mittel bezeichnet:

$$n\, v' = v_1 + v_2 + \ldots v_n,$$

v und v' entsprechende Vektoren von Σ und Σ'. Sie haben daher dieselbe Richtung und ihre Längen stehen in einem konstanten Verhältnis. Nach Schönhardt ist aber

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \frac{n}{2} v,$$

[3]) Die allgemeinste, von Grassmann in seiner „Ausdehnungslehre“ von 1844 (= Werke I 1) entwickelte Form der Vektorrechnung, von ihm Streckenrechnung genannt, ist in der Punktrechnung enthalten.

mithin

$$\boldsymbol{v}' = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{v},$$

also auch bei irgend zwei entsprechenden Punkten x und x':

$$\overrightarrow{m\,x'} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{m\,x},$$

in Worten: Der Schwerpunkt der senkrechten Projektionen irgendeines Punktes der Ebene auf die Seiten eines regelmäßigen Vielecks liegt in der Mitte zwischen jenem Punkt und dem Mittelpunkt des Vielecks — eine Vervollständigung des fraglichen Satzes von Schönhardt.

Wenn man die senkrechten Projektionen von $\boldsymbol{v}$ auf die Seiten des regelmäßigen Vielecks nicht als freie, d. h. beliebig parallel verlegbare, sondern als an ihre Linien gebundene Vektoren, sogenannte Stäbe ansieht, in der Sprache der Mechanik als Kräfte, die auf einen starren Körper wirken, so zeigt sich, daß deren Mittelkraft (Resultante) durch den Mittelpunkt m des Vielecks geht — eine Ergänzung des ersten Schönhardtschen Satzes. Den Beweis kann man so führen:

Wäre die Behauptung richtig, so müßte die Summe der statischen Momente jener Kräfte in bezug auf m gleich Null sein. Die Wirkungslinien der Kräfte haben alle denselben Abstand von m, folglich bleibt zu beweisen, daß die Summe der Stärken (Intensitäten) der Kräfte, also die Summe der senkrechten Projektionen von $\boldsymbol{v}$ auf die Seiten des Vielecks verschwindet. Bezeichnen aber $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ die Seiten des Vielecks als Vektoren, in fortlaufendem Sinne genommen, wobei die gemeinsame Länge der Seiten als Längeneinheit gewählt werden mag, so ist die mit richtigem Vorzeichen genommene Länge der senkrechten Projektion von $\boldsymbol{v}$ auf $\boldsymbol{a}_i$ gleich dem inneren Produkt $\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{v}$[4]), weshalb wegen

$$\sum \boldsymbol{a}_i = 0$$

kommt

$$\sum \boldsymbol{a}_i|\,\boldsymbol{v} = 0,$$

w. z. b. w.

Alles Vorhergehende gilt auch für regelmäßige Sternvielecke und, mit geringer Abänderung des letzten Beweises, für halbregelmäßige Vielecke.

2. Raum.

Die Anzahl der Kanten eines regelmäßigen Körpers werde, wie in der Einleitung, mit k, die Anzahl seiner Flächen mit f bezeichnet. Von den senk-

[4]) Das (bekanntlich, auch mit seinem Namen, von Grassmann 1844 eingeführte) innere Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$, das auch ihr skalares Produkt genannt wird, bezeichnet man am besten, wie Grassmann selbst seit 1862, durch $\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{w}$ (gelesen „$\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{w}$"). Die von I.W. Gibbs angewandte Bezeichnung $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ empfiehlt sich nicht, weil der Punkt als Trennungszeichen unentbehrlich ist.

rechten Projektionen eines beliebigen Punktes x auf die Kanten des Körpers heiße der Schwerpunkt x', von den senkrechten Projektionen auf die Flächen dagegen x'', auch werde mit v' bzw. v'' das arithmetische Mittel aus den senkrechten Projektionen irgendeines Vektors v auf die Kanten bzw. Flächen des Körpers bezeichnet. Man sieht wieder leicht ein, daß durch Zuordnung von x und x' bzw. x und x'' ein zu dem System Σ der Punkte x ähnliches und ähnlich liegendes Punktsystem Σ' bzw. Σ'' entsteht, wobei der Mittelpunkt m des Körpers sich selbst entspricht. Nach Schönhardt ist

$$v' = \tfrac{1}{3}\, v, \qquad v'' = \tfrac{2}{3}\, v,$$

also auch

$$\overrightarrow{m\,x'} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{m\,x}, \quad \overrightarrow{m\,x''} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{m\,x},$$

d. h. der Schwerpunkt der senkrechten Projektionen irgendeines Punktes im Raume auf die Kanten bzw. Flächen eines regelmäßigen Körpers liegt auf der Strecke vom Mittelpunkte des Körpers nach jenem Punkt und teilt sie im Verhältnis 1 : 2 bzw. 2 : 1. Dies ist wieder eine Vervollständigung des betreffenden Schönhardtschen Satzes.

Wie unter Nr. 2 kann man die Projektionen eines Vektors als (Kraft-) Stäbe auffassen. Untersuchen wir, was in unseren beiden Fällen über sie ausgesagt werden kann.

Die durch k bzw. f dividierte Summe der Projektionen eines Stabes X auf die Kanten bzw. Flächen eines regelmäßigen Körpers werde mit X' bzw. X'' bezeichnet, wobei es zunächst unentschieden ist, ob X' und X'' im Sinne der Mechanik Einzelkräfte oder aber Dynamen sind. Aus denselben Gründen, wie sie bei den Projektionen eines Vektors geltend gemacht wurden, bedeutet offenbar der Übergang von X zu X' wie auch von X zu X'' eine Ähnlichkeitstransformation, weshalb vor allem X' und X'' Einzelkräfte sind. Für die weitere analytische Behandlung unserer Fragen eignet sich folgender Weg.

Bezeichnet man einen Stab der Länge Eins in der i-ten Kante des regelmäßigen Körpers mit A_i, so ist $X|A_i$, das innere Produkt von X und A_i, gleich der senkrechten Projektion von X auf die Linie von A_i, daher das äußere Produkt

$$[X|A_i \cdot A_i]$$

diese Projektion als Stab, folglich

$$kX' = \Sigma\,[X|A_i \cdot A_i].$$

Führt man den Lückenausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken ein [5]):

$$L = [X|* \cdot *],$$

so kann man schreiben:

$$[X|A_i \cdot A_i] = LA_i^2,$$

wo A_i^2 die doppelt zu denkende Gerade A_i als ausgearteter Strahlenkomplex zweiten Grades bedeutet, und wenn man

$$\sum A_i^2 = K^{(2)}$$

setzt, so kommt

$$kX' = \sum LA_i^2 = L \sum A_i^2 = LK^{(2)}.$$

Die Stabform $K^{(2)}$ führt auf einen Strahlenkomplex zweiten Grades, den hier näher zu betrachten sich erübrigt.

Bezeichnet ferner α einen an seine Ebene gebundenen Bivektor, ein sogenanntes Blatt, und zwar vom Flächeninhalt Eins, dann ist $|\alpha$ (Ergänzung α) ein zu α senkrechter Vektor der Länge Eins, $[X|\alpha]$ die durch X gehende, zu α senkrechte Ebene, mit einem Zahlwert gleich der senkrechten Projektion von X auf α, und endlich $[X|\alpha \cdot \alpha]$ diese Projektion als Stab. Der vorher eingeführte Lückenausdruck L ermöglicht es, zu schreiben:

$$[X|\alpha \cdot \alpha] = L\alpha^2,$$

so daß man für die Summe der senkrechten Projektionen von X auf die Flächen des Körpers erhält:

$$\sum L\alpha_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, f,$$

oder, wenn

$$\sum \alpha_i^2 = \varphi^{(2)}$$

gesetzt wird,

$$fX'' = L\varphi^{(2)}.$$

Die Gleichung

$$\varphi^{(2)} x^2 = \text{const}$$

stellt eine Fläche zweiter Ordnung dar; es ist, weil wir von einem regelmäßigen Körper ausgegangen sind, eine Kugel mit m als Mittelpunkt.

Nach Einführung des Lückenausdrucks L sowie der beiden Formen $K^{(2)}$ und $\varphi^{(2)}$ ist es einerlei, zu welcher Art von regelmäßigen Körpern der untersuchte gehört, weshalb es für das Folgende genügt, einen Würfel zu betrachten, was zugleich das Bequemste ist.

[5]) Der Begriff eines Lückenausdrucks stammt von Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844 = Werke I 1, § 172, S. 285). Dort bezeichnete Grassmann, weil er ursprünglich von „offenen Produkten" sprach, die Lücken durch leergelassene Klammern: (), in der Ausdehnungslehre von 1862 = Werke I 2, durch den Buchstaben l. Die Bezeichnung durch einen Stern: $*$, hat Peano eingeführt: G. Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Torino 1888, p. 152.

Nimmt man bei einem Würfel den Stab X in einer seiner Kanten an, so geben X und seine Projektionen auf die drei zu jener parallelen Kanten zusammen einen durch m gehenden Stab — die Projektionen auf die anderen Kanten verschwinden —, es gilt mithin allgemein der Satz, daß wenn man die senkrechten Projektionen irgendeines Stabes auf die Kanten eines regelmäßigen Körpers wie Kräfte behandelt, sie zusammen einer durch den Mittelpunkt des Körpers gehenden Einzelkraft statisch gleichwertig sind. Zugleich ist nach dem Früheren diese Einzelkraft $k/3$ so groß und von derselben Richtung wie die gegebene.

Läßt man beim Würfel wie vorher X mit einer Kante zusammenfallen, so geben die Projektionen von X auf die beiden, sich in dieser Kante schneidenden Flächen des Würfels zusammen $2X$, die Projektionen auf die beiden Ebenen, die zu den letzteren parallel sind, zusammen einen durch m gehenden Stab derselben Länge und Richtung wie $2X$, die noch übrigen zwei Projektionen aber Null, mithin die Projektionen von X auf die sämtlichen Flächen des Würfels einen Stab derselben Richtung wie X, dessen Linie in der Mitte zwischen der Linie von X und m liegt, wobei natürlich der Faktor 4 gleich $2f/3$ ist. Dieses, auch wieder für einen beliebigen regelmäßigen Körper geltende Ergebnis könnte ähnlich in Worte gefaßt werden, wie das vorhergehende. Die Zuordnung von X und X' sowie von X und X'' bedeutet jedesmal eine Ähnlichkeits-Transformation im Strahlenraum, genauer in dem von Stäben erfüllt gedachten Raum.

Es ist klar, daß die gefundenen Sätze nicht nur für die regelmäßigen Körper im engeren Sinne gelten, vielmehr auch für die regelmäßigen Sternpolyeder, die Kristallformen des regelmäßigen Systems und, falls nur von Projektionen auf Geraden die Rede ist, z. B. auch für die Flächennormalen eines regelmäßigen Körpers.

3. Fortsetzung.

Außer einem Vektor v, einem endlichen Punkte x und einem Stabe X kann man auch ein veränderliches Blatt ξ auf die Flächen eines regelmäßigen Körpers projizieren. Die senkrechte Projektion von ξ auf ein Blatt α der Flächenzahl oder dem Zahlwert Eins ist gleich dem inneren Produkt $\xi|\alpha$, mithin jene Projektion als Blatt gleich dem Produkt $[\xi|\alpha\,\alpha]$. Wir führen diesmal den Lückenausdruck $\overline{L}$ mit zwei vertauschbaren, durch l bezeichneten Lücken für α, sowie einer Lücke l_1 für ξ ein:

$$\overline{L} = [l_1|l\,l].$$

Jetzt erhält man für die als Blatt aufgefaßte senkrechte Projektion von ξ auf die i-te Fläche des Körpers

$$\xi_i = \overline{L}\,(\xi, \alpha_i^2)$$

und für das arithmetische Mittel $\bar{\xi}$ sämtlicher ξ_i, wenn wieder

$$\Sigma \alpha_i^2 = \varphi^{(2)}$$

gesetzt wird:

$$f\,\bar{\xi} = \bar{L}(\xi, \varphi^{(2)}).$$

Um den Zahlwert von $\bar{\xi}$ zu ermitteln, darf man sich wieder auf die Betrachtung eines Würfels beschränken. Läßt man ξ mit einer Fläche des Würfels zusammenfallen, so wird die Projektion von ξ auf die gegenüberliegende Seitenfläche des Würfels nach Zahlwert, Stellung und Sinn gleich ξ, also die Summe dieser beiden Blätter gleich $2\,\xi_m$, unter ξ_m das Blatt verstanden, das aus ξ entsteht, wenn man dieses Blatt parallel verlegt, bis seine Ebene durch den Mittelpunkt m des Würfels geht. Da die Projektionen von ξ auf die übrigen Flächen des Würfels gleich Null sind, erhält man

$$6\,\bar{\xi} = 2\,\xi_m, \qquad \bar{\xi} = \tfrac{1}{3}\,\xi_m,$$

oder allgemein

$$f\,\bar{\xi} = \frac{f}{3}\,\xi_m.$$

Daher besteht folgender Satz: Die Summe der als Blätter aufgefaßten senkrechten Projektionen irgendeines Blattes auf die Seitenflächen eines regelmäßigen Körpers ist, wenn die Anzahl seiner Flächen f beträgt, gleich dem $f/3$-fachen des mit seiner Ebene parallel nach dem Mittelpunkt des Körpers verlegten Blattes [6]).

Unter einem Bivektor haben wir bis jetzt ein durch zwei Vektoren bestimmtes Parallelogramm nach Stellung, Flächeninhalt und Umlaufsinn verstanden, das geometrische Bild eines Kräftepaars der Mechanik. Weil es dabei aber nur auf Stellung, Inhalt und Sinn ankommt, kann auch ein beliebiges ebenes Vieleck oder eine geschlossene ebene Kurve als Begrenzung dienen. Worauf schon Möbius hingewiesen hat [7]), geben die in fortlaufendem Sinne genommenen Seiten irgendeines windschiefen Vielecks, als Kräfte aufgefaßt, zusammen ein Kräftepaar, das bei jeder Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene dem Kräftepaar gleich wird, welches zu derselben Projektion des Vielecks gehört. Statt eines windschiefen Vielecks kann auch eine geschlossene Raumkurve genommen werden, zu der dann auch ein bestimmtes Kräftepaar, geometrisch ein Bivektor gehören wird. Es kann deshalb in dem gefundenen Satz über die senkrechten Projektionen eines Blattes auf die Seitenflächen eines regelmäßigen Körpers statt eines Blattes auch ein

[6]) Während Bivektoren geometrisch addiert werden, wie man Kräftepaare zusammensetzt, kommt bei Blättern hinzu, daß die Ebene der Summe zweier Blätter durch die Schnittlinie der Ebenen der beiden Blätter gehen muß.

[7]) F. A. Möbius, Lehrbuch der Statik (1837), S. 90.

windschiefes Vieleck oder auch eine geschlossene ebene oder räumliche Kurve genommen werden. (Der Umlaufsinn des Vielecks oder der Kurve ist selbstverständlich auf jede Projektion zu übertragen.)

Wieder bemerkt man, daß für die Flächen eines regelmäßigen Sternpolyeders usw., z. B. auch für ein System von regelmäßig angeordneten Ebenen eines Ebenenbündels, dieselben Sätze bestehen, wie für die Flächen eines regelmäßigen Körpers.

4. Überraum.

Bekanntlich gibt es in einem Raume von $d = 4$ Dimensionen sechs regelmäßige Polytope im engeren Sinne — also abgesehen von Sternpolytopen, vierdimensionalen Verallgemeinerungen der regelmäßigen Kristalle und sonstigen regelmäßigen Gebilden — im Falle $d > 4$ deren drei: Simplex, „Maßpolytop" — die mehrdimensionale Verallgemeinerung von Quadrat und Würfel — sowie das zu letzterem duale Polytop [8]). Wir dürfen uns darauf beschränken, ein Maßpolytop zu betrachten, so wie beim gewöhnlichen Raum für unsere Zwecke ein Würfel ausgereicht hat.

Zuerst wollen wir Schönhardts Vermutung über die Summe der Projektionen eines Vektors v auf die Kanten eines regelmäßigen Polytops in einem Raume von $d > 3$ Dimensionen prüfen. Ein Maßpolytop hat $k = d\,2^{d-1}$ Kanten. Von ihnen sind 2^{d-1} parallel, die übrigen senkrecht zu diesen. Läßt man also v mit einer Kante des Maßpolytops zusammenfallen, so wird, wenn man die Projektionen von v mit $v_1, v_2, \ldots, v_k$ bezeichnet:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k = 2^{d-1} v = \frac{k}{d} v,$$

womit Schönhardts Vermutung als richtig erwiesen ist.

Bezeichnet man wieder das arithmetische Mittel aus den Projektionen von v mit v', trägt auch v und v' an m an, so sind ihre Endpunkte x und x' entsprechende Punkte in zwei ähnlich zueinander liegenden ähnlichen Punktsystemen Σ und Σ' von d Dimensionen mit m als Doppelpunkt, wobei

$$d \cdot \overrightarrow{m\,x'} = \overrightarrow{m\,x}$$

ist, ganz wie in den Fällen $d = 2$, $d = 3$. Alles dies gilt nicht nur für ein Maßpolytop, sondern auch für die anderen regelmäßigen Polytope. Beim Ersetzen des Vektors v durch einen Stab X wird sich wieder ergeben, daß die senkrechten Projektionen von X auf die Kanten eines regelmäßigen Polytops einen durch dessen Mittelpunkt m gehenden Stab liefern.

---

[8]) Vgl. P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie II (1906), insbesondere S. 241 und 243.

Wir wollen zum Schluß noch die senkrechten Projektionen eines Vektors v und eines endlichen Punktes x auf die Seitenflächen, Seitenräume usw. allgemein auf die Seitenräume der Dimension h eines regelmäßigen Polytops in einem Raume von d Dimensionen untersuchen. Auch hier genügt es wieder, ein Maßpolytop zu betrachten. Bei einem solchen sind zu jeder Kante die übrigen Kanten, die Seitenflächen und Seitenräume teils parallel, teils aber senkrecht. Die Anzahl seiner Seitenräume der Dimension h ist

$$2^{d-h}\binom{d}{h},$$

ferner die Anzahl der Seitenräume, die zu einer Kante parallel sind, gleich

$$2^{d-h}\binom{d-1}{h}.$$

Das gibt, wenn man wieder v mit einer Kante des Maßpolytops zusammenfallen läßt und nun das arithmetische Mittel aus den fraglichen Projektionen mit $v^{(h)}$ bezeichnet:

$$v^{(h)} = \frac{h}{d}\, v.$$

Wieder liegt es nahe, v und $v^{(h)}$ von m aus abzutragen und alsdann ihre Endpunkte x und $x^{(h)}$, für welche

$$d \cdot \overrightarrow{m\, x^{(h)}} = h \cdot \overrightarrow{m\, x}$$

wird, einander zuzuordnen. Die Punkte $x^{(h)}$ bilden dann ein Punktsystem $\Sigma^{(h)}$, das zum System Σ der Punkte x ähnlich ist und ähnliche Lage hat, mit m als Doppelpunkt.

II. Sätze über Dreiecke, Tetraeder und Simplexe in höheren Räumen.

α) Projektion auf Seiten, Seitenflächen, Seitenräume.

5. Projektionen eines Punktes in der Ebene.

Heißen a, b, c die Ecken eines beliebigen Dreiecks und sein Schwerpunkt s:

$$3\, s = a + b + c, \tag{1}$$

dann ist, wenn die Projektionen eines beliebigen Punktes x der Ebene parallel den Schwerlinien des Dreiecks auf die zugehörigen Seiten mit x_1, x_2, x_3 und ferner die zu den Projektionen gehörigen Affinoren mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ bezeichnet werden:

$$\mathfrak{A}_1 a = \tfrac{1}{2}(b + c), \qquad \mathfrak{A}_2 a = \mathfrak{A}_3 a = a,$$

mithin

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)\, a = \tfrac{3}{2} a + \tfrac{1}{2}(a + b + c) = \tfrac{3}{2}(a + s).$$

Für die Punkte b und c erhält man ebenso:

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)\, b = \tfrac{3}{2}(b + s), \quad (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)\, c = \tfrac{3}{2}(c + s),$$

und folglich, da ein beliebiger Punkt x aus a, b und c sich linear zusammensetzen läßt, auch für einen solchen:

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)\, x = \tfrac{3}{2}(x + s). \tag{2}$$

Für die Punkte x_1, x_2, x_3 hat man

$$x_i = \mathfrak{A}_i x, \quad i = 1, 2, 3,$$

folglich ist

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = x' = \tfrac{1}{2}(x + s), \tag{3}$$

in Worten:

Projiziert man einen beliebigen Punkt x parallel den Schwerlinien eines Dreiecks auf die zugehörigen Seiten, so liegt der Schwerpunkt x' des von den Projektionen gebildeten Dreiecks in der Mitte zwischen x und dem Schwerpunkt s des ursprünglichen Dreiecks.

Dieser Satz kann ohne Zweifel elementar-geometrisch bewiesen werden.

Augenscheinlich sind x und x' entsprechende Punkte zweier ähnlich liegenden ähnlichen Punktsysteme Σ und Σ', deren selbstentsprechender Punkt s ist. Einem beliebigen Vektor v in Σ entspricht in Σ' ein halb so langer Vektor v' derselben Richtung:

$$v' = \tfrac{1}{2} v,$$

oder wenn die Projektionen von v parallel den Schwerlinien des Dreiecks auf die zugehörigen Seiten v_1, v_2, v_3 heißen:

$$v_i = \mathfrak{A}_i v, \quad i = 1, 2, 3,$$

so kommt

$$v_1 + v_2 + v_3 = \tfrac{3}{2} v, \tag{4}$$

welches der in der Einleitung angeführte Satz von Schönhardt ist.

Um auch auf der rechten Seite von (2) Affinoren anwenden zu können, wählen wir zunächst $\mathfrak{E}$ als Zeichen für die identische Transformation, bei der alle Punkte der Ebene ihre Lage behalten und alle Vektoren unverändert bleiben. Als einen anderen Grenzfall einer affinen Umbildung können wir den ansehen, in welchem das ganze ebene Punktfeld zu einem einzigen Punkte zusammenschrumpft. Wir nennen das eine totale Schrumpfung und benützen als Zeichen dafür $\mathfrak{T}_s$, wobei der Index s den Punkt angeben soll, auf den das ganze Punktfeld sich zusammenzieht. Wir haben also bei einem beliebigen Punkt x:

$$\mathfrak{E} x = x, \quad \mathfrak{T}_s x = s, \tag{5}$$

nd können mithin (2) auch so schreiben:

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3)\, x = \tfrac{3}{2}(\mathfrak{E}x + \mathfrak{T}_s x),$$

as zwischen den fünf Affinoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{T}_s$ die homogene lineare eziehung ergibt:

6) $$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 = \tfrac{3}{2}(\mathfrak{E} + \mathfrak{T}_s).$$

Bemerkenswert ist wohl, daß zur Herleitung der vorhergehenden Sätze ie Möbiussche Addition von Punkten ausgereicht hat, also kein inneres oder ußeres Produkt nötig gewesen ist. Auch die weiteren Untersuchungen in iesem Abschnitt ließen sich zu einem großen Teil ganz ebenso elementar urchführen, man kommt aber schneller zum Ziel, wenn man wie in Abschnitt I uch die Grassmannschen äußeren Produkte von Punkten und anderen geoietrischen Elementen benutzt, was von jetzt an wieder geschehen soll. Weitere bkürzungen ergeben sich, wenn man Dyadenrechnung verwendet, was berdies den Vorteil hat, für das Bestehen der vorigen Sätze und ihrer späteren erallgemeinerungen den tieferen Grund erkennen zu lassen.

6. Verallgemeinerungen.

Wir wollen die Sätze unter Nr. 5 nun verallgemeinern, indem wir die rojektionen eines Punktes x nicht parallel den Schwerlinien eines Dreiecks uf die zugehörigen Seiten untersuchen, sondern parallel den von einem eliebigen Punkte p ausgehenden Ecktransversalen, aber sogleich ganz allgeein für den Fall, daß ein Simplex mit n Ecken in einem linearen Raume R_d on $d = n - 1$ Dimensionen gegeben ist und x auf dessen Seitenräume von $d - 1$) Dimensionen projiziert wird. Die Ecken seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Der unkt p sei gegeben durch

1) $$\mu p = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n, \qquad \mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n.$$

äßt man auch negative Massen zu, so kann p jede beliebige Lage in dem etreffenden Raume haben. Liegt p im Endlichen, so ist $\mu \gtrless 0$. Der Fall $= 0$ muß für sich untersucht werden.

Um die Rechnung wie die Formeln zu vereinfachen, denken wir uns, ie Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wären die Ecken eines Polarsimplex in einem icht ausgearteten Polarsystem innerhalb R_d. Als Zeichen dieser Polarität enutzen wir einen senkrechten Strich vor dem, den betreffenden Punkt ezeichnenden Buchstaben, so daß $|a_i$ (gelesen „Ergänzung a_i") das äußere rodukt aller übrigen d Punkte vorstellt, deren Verbindungsraum von $(d - 1)$ imensionen apolar zu a_i ist, und zwar in solcher Reihenfolge, daß

2) $$[a_i | a_i] = 1$$

wird. Für zwei ungleiche Indizes i und j ist offenbar immer

$$[a_i|a_j] = 0. \tag{3}$$

Da der Vektor von p nach a_i gleich der Differenz der Punkte a_i und p ist [9]):

$$\overrightarrow{p\,a_i} = a_i - p,$$

so wird bis auf ihre noch zu bestimmende Masse die Projektion x_i von x parallel $[p\,a_i]$ auf den a_i gegenüberliegenden Seitenraum $|a_i$ gleich dem fortlaufenden äußeren Produkt

$$[(a_i - p)\,x\,p_i],$$

also hat man, wenn die Masse eines Punktes durch Vorsetzen von mod bezeichnet wird:

$$\operatorname{mod} x_i = [(a_i - p)|a_i],$$

oder wegen (1):

$$\operatorname{mod} x_i = (\mu - \mu_i) : \mu. \tag{4}$$

Daher ist

$$\sum_1^n (\mu - \mu_i)\,x_i = \mu \sum_1^n [(a_i - p)|a_i]. \tag{5}$$

Die Möglichkeit einer bequemen symbolischen Darstellung erzielt man durch Einführen der folgenden n Lückenausdrücke mit je einer Lücke, die auch bei der Darstellung der Projektionen eines Stabes und eines Blattes (Nr. 7 und Nr. 8) sich wieder werden verwenden lassen:

$$L_1 = [(a_1 - p) * |a_1], L_2 = [(a_2 - p) * |a_i], \ldots, L_n = [(a_n - p) * |a_n]. \tag{6}$$

Nämlich man kann jetzt schreiben:

$$(\mu - \mu_i)\,x_i = \mu\,L_i x. \tag{7}$$

Bezeichnet Ω den linearen Raum von $(d-1)$ Dimensionen, den die unendlich fernen Punkte von R_d bilden, so läßt sich der Vektor von p nach a_i auch darstellen durch

$$\overrightarrow{p\,a_i} = [p\,a_i\,\Omega] \text{ [10])}.$$

Folglich wird auch

$$(\mu - \mu_i)\,x_i = \mu\,[p\,a_i\,\Omega\,x|a_i]. \tag{8}$$

Man sieht aus dieser Darstellung, daß die Summe

$$\sum_1^n (\mu - \mu_i)\,x_i$$

---

[9]) Siehe meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, I 1, S. 23.

[10]) Für die Ebene und für den gewöhnlichen Raum siehe meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, I 1, S. 149.

aus der projektiv-invarianten, d. h. von der Wahl der Punkte a_i unabhängigen Dyadensumme

$$J_{1,n-1} = [a_1, |a_1] + [a_2, |a_2] + \ldots + [a_n, |a_n]$$

dadurch erhalten wird, daß man jedesmal das Linksglied nach Vorsetzen des Faktors p mit Ωx durch äußere Multiplikation verbindet und nachher das äußere Produkt für das durch ein Komma dargestellte dyodische („unbestimmte") Produkt nimmt — alles erlaubte Operationen [11]).

Zur Ermittlung von

$$\Sigma (\mu - \mu_i)\, x_i = \mu \Sigma L_i\, x$$

setzen wir

$$p = a_1, \qquad x = a_2.$$

Das zu $i = 1$ gehörige Glied verschwindet nun, dasjenige für $i = 2$ wird

$$L_2 x = [(a_2 - a_1)\, a_2\, |a_2] = -\,[a_1\, a_2\, |a_2] = a_1 = p,$$

die übrigen $(n - 2)$ Glieder, für welche $i > 2$ ist, werden, weil $[a_1\, a_2\, |a_i]$ in diesem Falle verschwindet:

$$L_i x = [(a_i - a_1)\, a_2\, |a_i] = [a_i a_2\, |a_i] = a_2 = x.$$

Wir haben so als endgültiges Ergebnis gefunden:

(9) $$\Sigma (\mu - \mu_i)\, x_i = \mu\, ((n - 2)\, x + p),$$

d. h. in Worte gefaßt: Hat man den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. die Massen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ beizulegen, damit ihr Schwerpunkt auf p fällt, und ist μ die Gesamtmasse, dann liegt der Schwerpunkt x' der bzw. mit den Massen $(\mu - \mu_1)$, $(\mu - \mu_2), \ldots, (\mu - \mu_n)$ versehenen Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf der Strecke $\overrightarrow{p\,x}$, und zwar so, daß

$$\overrightarrow{p\,x'} = \frac{n-2}{n-1}\,\overrightarrow{p\,x} = \frac{d-1}{d}\,\overrightarrow{p\,x}$$

ist. Durch Zuordnung von x und x' entstehen im R_d zwei ähnlich zueinanderliegende Punktsysteme Σ und Σ', wobei p sich selbst entspricht. Es folgt hieraus auch ein Satz über die Projektionen eines Vektors, von welchem der unter Nr. 5 bewiesene Schönhardtsche Satz ein Sonderfall ist, weil er sich für $n = 3$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ ergibt, aber wir werden in der nächsten Nummer einen allgemeineren Satz kennenlernen.

Zu den n Parallelprojektionen, die ausgeführt wurden, mögen die Affinoren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ gehören. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Inhalt von Gleichung (9) auch durch die Gleichung ausdrücken:

(10) $$\Sigma (\mu - \mu_i)\, \mathfrak{A}_i = \mu\, ((n - 2)\, \mathfrak{E} + \mathfrak{T}_p).$$

[11]) Siehe meine Abhandlung „Über Dyaden und Kontrajektivität", Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 26 (1917), S. 10.

Wird p in dem Falle $\mu = 0$ durch den Vektor

$$\Sigma \mu_i a_i = u$$

vertreten, so daß alle aufzuführenden Projektionen parallel u stattfinden, dann vereinfacht sich Gleichung (9) zu

$$- \Sigma \mu_i x_i = u,$$

was zusammen mit der vorhergehenden Gleichung ergibt:

$$\Sigma (a_i + x_i) = 0,$$

oder wenn man den Mittelpunkt der Strecke $\overline{a_i x}$ mit $\bar{x}_i$ bezeichnet:

$$2 \bar{x}_i = a_i + x_i,$$

d. h. es liegen in diesem Falle die Punkte $\bar{x}_i$ sämtlich in einem linearen Gebiet von $n - 2 = d - 1$ Dimensionen, und bei festen Werten der μ_i, also einer und derselben Richtung von u, sind die zu verschiedenen Lagen von x gehörigen Systeme jener Mittelpunkte affin zueinander.

7. Projektionen eines Stabes.

Die Annahmen und Bezeichnungen der Nr. 6 beibehaltend, denken wir uns, wie früher einen Punkt x, jetzt einen Stab X parallel den Transversalen $[p a_i]$ des gegebenen Simplex auf die Seitenräume $|a_i$ projiziert und bezeichnen die i-te Projektion mit X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wir nehmen an, daß bei jeder Projektion die Richtung von X auf die Richtung von X_i übertragen wird. Aus der Darstellung

$$[(a_i - p) X \,|\, a_i]$$

sieht man, daß X_i denselben Faktor wie x_i erhält, nämlich

$$(\mu - \mu_i) : \mu,$$

und aus der Darstellung

$$[p a_i \, \Omega \, X \,|\, a_i],$$

daß die Summe

$$\Sigma (\mu - \mu_i) X_i$$

ebenfalls von der Lage der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ unabhängig ist. Wir setzen in diesem Falle, um den Wert jener Summe zu finden:

$$p = a_1, \quad X = [a_2 a_3].$$

Für $i = 1$ erhält man wieder Null, für $i = 2$ dagegen

$$[(a_2 - a_1) a_2 a_3 \,|\, a_2] = - [a_1 a_2 a_3 \,|\, a_2] = [a_1 a_3] = [p a_3],$$

und für $i = 3$:

$$[(a_3 - a_1) a_2 a_3 \,|\, a_3] = - [a_1 a_2 a_3 \,|\, a_3] = - [a_1 a_2] = - [p a_2].$$

Diese beiden Glieder zusammengefaßt geben

$$[p\,(a_3 - a_2)].$$

Es ist aber

$$(a_3 - a_2) = \overrightarrow{a_2 a_3},$$

der zum Stabe $[a_2 a_3] = X$ gehörige Vektor, den man, wie wir aus Nr. 6 wissen, durch $[X\,\Omega]$ darstellen kann, also $[p\,(a_3 - a_2)]$ der, ohne Änderung seiner Länge und Richtung, mit seiner Linie nach p verlegte Stab X, den wir mit X_p bezeichnen wollen:

$$X_p = [p \cdot X\,\Omega]. \tag{1}$$

Für $i > 3$, also für die noch übrigen $(n-3)$ Glieder erhält man endlich:

$$[(a_i - a_1)\,a_2 a_3\,|\,a_i] = [a_2 a_3] = X.$$

Hiermit besteht folgende Gleichung:

$$\Sigma\,(\mu - \mu_i)\,X_i = \mu\,((n-3)\,X + X_p) \tag{2}$$

als Gegenstück zu Gleichung (9) in Nr. 6. Die Stäbe $(n-3)\,X$ und X_p kann man, wenn $n > 3$ ist, zu einem Stabe $(n-2)\,X'$ vereinigen:

$$(n-2)\,X' = (n-3)\,X + X_p, \tag{3}$$

so der Stab X' dieselbe Länge und Richtung hat wie X und X_p, während seine Linie den Abstand der Linie des Stabes X vom Punkte p im Verhältnis $1 : (n-3)$ teilt. Es ist jetzt

$$\Sigma\,(\mu - \mu_i)\,X_i = (n-2)\,X'. \tag{4}$$

Hiernach lassen sich, wenn man X und X_i als Kräfte auffaßt, die Kräfte

$$(\mu - \mu_1)\,X_1,\ (\mu - \mu_2)\,X_2,\ \ldots,\ (\mu - \mu_n)\,X_n$$

zu einer Einzelkraft zusammensetzen.

Projiziert man statt eines Stabes X nur einen freien Vektor v und nennt seine Projektionen $v_1, v_2, \ldots, v_n$, so ist natürlich

$$\Sigma\,(\mu - \mu_i)\,v_i = (n-2)\,v,$$

aber diese Gleichung sagt viel weniger aus, als Gleichung (2) oder (4). So ist im Falle $n = 3$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, $p = s$ die Gleichung

$$X_1 + X_2 + X_3 = \tfrac{3}{2}\,X_s,$$

zufolge die als Kräfte aufgefaßten Projektionen v_1, v_2, v_3 eines Vektors v die durch s gehende Resultante haben, eine wesentliche Ergänzung des fraglichen Satzes von Schönhardt.

X und X' entsprechen einander in zwei ähnlich liegenden ähnlichen Grundsystemen, wobei jeder durch p gehende Stab sich selbst entspricht. Beim

Übergang vom ersten System zum zweiten findet eine Verkürzung der Längen aller Stäbe im Verhältnis $(n-2):(n-3) = (d-1):(d-2)$ statt.

Gegenüber Punkten und Vektoren als Größen erster Stufe sind Stäbe Größen zweiter Stufe. Deshalb wollen wir bei der Projektion, die X_i liefert, den zugehörigen Affinor mit $\mathfrak{A}_i^{\mathrm{II}}$ (gelesen „$\mathfrak{A}_i$ oben zwei“) bezeichnen [12]). Der Inhalt von Gleichung (2) kann deshalb auch durch folgende Gleichung zwischen $(n-2)$ derartigen Affinoren wiedergegeben werden:

$$\sum(\mu-\mu_i)\,\mathfrak{A}_i^{\mathrm{II}} = \mu\,((n-3)\,\mathfrak{E}^{\mathrm{II}} + \mathfrak{T}_p^{\mathrm{II}}). \tag{5}$$

Ist $\mu = 0$, $\sum \mu_i a_i = \boldsymbol{u}$, so tritt an die Stelle der Gleichung (2) die Gleichung

$$-\sum \mu_i X_i = [\boldsymbol{u}\,X]\,\Omega. \tag{2'}$$

Die Kräfte $\mu_1 X_1, \mu_2 X_2, \ldots, \mu_n X_n$ sind jetzt zusammen einem Kräftepaar gleichwertig, gebildet aus X und derjenigen Kraft, welche aus X durch Verschiebung um $\boldsymbol{u}$ sowie Umkehrung der Richtung entsteht.

8. Projektionen eines Blattes.

Es werde jetzt ein Blatt ξ denselben Parallelprojektionen unterworfen, wie vorher ein Punkt x und ein Stab X. Die Projektionen seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; den Umlaufsinn von ξ wird man auf die Projektionen von ξ übertragen. Die Darstellungen

$$L_i\xi = [p a_i\,\Omega\,\xi\,|\,a_i] = [(a_i - p)\,\xi\,|\,a_i]$$

zeigen uns, daß nicht nur ξ_i wieder den Faktor $(\mu-\mu_i):\mu$ erhält, sondern auch die Summe $\sum L_i\xi$ nicht von der Lage der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ abhängt. Wir wollen in dieser Summe

$$p = a_1,\ \xi = [a_2 a_3 a_4]$$

setzen. Dann kommt, wenn man die Gleichungen (2) und (3) der Nr. 6 berücksichtigt, für $i = 1$:

$$L_1\,\xi = 0,$$

für $i = 2$:

$$L_2\,\xi = [(a_2 - a_1)\,a_2 a_3 a_4\,|\,a_2] = -[a_1 a_2 a_3 a_4\,|\,a_2] = [a_1 a_3 a_4] = [p a_3 a_4],$$

für $i = 3$:

$$L_3\xi = [(a_3 - a_1)\,a_2 a_3 a_4\,|\,a_3] = -[a_1 a_2 a_3 a_4\,|\,a_3] = [a_1 a_4 a_2] = [p a_4 a_2],$$

für $i = 4$:

$$L_4\xi = [(a_4 - a_1)\,a_2 a_3 a_4\,|\,a_4] = -[a_1 a_2 a_3 a_4\,|\,a_4] = [a_1 a_2 a_3] = [p a_2 a_3]$$

[12]) Diese Schreibweise — römische Ziffern als Exponenten — dient zur Unterscheidung des „bezüglichen“ Quadrats wie der höheren „bezüglichen Potenzen“ von den Symbolen für die Wiederholungen einer affinen Transformation, siehe meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, I 1, S. 217 und 322.

Die letzten drei Ausdrücke geben zusammen

$$(L_2 + L_3 + L_4)\,[a_2 a_3 a_4] = [p\,(a_3 a_4) + a_4 a_2 + a_2 a_3].$$

Aber es ist

$$[a_3 a_4 + a_4 a_2 + a_2 a_3]$$

gleich dem zum Blatte

$$[a_2 a_3 a_4] = \xi$$

gehörigen Bivektor, für den man $[\xi\,\Omega]$ schreiben kann [13]).

Mithin wird

$$(L_2 + L_3 + L_4)\,[a_2 a_3 a_4] = [p \cdot \xi\,\Omega].$$

Es ist dies das Blatt, welches aus dem Blatte ξ erhalten wird, wenn man dieses parallel verschiebt, bis seine Ebene durch p geht; wir wollen es mit ξ_p bezeichnen:

1) $$[p \cdot \xi\,\Omega] = \xi_p.$$

Für $i > 4$ kommt:

$$L_i\,[a_2 a_3 a_4] = [(a_i - a_1)\,a_2 a_3 a_4\,|\,a_i] = [a_2 a_3 a_4] = \xi.$$

Daher ist, $n \gtrless 4$ vorausgesetzt:

2) $$\Sigma\,(\mu - \mu_i)\,\xi_i = \mu\,((n-4)\,\xi + \xi_p).$$

Im Falle $n > 4$ lassen sich die beiden Blätter auf der rechten Seite dieser Gleichung zu einem Blatt $(n-3)\,\xi'$ zusammensetzen:

3) $$(n-4)\,\xi + \xi_p = (n-3)\,\xi',$$

so daß ξ' nach Stellung, Inhalt und Sinn mit ξ und ξ_p übereinstimmt, während eine Ebene den Abstand der Ebenen von ξ und ξ_p im Verhältnis $1 : (n-4)$ teilt. Nach Einführung dieses Blattes kann man statt Gleichung (2) schreiben:

4) $$\Sigma\,(\mu - \mu_i)\,\xi_i = (n-3)\,\xi'.$$

Ordnet man die Ebenen von ξ und ξ' einander zu, so entstehen zwei ähnlich zueinander liegende ähnliche Ebenensysteme; jede durch p gehende Ebene entspricht sich selbst.

Weil in der Punktrechnung ein Blatt eine Größe dritter Stufe ist, bezeichnen wir den zur i-ten Projektion von ξ gehörigen Affinor mit $\mathfrak{A}_i^{\mathrm{III}}$ (gelesen „$\mathfrak{A}_i$ oben drei"). Wir können so statt Gleichung (2) schreiben:

5) $$\Sigma\,(\mu - \mu_i)\,\mathfrak{A}_i^{\mathrm{III}} = \mu\,((n-4)\,\mathfrak{E}^{\mathrm{III}} + \mathfrak{T}_p^{\mathrm{III}}).$$

Setzt man in dem Ausnahmefall $\mu = 0$ wieder

$$\Sigma\,\mu_i a = u,$$

[13]) Vgl. für den gewöhnlichen Raum meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, I 1, S. 149, Gleichung (5).

so verwandelt sich Gl. (2) in

$$-\sum \mu_i \xi_i = [\boldsymbol{u} \cdot \xi \Omega], \tag{2'}$$

d. h. es wird $\sum \mu_i \xi_i$ ein unendlich fernes Blatt, von welchem der endliche Vertreter der zu $[\xi \boldsymbol{u}]$ gehörige Trivektor ist.

Anmerkung. Ein Vergleich der Ergebnisse der Nr. 6, 7 und 8 macht es deutlich, was beim Fortsetzen dieser Untersuchungen sich ergäbe. Der nächste Schritt müßte sein, einen „Block", d. h. ein orientiertes Raumstück von bestimmtem Rauminhalt vorzunehmen, und man fände, wenn man den Block mit Ξ und seine i-te Projektion mit Ξ_i bezeichnete:

$$\sum (\mu - \mu_i)\, \Xi_i = \mu\, ((n-5)\, \Xi + \Xi_p) \cdot (n \lesseqgtr 5).$$

9. Fortsetzung. Projektionen von Polygonen und Kurven.

Im folgenden werden wir uns auf den Fall $n = 4$, also ein Tetraeder im gewöhnlichen Raume beschränken. Wie unter Nr. 3, kann man auch statt eines Blattes ein Polygon oder eine geschlossene Kurve betrachten. Der in Nr. 8, Gleichung (2) enthaltene Satz läßt sich nun so verallgemeinern:

Projiziert man ein windschiefes Polygon oder auch eine geschlossene Raumkurve parallel den sich in einem beliebigen Punkte

$$p = (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4) : \mu$$

schneidenden Transversalen eines Tetraeders mit den Ecken a_1, a_2, a_3, a_4 auf die zugehörigen Seitenflächen, so begrenzen die Projektionen vier Blätter, die bzw. mit $(\mu - \mu_1)$, $(\mu - \mu_2)$, $(\mu - \mu_3)$, $(\mu - \mu_4)$ multipliziert und geometrisch addiert ein Blatt ergeben, dessen Ebene durch p geht, während es nach Flächeninhalt und Sinn gleich dem μ-fachen des Bivektors ist, welcher zu dem Polygon oder der Kurve gehört. (Der Umlaufsinn des Polygons oder der Kurve wird wieder auf jede Projektion übertragen.)

β) Projektion auf Kanten und ihre Gegenräume.

10. Projektionen eines Punktes.

Über die Ecken $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des gegebenen Simplex machen wir wieder dieselben Annahmen wie unter Nr. 6. Auch sei p wieder ein beliebiger Punkt, gegeben durch

$$\mu p = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n) \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n. \tag{1}$$

A_{ij} heiße die Kante, welche die Ecken a_i und a_j verbindet:

$$A_{ij} = [a_i a_j]. \tag{2}$$

Wir nennen Gegenraum der Kante A_{ij} ($n \geqq 4$ vorausgesetzt) den Verbindungsraum derjenigen $(n-2)$ Ecken, unter welchen a_i und a_j fehlen. Er ist bei unseren Annahmen durch $|A_{ij}$ dargestellt. Offenbar hat man:

$$[A_{ij}|A_{ij}] = 1. \tag{3}$$

Ferner, wenn von den Indizes k und l keiner gleich i oder j ist:

$$[A_{ij}|A_{kl}] = 0. \tag{4}$$

Unsere früheren Ergebnisse stützten sich von Nr. 6 an auf die invariante Dyadensumme $J_{1,n-1}$; an ihre Stelle treten im folgenden $J_{2,n-2}$ und $J_{n-2,2}$ in der Form

$$J_{2,n-2} = \Sigma A_{ij}, |A_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

$$J_{n-2,2} = \Sigma |A_{ij}, A_{ij}, \qquad i<j. \tag{6}$$

Die Projektion des beliebigen Punktes x parallel der Verbindungsebene von p mit der Kante A_{ij} auf den zugehorigen Gegenraum $|A_{ij}$ heiße x_{ij}. Um die Masse dieses Punktes zu bestimmen, benutzen wir, daß bei einer Parallelprojektion wie bei jeder affinen Umbildung die Massen aller Punkte in demselben Verhältnis geändert werden. Die ebenso wie x_{ij} gebildete Projektion von p ist aber der Schnittpunkt der Verbindungsebene von p und A_{ij} mit $|A_{ij}$. Daher hat man

$$\operatorname{mod} x_{ij} = (\mu - \mu_i - \mu_j) : \mu \tag{7}$$

Die Projektion von x parallel dem Verbindungsraum von p mit $|A_{ij}$ auf A_{ij} werde $\bar{x}_{ij}$ genannt. Die Masse dieses Punktes wird offenbar

$$\operatorname{mod} \bar{x}_{ij} = (\mu_i + \mu_j) : \mu. \tag{8}$$

Man hat also

$$(\mu - \mu_i - \mu_j)\, x_{ij} = [p\, A_{ij}\, \Omega x\, |A_{ij}], \tag{9}$$

$$(\mu_i + \mu_j)\, \bar{x}_{ij} = \mu\, [p\, |A_{ij}\, \Omega x\, A_{ij}]. \tag{10}$$

Auf der rechten Seite der letzten beiden Gleichungen kann x symbolisch herausgesetzt werden, so daß die Lückenausdrücke entstehen

$$L_{ij} = [pA_{ij}\, \Omega * |A_{ij}], \tag{11}$$

$$\bar{L}_{ij} = [p\, |A_{ij}\, \Omega * A_{ij}], \tag{12}$$

und man wird auf der rechten Seite von Gleichung (9) und Gleichung (10) schreiben können: $\mu L_{ij} x$ bzw. $\mu \bar{L}_{ij} x$.

Um die über alle Wertepaare ij zu erstreckende Summe von $L_{ij}x$ wie von $\bar{L}_{ij}x$ zu finden, setzen wir, wie schon unter Nr. 6:

$$p = a_1, \qquad x = a_2.$$

Weil ein Vertauschen von i und j an x_{ij} und $\bar{x}_{ij}$ nichts ändert, setzen wir immer $i < j$ voraus. Die beiden auf x_{ij} und auf $\bar{x}_{ij}$ bezüglichen Fälle müssen getrennt behandelt werden.

a) Projektion auf die Gegenräume von Kanten.

Wie man leicht nachprüft, ergibt sich folgendes:

1. Für $i = 1$ verschwinden $(n-1)$ Glieder von

$$\Sigma L_{ij} x.$$

2. Für $i = 2$, $j \leqq 3$ werden $(n-2)$ Glieder gleich a_1, also gleich p.

3. Für $i > 2$, $j > 3$, also die noch übrigen $(n-2)\,(n-3) : 2$ Glieder ergibt sich a_2, d. h. x.

Mithin bestehen die Gleichungen:

$$\Sigma (\mu - \mu_i - \mu_j)\, x_{ij} = \mu \frac{n-2}{2} ((n-3)\, x + 2\, p), \tag{13}$$

oder als homogene lineare Gleichung zwischen Affinoren geschrieben, falls nämlich der zur Projektion auf $|A_{ij}$ gehörige Affinor $\mathfrak{A}_{ij}$ genannt wird:

$$\Sigma (\mu - \mu_i - \mu_j)\, \mathfrak{A}_{ij} = \mu \frac{n-2}{2} ((n-3)\, \mathfrak{E} + 2\, \mathfrak{T}_p). \tag{14}$$

Gleichung (13) sagt aus, daß wenn man dem Punkte x_{ij} die Masse $(\mu - \mu_i - \mu_j)$ beilegt, der Schwerpunkt x' aller dieser Punkte — ihre Anzahl beträgt $n\,(n-1) : 2$ — auf die Strecke von p nach x fällt und sie im Verhältnis $(n-3) : 2$ teilt. Durch Zuordnung von x und x' entstehen wieder zwei ähnlich zueinander liegende ähnliche Punktsysteme Σ und Σ' von $(n-1)$ Dimensionen. Hieraus ergibt sich auch ein Satz über die Projektionen eines Vektors, wir werden aber unter Nr. 11 einen Satz kennenlernen, der jenen umfaßt.

b) Projektionen auf die Kanten.

Im Falle des Punktes $\bar{x}_{ij}$, also nun des Ausdrucks

$$[a_1 \,|\, A_{ij}\, \Omega a_2 \cdot A_{ij}]$$

ist es vielleicht erwünscht, auf die nötigen Umformungen etwas näher einzugehen [14]).

Es ist $\bar{x}_{ij}$ nur dann von Null verschieden, wenn x_{ij} verschwindet, also in den $(n-1)$ Fällen $i = 1$, $j \leqq 2$.

Für $j = 2$ erhält man

$$\begin{aligned}[a_1 \,|\, A_{12}\, \Omega a_2 \cdot A_{12}] &= [a_1\, (|\, a_1 \,|\, a_2)\, \Omega a_2 \cdot a_1 a_2] - [a_2\, (|\, a_2\, \Omega)\, a_1 a_2] \\ &= a_2 - a_1 + a_1 = a_2 = x.\end{aligned}$$

[14]) Hier und bei den späteren Umformungen kommt besonders in Betracht Grassmanns Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 172 (Werke I 2, S. 130).

für $j > 2$:

$$[a_1 (|a_1|a_j)\, \Omega a_2 \cdot a_1 a_2] = [|a_j\, \Omega a_2 \cdot a_1 a_2] = [|a_j \cdot a_1 a_2] = a_1 = p.$$

Daher ist

$$\Sigma (\mu_i + \mu_j)\, \bar{x}_{ij} = \mu\, (x + (n-2)\, p). \tag{15}$$

$$\Sigma (\mu_i + \mu_j)\, \mathfrak{A}_{ij} = \mu\, (l + (n-2)\, \mathfrak{T}_p). \tag{16}$$

Der Schwerpunkt $\bar{x}'$ der Punkte $\bar{x}_{ij}$ liegt, wie man aus Gleichung (15) sieht, auch auf der Strecke von p nach x, teilt sie aber im Verhältnis $1 : (n-2)$. Die beiden Punkte x' und $\bar{x}'$ fallen dann und nur dann zusammen, wenn $n = 4$ ist, wenn also ein Tetraeder im gewöhnlichen Raume vorliegt.

Denkt man sich, wenn $n > 4$ ist, zu jedem Punkte x auch den ihm entsprechenden $\bar{x}'$ konstruiert, so bilden die letzteren Punkte ein System $\bar{\Sigma}'$, das ebenfalls aus dem System Σ durch Zusammenschrumpfen mit p als festem Punkt entsteht, nur sind bei Σ' und $\bar{\Sigma}'$ die Verkürzungsverhältnisse verschieden.

In dem Sonderfalle

$$\mu = 0, \quad \Sigma \mu_i a_i = \boldsymbol{u}$$

wird

$$\Sigma - (\mu_i + \mu_j)\, x_{ij} = (n-2)\, \boldsymbol{u}, \quad \Sigma (\mu_i + \mu_j)\, \bar{x}_{ij} = (n-2)\, \boldsymbol{u},$$

$$\Sigma (\mu_i + \mu_j)\, (x_{ij} + \bar{x}_{ij}) = 0,$$

d. h. es bilden die bzw. mit den Massen $(\mu_i + \mu_j)$ versehenen Punkte x_{ij} wie auch die mit denselben Massen versehenen Punkte $\bar{x}_{ij}$ ein sogenanntes magnetisches Massensystem, wobei die sogenannten Achsen der beiden Systeme einander entgegengesetzt sind, und die wieder mit denselben Massen versehenen Mittelpunkte der Strecken $x_{ij}\, \bar{x}_{ij}$ sind linear abhängig, z. B. im Falle $n = 4$, Tetraeder im gewöhnlichen Raume, liegen sie in einer Geraden und ihre Abstandsverhältnisse sind immer dieselben, wie auch x liegen mag.

11. Projektionen eines Stabes.

Die Projektionen eines beliebigen Stabes X parallel der Verbindungsebene von p mit der Kante A_{ij} auf den Gegenraum dieser Kante soll X_{ij} genannt werden, und $\bar{X}_{ij}$ seine Projektion parallel dem Verbindungsraum von p mit dem Gegenraum dieser Kante auf die Kante A_{ij}, so daß, wenn man die — nach Annahme einer positiven Richtung mit bestimmtem Vorzeichen versehene — Längenzahl durch Vorsetzen von mod bezeichnet,

$$\mathrm{mod}\, X_{ij} = [p A_{ij}\, \Omega X \,|\, A_{ij}]$$

und

$$\mathrm{mod}\, \bar{X}_{ij} = [p \,|\, A_{ij}\, \Omega X\, A_{ij}]$$

wird. Wie der Vergleich dieser Ausdrücke mit denen für x_{ij} und $\bar{x}_{ij}$ in Nr. 10 zeigt, ist

$$\operatorname{mod} X_{ij} = \operatorname{mod} x_{ij}, \quad \operatorname{mod} \bar{X}_{ij} = \operatorname{mod} \bar{x}_{ij},$$

so daß man hat

(1) $$(\mu - \mu_i - \mu_j) X_{ij} = \mu [p A_{ij} \Omega X | A_{ij}] = \mu L_{ij} X,$$

(2) $$(\mu_i + \mu_j) \bar{X}_{ij} = \mu [p | A_{ij} \Omega X A_{ij}] = \mu \bar{L}_{ij} X.$$

Zur Ermittlung der über alle Wertepaare der Indizes i und j erstreckten Summe der Ausdrücke in den Gleichungen (1) und (2) setzen wir, wie unter Nr. 7,

$$p = a_1, \quad X = [a_2 a_3].$$

a) Projektion auf die Gegenräume der Kanten.

Wir dürfen wieder $i < j$ annehmen.

Das Produkt

$$[a_1 A_{ij} \Omega a_2 a_3 | A_{ij}] = [a_1 a_i a_j \Omega a_2 a_3 | a_i | a_j],$$

in welchem statt

$$[a_1 a_i a_j \Omega] \text{ auch } [a_1 a_i + a_i a_j + a_j a_1]$$

geschrieben werden kann, wird Null sowohl für $i = 1$ wie für $i = 2, j = 3$. Ferner erhält man für $i = 2, j > 3$:

$$L_{ij} = [a_1 a_3] = [p a_3]$$

und für $i = 3, j > 3$:

$$- [a_1 a_2] = - [p a_2],$$

so daß die letzten beiden Fälle, deren es $(n - 3)$ gibt, zusammen liefern:

$$(n - 3) [p (a_3 - a_2)] = (n - 3) [p \cdot X \Omega] = (n - 3) X_p.$$

Für $i > 3, j > 4$, also in den jetzt noch übrigen $(n - 3)(n - 4) : 2$ Fällen, ergibt sich immer

$$[a_2 a_3] = X.$$

Man hat also schließlich:

(3) $$\Sigma (\mu - \mu_i - \mu_j) X_{ij} = \mu \frac{n-3}{2} ((n - 4) X + 2 X_p).$$

b) Projektion auf die Kanten.

Wieder die Gleichungen (2) und (3) unter Nr. 6 benutzend, erhält man für $i = 1, j = 2$:

$$[a_1 | a_1 | a_2 \Omega a_2 a_3 \cdot a_1 a_2] = - [a_1 a_2] = - [p a_2],$$

$$[a_1 | a_1 a_3 \Omega a_2 a_3 \cdot a_1 a_3] = [a_1 a_3] = [p a_3],$$

während für alle anderen Werte von i und j sich Null ergibt. Es ist aber

$$a_3 - a_2 = \overrightarrow{a_2 a_3} = [X\Omega],$$

$$[p\,(a_3 - a_2] = [p \cdot X\Omega] = X_p,$$

also kommt:

$$\Sigma\,(\mu_i + \mu_j)\,\overline{X}_{ij} = \mu X_p. \tag{4}$$

12. Weitere Verallgemeinerungen.

Auf dem bisherigen Wege fortschreitend, könnten wir außer den Dyadensummen $J_{1,n-1}$, $J_{n-1,1}$, $J_{2,n-2}$, $J_{n-2,2}$ auch $J_{m,n-m}$ und $J_{n-m,m}$ für $m > 2$ untersuchen, worauf aber verzichtet werden soll. Unter sonstigen Verallgemeinerungen, an die gedacht werden kann, liegen die folgenden wohl am nächsten. Nehmen wir als einfachstes Beispiel ein ebenes Dreieck mit den Ecken a, b, c. Statt einen veränderlichen Punkt x der Ebene parallel den Transversalen pa, pb, pc zu projizieren, also aus den Schnittpunkten dieser Geraden mit der unendlich fernen Geraden U der Ebene, könnte man auch Zentralprojektionen aus den Schnittpunkten jener Transversalen mit irgendeiner endlichen Geraden G der Ebene anwenden, also die Punkte

$$x_1 = [pa\,Gx \cdot bc], \quad x_2 = [pb\,Gx \cdot ca], \quad x_3 = [pc\,Gx \cdot ab]$$

ins Auge fassen, oder noch allgemeiner könnten statt Zentralprojektionen beliebige, nicht ausgeartete Kollineationen verwendet werden, so daß, wenn $\mathfrak{K}$ das Zeichen einer solchen ist, man zu konstruieren hätte:

$$x_1 = [\mathfrak{K}a\;x \cdot bc], \quad x_2 = [\mathfrak{K}b\;x \cdot ca], \quad x_3 = [\mathfrak{K}c\;x \cdot ab].$$

Nur wäre darauf zu achten, daß bei Zentralprojektionen mit endlichem Zentrum und bei allgemeinen Kollineationen, im Gegensatz zu Parallelprojektionen und beliebigen affinen Umbildungen, die Zahlwerte der Elemente, hier die Massen der Punkte, nicht alle in demselben Verhältnis geändert werden [15]).

Es ist klar, daß auch Figuren, die zu den früher betrachteten dual sind, untersucht werden könnten. Wären z. B. A, B, C die Seiten eines beliebigen ebenen Dreiseits, G eine feste Gerade, p ein fester Punkt und X eine veränderliche Gerade derselben Ebene, so müßte die Dyadensumme

$$[AG\,pX \cdot BC] + [BG\,pX \cdot CA] + [CG\,pX \cdot AB],$$

---

[15]) Über die Änderung der Zahlwerte geometrischer Elemente bei projektiven Umbildungen siehe meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. I 1, S. 333ff.

abgesehen von dem Faktor $[ABC]$, unabhängig von der Lage der Geraden A, B, C sein, was zu mancherlei geometrischen Sätzen führte, die wieder in dem vorher angedeuteten Sinne verallgemeinert werden könnten. Auch könnte man entsprechende Untersuchungen über Strahlenbündel und aus irgendwelchen anderen geometrischen Elementen gebildete lineare Gebiete anstellen.

Wie zum Schluß noch bemerkt werde, könnte man, weil die Ausdrücke, die in diesem Abschnitt vorgekommen sind, homogen in bezug auf die darin enthaltenen Elemente waren, z. B. statt ebener Dreiecke auch sphärische betrachten, überhaupt statt euklidischer Maßbestimmung allgemeinste projektive, sogenannte Cayley-Kleinsche Maßbestimmung zugrunde legen, worauf hier näher einzugehen jedoch zu weit führen würde.

(Eingegangen am 7. Februar 1939.)

Über die Teilbarkeitsbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialpolynomen.

Von

Franz Rádl in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Der Verfasser definierte schon früher[1] [2]) die Teilbarkeit des gewöhnlichen Differentialpolynoms a von der m-ten Ordnung durch das gewöhnliche Differentialpolynom b von der n-ten Ordnung $(m > n)$

$$\begin{aligned} a &= a(y) = y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m y, \\ b &= b(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n y, \end{aligned} \tag{1}$$

wo allgemeine Exponenten die Ordnung der Ableitung angeben. Wenn wir die Polynome a, b gleich Null setzen, so entstehen gewöhnliche lineare Differentialgleichungen a, b. Auch alle übrigen Voraussetzungen sollen wie früher gelten.

Die rechts- und linksseitige Division des Polynoms a durch das Polynom b definierte der Verfasser durch die Beziehungen

$$a = pb + r, \quad a = bq + s \tag{2}$$

[3]) und erörterte die Bedeutung des Dividenden a, des Divisors b, der Quotienten p, q, der Reste r, s und der nichtkommutativen Produkte pb, bq.

Zu den gegebenen Polynomen a, b bildete der Verfasser durch wechselseitige Transformation[4]) eine Auffolge und Abfolge von Polynomenpaaren; wenn auch die beiderseitige Folge der adjungierten Polynome hinzugefügt wird, so erhielt er das Schema

$$\begin{aligned} &a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)} \to \ldots \to a^{(-1)}, b^{(-1)} \to a, b \to a^{(1)}, b^{(1)} \to \ldots \to a^{(\mu)}, b^{(\mu)} \\ &a'^{(\nu)}, b'^{(\nu)} \leftarrow \ldots \leftarrow a'^{(1)}, b'^{(1)} \leftarrow a', b' \leftarrow a'^{(-1)}, b'^{(-1)} \leftarrow \ldots \leftarrow a'^{(-\mu)}, b'^{(-\mu)}, \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) Rádl, Über die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 441—456.

[2]) Rádl, Über das verallgemeinerte gemeinsame Maß von zwei Differentialpolynomen, Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 375—386.

[3]) Abh. sub [1]), Formel (4), (5).

[4]) Abh. sub [1]), § 3.

auf Grund dessen er *die rechtsseitige μ-indizierte* und *die linksseitige ν-indizierte Teilbarkeit des Polynoms a durch das Polynom b* definierte [5]). Auf Grund dieser Teilbarkeitsdefinition entwickelte der Verfasser gewisse Beziehungen und Theoreme.

Diese Arbeit ist dem eigentlichen Kern des Problems gewidmet, welcher in der Untersuchung der *Teilbarkeitsbedingungen* (Teilbarkeitskriterien) für die Polynome a, b besteht. Mit anderen Worten, wir haben das Gesetz anzugeben, nach welchem die Koeffizienten dieser Polynome a, b gebildet sind, wenn a durch b im allgemeinen Sinne teilbar werden soll.

Die Untersuchung der Teilbarkeit ist beim Polynom zweiter Ordnung ($m = 2$, $n = 1$) sehr einfach und ist darum vorausgesandt. Es folgt dann die allgemeine Theorie der Reste, auf welche das allgemeine Problem zurückgeführt werden kann. Als Beispiel für diese Theorie ist der besondere Fall $m = 3$, $n = 1$ und in einer anderen Abhandlung der besondere Fall $m = 3$, $n = 2$ erörtert. Ähnliche Untersuchungen für die nächst höheren Ordnungen des Polynomenpaares a, b machen dann keine wesentliche Schwierigkeit mehr. Wegen der Weitläufigkeit der Deduktionen geht das Interesse für den allgemeinen Fall m, n verloren.

§ 2.

Äquivalente und normale Polynomenpaare.

Wenn das Polynom a durch das Polynom b rechtsseitig μ-indiziert teilbar (oder nicht teilbar) ist, so gilt dasselbe von den Polynomen

$$\frac{a(\lambda y)}{\lambda}, \qquad \frac{b(\lambda y)}{\lambda}, \tag{4}$$

wo λ eine beliebige (m-mal differenzierbare) Funktion von x ist. Denn wenn wir die Substitution $y \mid \lambda y$ in die erste Beziehung (2) einführen, so sehen wir sofort ein, daß die Koeffizienten der rechtsseitigen Reste

$$r(y), \qquad \frac{r(\lambda y)}{\lambda}$$

zugleich verschwinden oder zugleich nicht verschwinden; die höchsten Koeffizienten r_0 beider Reste sind identisch. Dasselbe gilt bei der linksseitigen Division, wie wir uns überzeugen, wenn wir die zweite Beziehung (2) für das adjungierte Polynom a' so schreiben, daß wir die Polynome b, q, s gegen adjungierte Polynome b', q', s' vertauschen und das Produkt bq in der umgekehrten Reihenfolge der Faktoren $q'\,b'$ schreiben, so daß dann die rechtsseitige Division des Polynoms a' durch das Polynom b' entsteht. Der höchste Koeffizient s_0 des Restes s bleibt dabei unverändert.

---

[5]) Abh. sub[1]), § 8 und 9.

Wir sagen, daß *das Polynomenpaar a, b mit dem Polynomenpaar* (4) *äquivalent ist.*

Durch wechselseitige Transformation entstehen aus den Polynomen (4) die Polynome

$$\text{(a)} \qquad \frac{a^{(1)}(\lambda y)}{\lambda}, \qquad \frac{b^{(1)}(\lambda y)}{\lambda}$$

und durch Übergang zu den adjungierten Polynomen bekommen wir aus (4)

$$\text{(b)} \qquad \lambda a'\left(\frac{y}{\lambda}\right), \qquad \lambda b'\left(\frac{y}{\lambda}\right);$$

es folgt daraus, wenn wir zum Polynomenpaare (4) das Schema (3) bilden, daß alle Polynomenpaare der ersten Zeile nach dem Gesetze (a), die der zweiten Zeile nach dem Gesetze (b) in äquivalente Polynomenpaare sich verändern. Wenn daher im Schema (3) irgendein Polynomenpaar durch ein äquivalentes ersetzt wird, so haben alle Polynomenpaare des Schemas diese Eigenschaft.

Wenn im Schema (3) beim Polynomenpaar $a^{(u)}, b^{(u)}$ die Koeffizienten des Restes $r^{(u)}$ identisch verschwinden, so ist das Polynom a rechtsseitig u-indiziert teilbar durch das Polynom b. Aber dieselbe Eigenschaft haben nach dem Vorhergehenden auch die Polynome (4).

Wenn bei den Polynomen $a^{(-v)}, b^{(-v)}$ der Rest $s^{(-v)}$ identisch verschwindet, so ist entsprechend das Polynom a linksseitig v-indiziert teilbar durch das Polynom b und diese Eigenschaft besitzen auch die Polynome (4).

Im folgenden wird es zweckmäßig sein, hauptsächlich solche Polynome a, b zu untersuchen, bei welchen in der Formel (1) die zweithöchsten Koeffizienten a_1, b_1 gleich sind. Ein solches Polynomenpaar ist mit (1) äquivalent, weil wir bei den Polynomen (4) die Funktion λ berechnen können, welche die Koeffizienten a_1, b_1 gleich macht; wir bekommen

$$\lambda = e^{\frac{1}{m-n}\int (b_1 - a_1)\, dx}$$

Wir sagen, daß *ein Polynomenpaar a, b, bei welchem die zweithöchsten Koeffizienten gleich sind, normal ist.*

Wenn im Schema (3) *ein Polynomenpaar normal ist, so haben alle Polynomenpaare des Schemas diese Eigenschaft.*

Denn wenn z. B. die Polynome a, b in normaler Gestalt sind, so besitzen zunächst diese Eigenschaft offenbar auch die adjungierten Polynome a', b'.

Unabhängige Lösungen der Gleichungen $a, a^{(1)}$ seien bezüglich $\alpha_i, \alpha_i^{(1)}$. Dann hat der zweithöchste Koeffizient a_1 des Polynoms a den Wert[6])

$$a_1 = -\frac{d}{dx}\log|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m| = -\frac{d}{dx}\log|\alpha_i|;$$

[6]) Schlesinger, Handb. d. Differentialgleichungen, Bd. I, S. 30.

in diesem Ausdruck befindet sich die Wrónskische Determinante, von welcher hier wie im folgenden nur die erste Zeile (oder nur das allgemeine Element α_i) ausgeschrieben ist.

Zwischen den Determinanten $|\alpha_i|$, $|\alpha_i^{(1)}|$ hat der Verfasser die Beziehung bekommen[7])

$$|\alpha_i^{(1)}| = R\,|\alpha_i|,$$

wo R die Resultante der Polynome a, b bedeutet. Der zweithöchste Koeffizient $a_1^{(1)}$ des Polynoms $a^{(1)}$ ist deswegen

$$a_1^{(1)} = -\frac{d}{dx}\log|\alpha_i^{(1)}| = -\frac{d}{dx}\log(R\,|\alpha_i|) = a_1 - \frac{d}{dx}\log R;$$

ähnlich gilt für den zweithöchsten Koeffizienten $b_1^{(1)}$ des Polynoms $b^{(1)}$, wenn $\beta_i, \beta_i^{(1)}$ unabhängige Lösungen bezüglich der Gleichungen $b, b^{(1)}$ sind,

$$b_1^{(1)} = -\frac{d}{dx}\log|\beta_i^{(1)}| = -\frac{d}{dx}\log(R\,|\beta_i|) = b_1 - \frac{d}{dx}\log R.$$

Aus den beiden letzten Beziehungen erkennen wir, daß aus der Gleichheit von a_1, b_1 auch die Gleichheit von $a_1^{(1)}, b_1^{(1)}$ folgt. Dadurch ist die ganze Behauptung bewiesen.

§ 3.

Bedingung der linksseitigen Teilbarkeit für das Polynom zweiter Ordnung.

Wenn im Schema (3) das normale Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ bezüglich zweiter und erster Ordnung die Gestalt

$$a^{(-\nu)} = y'' - \frac{\beta'}{\beta}y', \qquad b^{(-\nu)} = y' - \frac{\beta'}{\beta}y$$

hat, wo β eine beliebige (bis zur gewissen Ordnung differenzierbare) Funktion von x ist, so ist das Polynom $a^{(-\nu)}$ durch das Polynom $b^{(-\nu)}$ linksseitig 0-indiziert teilbar, weil der linksseitige Rest $s^{(-\nu)}$ verschwindet. Umgekehrt hat jedes Polynomenpaar bezüglich zweiter und erster Ordnung, welches diese Eigenschaft hat und normal ist, die obige Gestalt. Die allgemeine Lösung $\bar{y}$ der Gleichung $a^{(-\nu)}$ lautet, wenn C_1, C_2 Integrationkonstanten sind,

$$\bar{y} = C_1\int\beta\,dx + C_2.$$

Wenn wir die Bezeichnung

$$A_\nu = |\beta\beta'\beta''\ldots\beta^\nu|, \qquad A_{-1} = 1 \tag{5}$$

einführen, so können wir das Theorem aussprechen:

---

[7]) Abh. sub[1]), S. 448.

Wenn das Polynomenpaar a, b von der zweiten bzw. ersten Ordnung die Gestalt hat

$$a = a(y) = y'' - \frac{d}{dx}\log\frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}\,y' + \frac{d^2}{dx^2}\log A_{\nu-1}\,y,$$

(6)

$$b = b(y) = y' - \frac{d}{dx}\log\frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}\,y,$$

so ist das Polynom a durch das Polynom b linksseitig ν-indiziert teilbar. Die allgemeine Lösung der Gleichung a kann mit Hilfe der Lösung der Gleichung $a^{(-\nu)}$ durch die Formel ausgedrückt werden

(7) $$y = \frac{1}{A_{\nu-1}}\,|\bar{y}\,\beta\,\beta'\ldots\beta^{\nu-1}|.$$

Das Polynomenpaar (6) ist normal und stimmt für $\nu = 0$ mit dem obigen Polynomenpaare $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ für $\nu = 0$ überein.

In der Formel (7) können wir die Ableitungen $\bar{y}'', \bar{y}''', \ldots, \bar{y}^\nu$ mit Hilfe der Gleichung $a^{(-\nu)}$ durch die Werte $\bar{y}, \bar{y}'$ ausdrücken, so daß diese Formel dann die Gestalt

$$y = .\,\bar{y} + .\,\bar{y}'$$

hat, wenn die Punkte gewisse Funktionen von x bedeuten.

Umgekehrt, wenn das Polynom a zweiter Ordnung durch das Polynom b erster Ordnung linksseitig ν-indiziert teilbar ist, so ist das Polynomenpaar a, b, wenn es auf die normale Gestalt zurückgeführt wird, durch die Ausdrücke (6) gegeben.

Zum Beweis des Theorems setzen wir in (1) für $m = 2$, $n = 1$, außerdem $a_1 = b_1$, so daß die Beziehungen (2) die Gestalt haben

$$y^{(1)\prime} + (r)\,y, \quad y^{(1)} = y' + a_1 y; \qquad Y' + a_1 Y + (s)\,y, \quad Y = y',$$

wo wir die Reste (r), (s) mit den Klammern versehen, um sie von den allgemeinen Resten r, s in (2) zu unterscheiden.

Wenn wir einerseits den Wert $y^{(1)}$, andererseits den Wert Y eliminieren, so erhalten wir durch Vergleichung

$$(s) - (r) = a_1', \quad (s) = a_2,$$

so daß wir die Koeffizienten der Polynome a, b mit Hilfe der Reste ausdrücken und schreiben können:

(8) $$a = y'' + y'\int[(s) - (r)]\,dx + (s)\,y, \quad b = y' + y\int[(s) - (r)]\,dx.$$

Wir setzen voraus, daß beim Polynomenpaare $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ wie anfangs der Rest $(s)^{(-\nu)}$ verschwindet. Unter dieser Voraussetzung hat der Verfasser schon früher[8]) die Formeln entwickelt

$$(9) \quad (r) = \frac{A_{\nu+1} A_{\nu-1}}{A_\nu^2} = \frac{d^2}{d x^2} \log A_\nu, \qquad (s) = (r)^{(-1)} = \frac{d^2}{d x^2} \log A_{\nu-1}.$$

Wenn wir diese Werte in die Beziehungen (8) einsetzen, so bekommen wir in der Tat für das Polynomenpaar a, b die Ausdrücke (6).

Um die Richtigkeit der Formel (7) zu beweisen, erwägen wir, daß die Lösung y der Gleichung a mit der Lösung $y^{(1)}$ der Gleichung $a^{(1)}$ durch die Beziehung

$$y^{(1)} = b(y) = y' - \frac{d}{d x} \log \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}} \cdot y$$

zusammenhängt. Wenn wir für y den Wert (7) und für $y^{(1)}$ die Formel (7), in welcher der Index ν auf den Index $\nu + 1$ erhöht wird, einsetzen, so erhalten wir die neue Beziehung

$$|\bar{y}\, \beta\, \beta' \ldots \beta^\nu| \cdot A_{\nu-1} = A'_\nu |\bar{y}\, \beta\, \beta' \ldots \beta^{\nu-1}| - A_\nu |\bar{y}\, \beta\, \beta' \ldots \beta^{\nu-1}|',$$

welche nach dem bekannten Determinantensatze[9]) richtig ist. Wenn wir, um die Gleichheit beider Seiten zu bekommen, auf einer Seite das Vorzeichen verändern müssen, so spielt das keine Rolle, weil wir in der Formel (7) wegen der willkürlichen Integrationskonstanten C_1, C_2 den Wert y durch $-y$ ersetzen können.

Wir haben dadurch bewiesen, daß die Formel (7), wenn sie für den Index ν richtig ist, auch für den Index $\nu + 1$ die Richtigkeit behält; weil sie für den Index 0 gilt, hat sie allgemeine Gültigkeit.

Wir werden das Theorem durch ein *Beispiel* erläutern. Den Index ν und die Funktion β können wir beliebig wählen; wenn wir

$$\nu = 2, \qquad \beta = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

setzen, so gibt die Formel (5)

$$A_0 = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad A_1 = -e^{-x^2}, \quad A_2 = -2 e^{-\frac{3}{2} x^2};$$

für $\nu = 0, 1, 2$ erhalten wir die Polynome (6)

$$\left.\begin{aligned} a^{(-2)} &= y'' + xy' \\ b^{(-2)} &= y' + xy \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} a^{(-1)} &= y'' + xy' - y \\ b^{(-1)} &= y' + xy \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} a &= y'' + xy' - 2y \\ b &= y' + xy \end{aligned}\right\}$$

und wir können uns durch unmittelbare Berechnung überzeugen, daß das Polynomenpaar $a^{(-2)}, b^{(-2)}$ durch wechselseitige Transformation das Polynomenpaar $a^{(-1)}, b^{(-1)}$, und dieses das Polynomenpaar a, b gibt.

---

[8]) Abh. sub[1]), Formel (26), (23).

[9]) Fricke, Algebra, Bd. 1, S. 68, Formel (7).

Die Formel (7) liefert als Lösungen der Gleichungen $a^{(-2)}, a^{(-1)}, a$ bezüglich

$$\bar{y} = C_1 D + C_2,\ D = \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \qquad y = x(C_1 D + C_2) + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$y = (1 + x^2)(C_1 D + C_2) + C_1 x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

§ 4.

Bedingung der rechtsseitigen Teilbarkeit für das Polynom zweiter Ordnung.

Die Polynome, welche zu den Polynomen (6) adjungiert sind, bilden im Schema (3) das Polynomenpaar a', b'. Die Polynomenpaare, welche durch wechselseitige Transformation entstehen, sind dann $a'^{(1)}, b'^{(1)}; \ldots; a'^{(\nu)}, b'^{(\nu)}$; bei dem letzten Polynomenpaar verschwindet der Rest $r'^{(\nu)}$, so daß das Polynom a' durch das Polynom b' rechtsseitig ν-indiziert teilbar ist.

Im Schema (3) können wir beide Zeilen gegeneinander vertauschen, wobei wir auch die Reihenfolge der Polynomenpaare umkehren müssen, damit die Richtung der Pfeile unverändert bleibe. Deswegen können wir die Polynome a', b' mit a, b und die Polynomenpaare $a'^{(1)}, b'^{(1)}; \ldots; a'^{(\nu)}, b'^{(\nu)}$ mit $a^{(1)}, b^{(1)}; \ldots; a^{(\mu)}, b^{(\mu)}$ bezeichnen, wenn wir auch den Index ν gegen μ vertauschen.

Die Polynome a, b haben dann die Gestalt

$$a = a(y) = y'' + \frac{d}{dx}\log\frac{A_\mu}{A_{\mu-1}} \cdot y' + \frac{d^2}{dx^2}\log A_\mu\, y,$$

(10)

$$b = b(y) = y' + \frac{d}{dx}\log\frac{A_\mu}{A_{\mu-1}}\, y$$

und wir können behaupten:

Wenn das normale Polynomenpaar a, b die Gestalt (10) hat, so ist das Polynom a durch das Polynom b rechtsseitig μ-indiziert teilbar.

Wir könnten auch unter der Voraussetzung, daß der Rest $(r)^{(\mu)}$ verschwindet, die Formeln für (s), (r) berechnen und durch Einsetzen in (8) selbständig die Formeln (10) bestimmen. Aber eine ähnliche Formel wie (7) existiert hier nicht; um die Lösung der Gleichung a in (10) am einfachsten zu bekommen, berechnen wir die Lösung der Gleichung a in (6) mit Hilfe der Formel (7) und mit Hilfe der adjungierten Gleichung bestimmen wir die Lösung der Gleichung a in (10).

Deshalb ist es überflüssig, selbständig die rechtsseitige Teilbarkeit zu untersuchen. Für die zweite Ordnung des Polynoms a gilt übrigens, daß die adjungierten Polynome a, a' durch Substitution $y|\lambda y$ zusammenhängen.

§ 5.

Theorie der Reste des allgemeinen Polynoms.

Um die bisherigen Resultate auf Polynome höherer Ordnung zu verallgemeinern, haben wir zuerst die Theorie der Reste des allgemeinen Polynoms a in (1) zu entwickeln.

Das allgemeine Polynom $a\,(y)$ drücken wir durch das System aus, welches rechtsseitige Division durch einen Divisor erster Ordnung definiert

$$(11) \qquad a\,(y) = y_1^{m-1} + p_1 y_1^{m-2} + \ldots + p_{m-1} y_1 + r\,(y), \qquad y_1 = y' + b_1 y$$

und ähnlich durch ein anderes System, durch welches linksseitige Division allgemein mit einem anderen Divisor definiert wird

$$(12) \qquad a\,(y) = Y' + c_1 Y + (s)\,y, \qquad Y = y^{m-1} + q_1 y^{m-2} + \ldots + q_{m-1} y.$$

Den Quotienten $p\,(y_1)$ in (11) können wir von neuem linksseitig durch den Divisor des Systems (12) dividieren, so daß wir bekommen

$$a(y) = Y' + c_1 Y + (rs) y_1 + (r) y, \qquad Y = y_1^{m-2} + t_1 y_1^{m-3} + \ldots + t_{m-2} y_1,$$
$$y_1 = y' + b_1 y;$$

ähnlich dividieren wir den Quotienten $q\,(y)$ in (12) durch den Divisor des Systems (11), wobei wir die Reste zweiter Ordnung (rs), (sr) einführen:

$$a(y) = Y' + c_1 Y + (s) y, \qquad Y = y_1^{m-2} + t_1 y_1^{m-3} + \ldots + t_{m-2} y_1 + (sr) y,$$
$$y_1 = y' + b_1 y.$$

In der ersten Beziehung eliminieren wir den Wert Y und außerdem im Gliede $(rs) y_1$ den Wert y_1, so daß

$$a(y) = (y_1' + c_1 y_1) \times (y_1^{m-2} + \ldots + t_{m-2} y_1) + (rs) y' + [b_1 (rs) + (r)] y,$$
$$y_1 = y' + b_1 y,$$

wo wir die Elimination von Y durch ein nichtkommutatives Produkt angedeutet haben. Wenn wir ähnlich in der zweiten Beziehung den Wert Y eliminieren, so entsteht

$$a(y) = (y_1' + c_1 y_1) \times (y_1^{m-2} + \ldots + t_{m-2} y_1) + (sr) y' + [(sr)' + c_1 (sr) + (s)] y,$$
$$y_1 = y' + b_1 y.$$

Die Koeffizienten dieser beiden Beziehungen müssen identisch sein. Wir haben schon im voraus die Quotienten von $t\,(y_1)$ in beiden früheren Beziehungen als gleich vorausgesetzt, was durch die jetzigen Beziehungen begründet ist.

Durch Vergleich der Koeffizienten von y' bei den letzten Beziehungen entsteht die Formel

$$(13) \qquad (rs) = (sr),$$

durch Vergleich der Koeffizienten von y die Formel

$$(14) \qquad (r) - (s) = \frac{1}{\mu\, \nu} [\mu\, \nu\, (r\, s)]',$$

in welcher die Buchstaben μ, ν die Lösungen der Polynome bezüglich $y' + by$, $y' - cy$ bedeuten. Wir haben so die Grundformeln (13), (14) für die folgende Untersuchung bekommen.

Aus den Systemen (11), (12) folgt[10])

$$(15) \qquad (r) = \frac{a\,(\mu)}{\mu}, \qquad (s) = \frac{a'\,(\nu)}{\nu}, \qquad (s\,r) = \frac{q\,(\mu)}{\mu},$$

so daß die Formel (14) die Gestalt der Lagrangeschen Beziehung [11]) annimmt

$$\nu a(\mu) - \mu a'(\nu) = [\nu q(\mu)]'.$$

Aus dem Vorhergehenden ist die Bedeutung der Reste zweiter Ordnung (r^2), (s^2), der Reste dritter Ordnung (r^3), (s^3) klar; allgemein ist der Rest $(i+j)$-ter Ordnung

$$(r^i\, s^j), \qquad 1 \leqq i + j \leqq m,$$

eine Funktion von x, welche entsteht, wenn wir das Polynom a rechtsseitig wie in (11), den so entstehenden Quotienten wieder rechtsseitig usw., im ganzen i-mal dividieren; den so entstehenden Quotienten dividieren wir linksseitig wie in (12), und zwar j-mal wie früher hintereinander. Der Divisor soll bei den einzelnen Divisionen allgemein verschieden sein.

Der Quotient $t\,(y)$ entsteht, wenn wir das Polynom a rechtsseitig, dann den so entstehenden Quotienten linksseitig dividieren, wobei beide Divisoren von erster Ordnung und (allgemein) verschieden sind. Wenn wir die Folge beider Divisionen umkehren, so bleibt der resultierende Quotient $t\,(y)$ unverändert.

Diese Eigenschaft und die Formel (13) verallgemeinert folgendes Theorem:

Der Rest $(r^i s^j)$ und der zu ihm gehörende Quotient bleiben invariant gegenüber allen Permutationen der Buchstaben r, s.

Diese Behauptung gilt der Formel (13) gemäß für die Reste zweiter Ordnung. Wenn wir aus ihrer Gültigkeit für die Ordnung $i+j$ auch auf die Gültigkeit für die Ordnung $i+j+1$ schließen können, so gilt das Theorem allgemein.

Wir setzen darum voraus, daß die Beziehung

$$(16) \qquad (r^i\, s^j) = (\overline{r^i\, s^j})$$

[10]) Abh. sub[1]), Formel (21), (22).

[11]) Diese Beziehung ist allgemeiner als die Beziehung in der Abh. sub[1]), Formel (24).

gilt, wo der Strich auf der rechten Seite bedeutet, daß alle $\frac{(i+j)!}{i!\,j!}$ Permutationen der Buchstaben r, s zulässig sind; wir setzen auch voraus, daß die entsprechenden Quotienten gleich sind.

Ein Rest $i+j+1$-ter Ordnung entsteht, wenn wir von neuem z. B. die rechtsseitige Division (bei der linksseitigen Division ist der Schluß ähnlich) durchführen. Wir haben dann die Gültigkeit der Beziehung

$$(r^i s^j r) = (\overline{r^{i+1} s^j})$$

und die Gleichheit der entsprechenden Quotienten zu beweisen.

Die Reste $(\overline{r^{i+1} s^j})$ verteilen wir in zwei Teile; die Reste des ersten Teiles sollen mit dem Buchstaben r, diejenigen des zweiten Teiles mit dem Buchstaben s enden; beide Teile haben dann bezüglich die Gestalt

$$(\overline{r^i s^j r}), \qquad (\overline{r^{i+1}, s^{j-1} s}).$$

Wir werden die Beziehungen

$$(r^i s^j r) = (\overline{r^i s^j r}), \qquad (r^{i+1}, s^j) = (\overline{r^{i+1} s^{j-1} s})$$

beweisen, wenn wir am Ende der beiden Seiten bei der ersten Beziehung den Buchstaben r, bei der zweiten Beziehung den Buchstaben s auslassen; denn beide Beziehungen sind dann der Voraussetzung (16) nach gültig und die entsprechenden Quotienten sind gleich. Dasselbe gilt darum auch, wenn wir die Buchstaben bezüglich r, s nicht auslassen.

Daß die linken Seiten der beiden Beziehungen und die entsprechenden Quotienten gleich sind, erkennen wir, wenn wir anfangs den Buchstaben r auslassen. Deswegen sind auch die rechten Seiten gleich und die entsprechenden Quotienten sind identisch, wodurch das Theorem bewiesen ist.

Wir können jetzt leicht die Beziehung (14) verallgemeinern. Wir führen beim Polynom a nacheinander die Divisionen durch, wie sie der Rest $(r^i s^j)$ andeutet. Der entsprechende Quotient ist von der $m-i-j$-ten Ordnung. Wenn wir auf ihn die Beziehung (14) anwenden, so erhalten wir

$$(17)\quad (r^i s^j r) - (r^{i+1} s^j) = \frac{1}{\mu\,\nu}[\mu\,\nu\,(r^{i+1} s^{j+1})]', \quad 0 \leqq i+j \leqq m-1;$$

das erste Glied der linken Seite schreiben wir absichtlich nicht in der Gestalt $(r^{i+1} s^j)$, damit der Zusammenhang mit (14) besser hervortrete.

§ 6.

Bedingung der linksseitigen Teilbarkeit für das Polynomenpaar bezüglich dritter und erster Ordnung.

Auf Grund der Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen können wir ein ähnliches Theorem beweisen wie im § 3.

Wenn im Schema (3) das normale Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ bezüglich dritter und erster Ordnung die Gestalt hat

$$a^{(-\nu)} = y''' - \frac{\beta'}{\beta} y'', \quad b^{(-\nu)} = y' - \frac{\beta'}{\beta} y, \tag{18}$$

so ist das Polynom $a^{(-\nu)}$ durch das Polynom $b^{(-\nu)}$ linksseitig ν-indiziert teilbar, weil der linksseitige Rest $(s)^{(-\nu)}$ verschwindet. Die allgemeine Lösung $\bar{y}$ der Gleichung $a^{(-\nu)}$ lautet, wenn C_1, C_2, C_3 Integrationskonstanten sind,

$$\bar{y} = C_1 \iint \beta \, dx^2 + C_2 x + C_3.$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$A_\nu = |\beta \, \beta'' \ldots \beta^{2\nu}|, \quad B_\nu = |\beta \, \beta'' \ldots \beta^{2(\nu-1)} \beta^{2(\nu+1)}|, \quad A_{-1} = B_{-1} = 1 \tag{19}$$

ein und sprechen das Theorem aus:

Wenn die Polynome a, b von der dritten bzw. ersten Ordnung die Gestalt haben

$$\begin{aligned} a &= a(y) = y^{(1)''} + 2\frac{d^2}{dx^2} \log A_\nu \, y^{(1)} + \left(\frac{B_\nu}{A_\nu}\right)' y, \quad y^{(1)} = b(y), \\ b &= b(y) = y' - \frac{d}{dx} \log \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}} \cdot y, \end{aligned} \tag{20}$$

so ist das Polynom a durch das Polynom b linksseitig ν-indiziert teilbar. Die allgemeine Lösung der Gleichung a kann mit Hilfe der Lösung der Gleichung $a^{(-\nu)}$ durch die Formel ausgedrückt werden

$$y = \frac{1}{A_{\nu-1}} |\bar{y} \, \beta \, \beta'' \ldots \beta^{2(\nu-1)}|. \tag{21}$$

Das Polynomenpaar (20) ist normal. Wegen der Übersicht wird das Polynom a in (20) in der Gestalt des Produktes von zwei nichtkommutativen Faktoren bis auf einen Rest ausgedrückt; man könnte auch schreiben:

$$a(y) = \left(y'' + 2\frac{d^2}{dx^2} \log A_\nu \cdot y\right) \times \left(y' - \frac{d}{dx} \log \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}} \cdot y\right) + \left(\frac{B_\nu}{A_\nu}\right)' \cdot y.$$

Zum Beweis des Theorems schreiben wir die rechtsseitige Division des Polynomenpaares a, b bezüglich von der m-ten und 1-ten Ordnung in der Gestalt (11); der Quotient dieser Division ist p (y_1) oder kurz p. Dann können wir die linksseitige Division des Polynomenpaares $a^{(1)}, b^{(1)}$ in der Gestalt ausschreiben [12])

$$y^{(1)} = a^{(1)}(y^{(1)}) = Y' + b_1^{(1)} Y + (s)^{(1)} y^{(1)}, \quad Y = (y^{(1)})^{m-1} + \ldots + p_{m-1} y^{(1)},$$

so daß der Quotient wieder p ist; wir erhalten die Beziehung

$$(s)^{(1)} = (r)^{(0)}, \tag{22}$$

---

[12]) Abh. sub[1]), Formel (13).

in welcher zum Rest $(s)^{(1)}$ der Divisor $b^{(1)}$, zum Rest $(r)^{(0)}$ der Divisor b gehört. Deshalb gilt auch

$$(s)^{(2)} = (r)^{(1)},$$

wo zu den Resten $(s)^{(2)}, (r)^{(1)}$ bezüglich die Divisoren $b^{(2)}, b^{(1)}$ gehören.

Die Polynome $a^{(2)}, a^{(1)}$ haben denselben Quotienten, wenn er gerade so wie der gemeinschaftliche Quotient p der Polynome $a, a^{(1)}$ gebildet wird. Bei diesem Quotienten $p^{(1)}$ führen wir die linksseitige Division mit dem Divisor $b^{(1)}$ durch, so daß die Reste bezüglich $(s^2)^{(2)}, (rs)^{(1)}$ entstehen, welche ersichtlich identisch sind. Dem § 5 und der Beziehung (22) nach gilt

$$(s^2)^{(2)} = (rs)^{(1)} = (sr)^{(1)} = (r^2)^{(0)},$$

wo zu diesen Resten bezüglich die Divisoren $b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}\, b^{(1)}$; $b^{(0)}, b^{(1)}$ gehören.

Geradeso begründen wir die Beziehungen

$$(s^3)^{(3)} = (rs^2)^{(2)} = (srs)^{(2)} = (r^2 s)^{(1)} = (sr^2)^{(1)} = (r^3)^{(0)};$$

zu diesen Resten gehören bezüglich die Divisoren $b^{(3)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(2)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(2)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}, b^{(1)}, b^{(2)}$; $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}$.

Wir drücken jetzt das Polynomenpaar a, b von der dritten bzw. ersten Ordnung in der Gestalt der doppelten rechtsseitigen Division

$$(23)\quad a = a\,(y) = y_1' - b_1^{(1)}\, y_1 + (r^2)\, y^{(1)} + (r)\, y, \qquad y_1 = y^{(1)\prime} + b_1^{(1)}\, y^{(1)},$$
$$y^{(1)} = y' + b_1 y$$

und ähnlich in der Gestalt der doppelten linksseitigen Division

$$(24)\quad a = a(y) = Y' + b_1 Y + (s)\, y, \qquad Y = y_1' + b_1^{(-1)}\, y_1 + (s^2)\, y,$$
$$y_1 = y' - b_1^{(-1)}\, y$$

aus; die Werte $b_1^{(1)}, b_1^{(-1)}$ bedeuten die Koeffizienten bezüglich der Polynome $b^{(1)}, b^{(-1)}$. Die Divisoren der beiden Beziehungen sind durch die Reste (r), (r^2), (s), (s^2) vorgeschrieben; die Quotienten $y_1' - b_1^{(1)}\, y_1$, $y' - b_1^{(-1)}\, y$ sind so gewählt, daß das Polynomenpaar a, b wie in (20) normal sei.

Wenn wir das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ in der Gestalt (24) ausschreiben und wenn wir dabei voraussetzen, daß *beide Reste* $(s)^{(-\nu)}, (s^2)^{(-\nu)}$ *verschwinden*,

$$(25)\qquad (s)^{(-\nu)} = 0, \qquad (s^2)^{(-\nu)} = 0,$$

so erhalten wir

$$a^{(-\nu)} = Y' + b_1^{(-\nu)}\, Y, \qquad Y = y_1', \qquad y_1 = y',$$

weil das Polynom $b^{(-\nu-1)}$ nicht mehr existiert und weil deswegen sein Koeffizient $b_1^{(-\nu-1)}$ gleich Null ist. Diese Gestalt stimmt mit (18) überein, wenn wir die Lösung des Polynoms $b^{(-\nu)}$ mit β bezeichnen; die Beziehungen (18) genügen dem Gesetz (20) für $\nu = 0$.

Zur linksseitigen 0-indizierten Teilbarkeit des Polynoms $a^{(-\nu)}$ durch das Polynom $b^{(-\nu)}$ genügt einfach das Verschwinden des Restes $(s)^{(-\nu)}$; um einfache Formeln (20) zu bekommen, müssen wir die ganze Bedingung (25) voraussetzen und nur unter dieser Bedingung ist das vorgelegte Theorem umkehrbar wie im § 3.

Durch Elimination von y_1 in der Beziehung (23) erhalten wir

(26) $\quad a(y) = y^{(1)\prime} + [b_1^{(1)\prime} - (b_1^{(1)})^2 + (r^2)]\, y^{(1)} + (r)\, y, \;\; y^{(1)} = y' + b_1 y;$

wenn wir unter der Voraussetzung (25) die Werte $(r), (r^2), b_1^{(1)}$ berechnen und in die Beziehung (26) einsetzen und wenn wir die Übereinstimmung mit den Formeln (20) bekommen, so wird das Theorem bewiesen sein.

§ 7.

Zurückführung der vorhergehenden Untersuchung auf die Richtigkeit einer Beziehung.

Zum Beweis der Formeln (20) wenden wir die Beziehung (14) auf das Polynomenpaar $a^{(1)}, b^{(1)}$ an. Wir bekommen, weil das Produkt $\mu \cdot \nu$ gleich Eins ist,

$$(r)^{(1)} - (s)^{(1)} = [(rs)^{(1)}]';$$

die Reste $(s)^{(1)}, (rs)^{(1)}$ können wir nach dem vorhergehenden Paragraphen durch die Reste $(r)^{(0)}, (r^2)^{(0)}$ ersetzen, so daß die Beziehung lautet:

(c) $$(r)^{(1)} - (r)^{(0)} = [(r^2)^{(0)}]'.$$

Jetzt wenden wir die Beziehung (17) auf das Polynomenpaar a, b an und zwar für $i = 1$, $j = 0$; der Wert μ bedeutet hier die Lösung $\beta^{(1)}$ des Polynoms $b^{(1)}$, der Wert ν die Lösung $\frac{1}{\beta}$ des zu b adjungierten Polynoms b'. Die Beziehung lautet

$$(r^2)^{(0)} - (rs)^{(0)} = \frac{1}{R}[R\,(r^2 s)^{(0)}]'$$

oder, wenn wir die Reste $(rs)^{(0)}, (r^2 s)^{(0)}$ durch die Reste $(r^2)^{(-1)}, (r^3)^{(-1)}$ ersetzen,

(d) $$(r^2)^{(0)} - (r^2)^{(-1)} = \frac{1}{R}[R\,(r^3)^{(-1)}]'.$$

Wir haben so zwei Hauptbeziehungen (c), (d) für den Beweis der Formeln (20) bekommen. Jetzt berechnen wir für das Polynomenpaar (18) die Reste $(r)^{(-\nu)}, (rs)^{(-\nu)}$, zu welchen nach dem § 6 die Divisoren bezüglich $b^{(-\nu)}; b^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ gehören. Der Rest $(rs)^{(-\nu)}$ ist nach § 6 dem Reste $(r^2)^{(-\nu-1)}$ gleich; dieser Rest hat deswegen einen Sinn, obgleich er den Index eines nichtexistierenden Polynomenpaares $a^{(-\nu-1)}, b^{(-\nu-1)}$ hat. Wir bekommen zuerst

$$(r)^{(-\nu)} = R^{(-\nu)} = \frac{a^{(-\nu)}(\beta)}{\beta} = \frac{A_1}{A_0^2}.$$

Wenn wir das Polynomenpaar (18) in der Gestalt der linksseitigen Division anschreiben, so erhalten wir den Rest $(s)^{(-\nu)}$ und den Quotienten y''. Nach der ersten Formel (15) ergibt sich hieraus

$$(r^2)^{(-\nu-1)} = (r\,s)^{(-\nu)} = (s\,r)^{(-\nu)} = \frac{\beta''}{\beta} = \frac{A_0''}{A_0}.$$

Wir behaupten, daß für das Polynomenpaar a, b die Formeln gelten

$$(27)\ (r) = R = \frac{A_{\nu+1}A_{\nu-1}}{A_\nu^2},\quad (r^2)^{(-1)} = \frac{A_\nu''}{A_\nu} - 2\frac{A_\nu'}{A_\nu}\frac{A_{\nu-1}'}{A_{\nu-1}} + \frac{A_\nu''}{A_\nu},\quad \beta^{(\nu)} = \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}},$$

wo der Rest $(r^2)^{(-1)}$ dem Reste $(r\,s)$ gleich ist und wo $\beta^{(\nu)}$ die Lösung des Polynoms b bedeutet.

Für $\nu = 0$ erhalten wir die obigen Formeln für das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$; wenn wir beweisen, daß wir aus der Richtigkeit der Formeln (27) für den Index ν auch auf ihre Gültigkeit für den Index $\nu + 1$ schließen können, so werden diese Formeln allgemein bewiesen sein. Wenn wir die Werte (27) in die Beziehung (26) einsetzen, so erhalten wir Übereinstimmung mit (20), so daß damit auch das vorgelegte Theorem bewiesen sein wird.

Zur Durchführung dieses Verfahrens werden wir die Beziehungen (c), (d) benützen. Dazu müssen wir zuerst den Wert des Restes $(r^3)^{(-1)}$ in (d) berechnen und zu dieser Berechnung den Wert $\beta^{(\nu+1)}$ bestimmen.

Wenn wir die Richtigkeit der Formeln (27) für den Index ν voraussetzen, so schließen wir zuerst

$$\beta^{(\nu+1)} = a\,(\beta^{(\nu)}) = R\,\beta^{(\nu)} = \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu},$$

wodurch das Gesetz (27) für $\beta^{(\nu)}$ bei dem um eine Einheit erhöhten Index $\nu + 1$ bewiesen ist. Wir führen beim Polynomenpaar a, b die rechtsseitige Division zweimal hintereinander durch, wie es die Beziehung (23) ausdrückt; wir bekommen den Rest $(r^2)^{(-1)}$ und den Quotienten $y_1' - b_1^{(1)} y_1$. Dieses Polynom dividieren wir linksseitig durch den Divisor b, wir erhalten den Rest $(r^2 s)$, welcher dem Reste $(r^3)^{(-1)}$ gleich ist. Um den Wert dieses Restes zu berechnen, haben wir nach der zweiten Formel (15) in das adjungierte Polynom $-y_1' - b_1^{(1)} y_1$ für y_1 den Wert $\frac{1}{\beta^{(\nu)}}$ einzusetzen und dann mit $\frac{1}{\beta^{(\nu)}}$ zu dividieren, so daß

$$(r^3)^{(-1)} = \frac{d}{dx}\log(\beta^{(\nu)}\beta^{(\nu+1)}) = \frac{d}{dx}\log\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck, dann die vorausgesetzten Werte für $(r^2)^{(-1)}$ und R in (d) einsetzen, so erhalten wir nach einfacher Rechnung den Wert für den Rest $(r^2)^{(0)}$, welcher mit (27) übereinstimmt, wenn wir den Index ν auf $\nu + 1$ erhöhen.

Jetzt setzen wir in die Beziehung (c) diesen Wert für $(r^2)^{(0)}$, dann den vorausgesetzten Wert für $(r)^{(0)}$ aus (27) und endlich denjenigen Wert für $(r)^{(1)}$ ein, wie wir ihn nach dem Gesetz (27) für den Index $\nu + 1$ erwarten. Wenn beide Seiten der Beziehung (c) gleich sein werden, so sind alle Formeln (27) allgemein gültig und damit wird das vorgelegte Theorem bewiesen sein.

Wir setzen für die Reste $(r)^{(1)}$, (r) die Werte

$$(r)^{(1)} = \left(\frac{B_{\nu+1}}{A_{\nu+1}}\right)', \quad (r) = \left(\frac{B_\nu}{A_\nu}\right)',$$

welche wir nach dem schon sub [9]) benützten Determinantensatz aus (27) bekommen. Wenn wir dann beide Seiten der Beziehung (c) integrieren, so haben wir die Richtigkeit der Beziehung zu beweisen

$$(28) \qquad A_\nu B_{\nu+1} - A_{\nu+1} B_\nu = A_\nu A''_{\nu+1} - 2 A'_\nu A'_{\nu+1} + A''_\nu A_{\nu+1}.$$

Als Anmerkung sei noch hervorgehoben, daß wir den Beziehungen (c), (d) noch eine anfügen können. Wenn wir die Beziehung (17) auf das Polynomenpaar $a^{(-1)}$ $b^{(-1)}$ und zwar für $i = 2$, $j = 0$ anwenden, so bekommen wir nach Ersetzung der entsprechenden Reste

$$(e) \qquad (r^3)^{(-1)} - (r^3)^{(-2)} = \frac{1}{R R_{-1}} [R R_{-1} (r^4)^{(-2)}]',$$

wo der Rest $(r^4)^{(-2)}$ gleich Eins ist. Aber wir können ohne diese Beziehung auskommen.

§ 8.

Beweis der resultierenden Beziehung.

Die Beziehung (28) kann vereinfacht werden. Die erste Ableitung A'_ν der Determinante A_ν erhalten wir, wenn wir die Elemente der letzten Zeile von A_ν einmal differenzieren, die zweite Ableitung A''_ν drückt die Formel

$$A''_\nu = A^{(1)}_\nu + A^{(2)}_\nu$$

aus; die Determinanten $A^{(1)}_\nu$, $A^{(2)}_\nu$ entstehen, wenn in der Determinante A_ν die Elemente der beiden letzten Zeilen einmal, bzw. die Elemente der letzten Zeile zweimal differenziert werden.

Die zweite Ableitung A'' einer beliebigen m-reihigen Determinante besteht aus der Summe der Determinanten von zwei Arten. Die erste Art ist gleich der Summe S_1 von m Determinanten, welche wir aus A erhalten, wenn wir die Elemente einer Spalte zweimal differenzieren. Die zweite Art besteht aus der Summe S_2 von $\binom{m}{2}$ Determinanten, welche den Koeffizient 2 haben und in welchen immer die Elemente von zwei Spalten einmal differenziert werden.

Aber wir können die zweite Ableitung A'' auch so bekommen, daß wir dieselben Veränderungen in den Zeilen (anstatt in den Spalten) durchführen, so daß A'' wieder der Summe von zwei Summen $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ gleich ist. Offenbar sind die ersten Arten $S_1, \overline{S}_1$ einander gleich, so daß dasselbe von den zweiten Arten $S_2, \overline{S}_2$ gilt

$$A'' = S_1 + S_2 = \overline{S}_1 + \overline{S}_2, \quad S_1 = \overline{S}_1, \quad S_2 = \overline{S}_2.$$

Bei der Determinante A_ν'' sind die Summen $S_1, \overline{S}_2$ bezüglich gleich $B, 2A_\nu^{(1)}$, so daß die Formeln gelten

$$A_\nu'' = B_\nu + 2A_\nu^{(1)} = A_\nu^{(1)} + A_\nu^{(2)}, \quad B_\nu = A_\nu^{(2)} - A_\nu^{(1)}.$$

Wenn wir die Werte für A_ν'', B_ν in die Beziehung (28) einsetzen, so ergibt sich hieraus die Beziehung

$$A_{\nu+1}A_\nu^{(2)} - A'_{\nu+1}A'_\nu + A_{\nu+1}^{(1)}A_\nu = 0, \tag{29}$$

auf deren Richtigkeit der Beweis des vorgelegten Theorems zurückgeführt wird.

Dieser Beweis beruht auf folgendem Determinantensatze:

Es sei eine m-reihige Determinante A und ihr n-reihiger Minor B

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad m > n,$$

gegeben. Wir bilden zur Determinante A alle Minoren $\frac{\partial A}{\partial a_{im}}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, welche wir mit A_{im} bezeichnen; dann zur Determinante B als Basis bilden wir alle einfach geränderten Determinanten B_{im}, indem wir die m-te Spalte von A und die in A_{im} fehlende Zeile von A zu der Determinante B beifügen.

Wir behaupten, daß der Satz gilt

$$\sum_{i=n+1}^{m} A_{im}B_{im} = A \cdot B, \tag{30}$$

wo links die Glieder der Summe abwechselnde Vorzeichen haben.

Die Anzahl der Glieder auf der rechten Seite der Beziehung (30) ist $m - n$; man kann die Summe ebensogut von $i = 1$ bis m erstrecken, weil die hinzukommenden Determinanten $B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{nm}$ verschwinden. Wenn wir im allgemeinen Gliede $A_{im} \cdot B_{im}$ der Summe die Elemente der letzten Zeile in der Determinante B_{im} mit A_{im} multiplizieren, so kann man die so entstehende Summe in der Gestalt eines Gliedes schreiben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1m} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nm} \\ \sum_i a_{i1}A_{im} & \dots & \sum_i a_{in}A_{im} & \sum_i a_{im}A_{im} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n}\, a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn}\, a_{nm} \\ 0 \dots 0 \quad A \end{vmatrix},$$

woraus die Richtigkeit der Beziehung (30) folgt.

Wenn in der Determinante A die m-te Spalte der $n+1$-ten gleich ist, so verschwindet A und die Minoren B_{im} verändern sich in gewisse Minoren B'_{im}; die Beziehung (30) lautet dann

$$\sum_{i=n+1}^{m} A_{im} B'_{im} = 0. \tag{31}$$

Für unseren Zweck brauchen wir diese Beziehung nur für $n = m - 3$; dann hat die Summe nur drei Glieder

$$A_{m-2,\,n} \cdot B'_{m-2,\,m} + A_{m-1,\,m} B'_{m-1,\,m} + A_{m\,m} B'_{m\,m} = 0.$$

Wenn wir die Determinante A der Determinante $A_{\nu+2}$ gleichsetzen, so ist diese Beziehung mit (29) identisch, so daß die Formeln (27) und dadurch die Gestalt (20) für das Polynomenpaar a, b bewiesen sind.

§ 9.

Schlußbemerkungen. Ein Beispiel.

Wir haben noch die Formel (21) zu begründen, aber der Beweis ist wörtlich derselbe wie der Beweis der Formel (7) im § 3.

Ähnlich wie im § 4 könnten wir voraussetzen, daß beim Polynomenpaar $a^{(\mu)}, b^{(\mu)}$ die durch die Beziehung (23) definierten Reste $(r)^{(\mu)}$, $(r^2)^{(\mu)}$ verschwinden und wir könnten aus dieser Bedingung die Reste $(s), (s^2)$ des Polynomenpaares a, b berechnen und in (24) einsetzen. Wir würden so das Polynom a bekommen, welches durch das Polynom b rechtsseitig μ-indiziert teilbar ist.

Aber die Formel für die Lösung der Gleichung a ähnlich wie in (21) existiert nicht und wir müssen zur Lösung der Gleichung a die adjungierten Polynome a', b' berechnen, so daß das Polynom a' durch das Polynom b' linksseitig μ-indiziert teilbar ist. Die ganze Schlußweise ist dieselbe wie im § 4.

Um durch ein einfaches *Beispiel* die ganze Untersuchung darzustellen, wählen wir für β denselben Wert wie im § 3, so daß nach Formel (19) gilt

$$A_0 = \beta = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad A_1 = 2\,x\,e^{-x^2}, \quad A_2 = 16\,x^3\,e^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

Für $\nu = 0$ erhalten wir für die Polynome $a^{(-1)}, b^{(-1)}$ und für die Lösung $\bar{y}$ der Gleichung $a^{(-1)}$

$$a^{(-1)} = y''' + x\,y'', \quad b^{(-1)} = y' + x\,y, \quad \bar{y} = C_1 H + C_2 x + C_3,$$

$$H = \iint e^{-\frac{x^2}{2}} d\,x^2;$$

für $\nu = 1$ entstehen die Polynome

$$a = y^{(1)''} - \left(\frac{2}{x^2} + 4\right) y^{(1)} + 4\,x\,y, \quad b = y^{(1)} = y' + \left(x - \frac{1}{x}\right) y$$

und die Formel (21) gibt für die Lösung y der Gleichung a, wenn wir die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 bezüglich gleich 1, 0, 0 setzen,

$$y = \bar{y} - x\,\bar{\bar{y}} = H' + xH.$$

Damit wir diese Lösung in das Polynom a bequem einsetzen können, berechnen wir auch den Wert $y^{(1)}$ nach der Formel (21) für $\nu = 2$

$$y^{(1)} = e^{-\frac{x^3}{2}}\left(4 + \frac{2}{x^2}\right) + H'\left(4x - \frac{2}{x^3}\right) + 2H;$$

wenn wir die Werte $y, y^{(1)}$ in den Ausdruck für das Polynom a einsetzen, so bekommen wir Null.

(Eingegangen am 15. Februar 1939.)

Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. I*).

Von

Werner Meyer-König in Stuttgart.

Inhalt.

Seite

Einleitung 447
§ 1. Ein Umkehrsatz des C_k-Verfahrens 451
§ 2. Zwei Hilfssätze über arithmetische Mittel 461
§ 3. Umkehrsätze des H_k-Verfahrens 469
§ 4. Über die Umkehrung des H_∞-Verfahrens 474

Einleitung.

Die Glieder der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ seien, sofern nichts anderes gesagt ist, komplexe Zahlen und es sei stets

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

Als C_k-Transformation der Folge s_n bezeichnet man bekanntlich die Folge

$$c_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}},$$

wobei k eine ganze, nicht negative Zahl ist[1]) und (für $n = 0, 1, \ldots$) $s_n = S_n^{(0)}$ und weiter

$$S_n^{(k)} = S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \ldots + S_n^{(k-1)}$$

gesetzt ist. Besitzt $c_n^{(k)}$ für $n \to \infty$ einen Grenzwert s, so setzt man $C_k\text{-}\lim s_n = s$.

Als H_k-Transformation von s_n bezeichnet man die Folge $h_n^{(k)}$, die durch die Beziehungen $h_n^{(0)} = s_n$ und

$$h_n^{(k)} = \frac{1}{n+1}\,(h_0^{(k-1)} + h_1^{(k-1)} + \ldots + h_n^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

erklärt ist. Besitzt $h_n^{(k)}$ einen Grenzwert s, so setzt man $H_k\text{-}\lim s_n = s$.

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen als Dissertation (D 21) angenommen. — Für vielfache Anregungen und Ratschläge ist Verfasser Herrn Prof. J. Karamata und Herrn Prof. K. Knopp zu Dank verpflichtet.

[1]) Limitierungen negativer und nicht ganzzahliger Ordnung ziehen wir hier und beim H_k-Verfahren nicht in Betracht.

Bei festem k ist das C_k-Verfahren mit dem H_k-Verfahren äquivalent, d. h. aus $C_k\text{-}\lim s_n = s$ folgt $H_k\text{-}\lim s_n = s$ und umgekehrt [2]). Ferner gelten für jedes der beiden Verfahren die Permanenzsätze: Aus $s_n \to s$ folgt $C_k\text{-}\lim s_n = s$ und $H_k\text{-}\lim s_n = s$. Der umgekehrte Schluß ist jedoch nicht allgemein richtig. Er ist nur zulässig, wenn noch gewisse zusätzliche Voraussetzungen über die s_n gemacht werden, die wir mit Karamata als Konvergenzbedingungen bezeichnen. Man erhält so die Umkehrsätze der Limitierungsverfahren. Wegen des Äquivalenzsatzes ist jede Konvergenzbedingung für das C_k-Verfahren auch eine solche für das H_k-Verfahren und umgekehrt. Bleiben wir etwa beim H_k-Verfahren, so ist dafür die geläufigste Konvergenzbedingung die von Hardy [3]) stammende Bedingung $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Es gilt also der

O-$H_k \to K$-Satz. *Aus* $n\,|a_n| < M$ *und* $H_k\text{-}\lim s_n = s$ *folgt* $\lim s_n = s$.

Es gilt sogar der schärfere

O_L-$H_k \to K$-Satz. *Aus* $n a_n > -M$, $M > 0$

und

$$H_k\text{-}\lim s_n = s$$

folgt

$$\lim s_n = s.$$

Die hier auftretende sogenannte einseitige Konvergenzbedingung geht auf Landau [4]) zurück. Von demselben stammt auch die folgende Konvergenzbedingung für das H_k-Verfahren:

$$(1) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \operatorname*{Max}_{n \leqq n' \leqq (1+\vartheta)n} |s_{n'} - s_n| = \omega(\vartheta) \to 0, \quad \vartheta \to 0.$$

Diese Bedingung ist von einer Form, die typisch ist für sehr viele der bisher untersuchten Limitierungsverfahren [5]). Das in ihr auftretende, von n abhängige Intervall für die Nummer n', das bei den einzelnen Verfahren von verschiedener Größenordnung ist, nennen wir mit Karamata das Konvergenz-

---

[2]) Äquivalenzsatz des C- und H-Verfahrens [K. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Inaug.-Diss. Berlin 1907; W. Schnee, Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes, Math. Annalen **67** (1909), S. 110—125].

[3]) G. H. Hardy, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, Proc. London Math. Soc. (2), **8** (1910), S. 302—320.

[4]) E. Landau, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, Prace matematyczno-fizyczne **21** (1910), S. 97—177.

[5]) J. Karamata, (1) Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité, Paris 1937 (Actualités scientifiques et industrielles, 450); (2) Allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren, Abhandlungen aus dem Math. Sem. der hans. Univ. **12** (1937), S. 48—63.

ntervall des betreffenden Verfahrens. Das Konvergenzintervall des C_k- und H_k-Verfahrens ist also das Intervall $(n, (1+\vartheta)n)$.

Zu den Verfahren der betrachteten Art gehört beispielsweise auch das imitierungsverfahren von Euler-Knopp der Ordnung 1, das durch

$$E\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} s_\nu$$

efiniert ist. Das zugehörige Konvergenzintervall ist $(n, n+\vartheta\sqrt{n})$. Insesondere gilt der O-$E \to K$-Satz mit der Konvergenzbedingung $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$[6]).

Noch bei einer anderen Art von Konvergenzbedingungen, den Lückenedingungen, scheint das Konvergenzintervall eine Rolle zu spielen. So ist ür das H_1-Verfahren die Existenz einer Indexfolge n_ν mit $n_\nu < n_{\nu+1}$ und $_{\nu+1} - n_\nu > \vartheta n_\nu$, wobei ϑ eine von ν unabhängige positive Zahl sein soll, nd das Verschwinden der Glieder a_n mit $n \neq n_\nu$ eine Konvergenzbedingung. Diese Aussage ist als Spezialfall in der folgenden enthalten. Sind n_ν und n'_ν wei Indexfolgen mit $n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1}$ und $n'_\nu - n_\nu > \vartheta n_\nu$ $(\vartheta > 0)$ und ist $_n = 0$ für $n = n_\nu + 1, \ldots, n'_\nu$, so hat $H_1\text{-}\lim s_n = s$ die Konvergenz on s_{n_ν} zur Folge, d. h. es konvergiert die Reihe, die aus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ entsteht, wenn nan die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lücken stehende Gruppe von Gliedern jeweils durch eine Klammer zusammenfaßt[7]). Ich will die erste Aussage, bei der die Lücken immer nur durch ein Glied a_n getrennt sind, einen Lückensatz erster Art, die verallgemeinerte Aussage einen Lückensatz weiter Art nennen. Beidemal ist das Lückenintervall (mindestens) von der Größenordnung ϑn, also von der Größe des zum H_1-Verfahren gehörigen Konvergenzintervalls. Das veranlaßt zu der Fragestellung: Gilt für jedes der Verfahren, denen eine Konvergenzbedingung der Form (1) zugehört, der Lückensatz erster oder zweiter Art mit Lücken von der Länge des zugehörigen Konvergenzintervalls? Oder unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen ist das der Fall? Oder mit welchen schärferen Lückenbedingungen

---

[6]) K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren II, Math. Zeitschr. 8 (1923), S. 125–156.

[7]) Beweis. Ich kann mich auf den Fall $s = 0$ beschränken. Mit

$$\sigma_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}$$

ist

$$\frac{([n_\nu(1+\vartheta)]+1)\,\sigma_{[n_\nu(1+\vartheta)]} - (n_\nu+1)\,\sigma_{n_\nu}}{[n_\nu(1+\vartheta)]} = \frac{[n_\nu(1+\vartheta)] - n_\nu}{[n_\nu(1+\vartheta)]}\, s_{n_\nu}.$$

Wegen $\sigma_n \to 0$ strebt die linke Seite gegen 0, woraus $s_{n_\nu} \to 0$ folgt.

gelten denn die Lückensätze? Zur Beantwortung solcher, auf das C-, H- und E-Verfahren spezialisierter Fragen will die vorliegende Arbeit einige Beiträge liefern.

Daß der Lückensatz erster Art mit Intervall ϑn beim A-Verfahren richtig ist, ergibt sich aus dem „High Indices Theorem" von Hardy und Littlewood [8]). Wegen des $C_k \to A$-Satzes ist er also auch beim C_k-Verfahren richtig. Dieses Ergebnis, das unter Benützung eines Umkehrsatzes des Rieszschen Verfahrens auch Obreschkoff [9]) gewonnen hat, wird in § 1 direkt am C_k-Verfahren hergeleitet. Weiter wird am H_k-Verfahren bewiesen, daß dafür der Lückensatz zweiter Art mit dem Intervall ϑn richtig ist. Es wird aber beidemal gleich mehr bewiesen. Es wird nämlich gezeigt, daß die Glieder a_n in den Lückenintervallen gar nicht wirklich zu verschwinden brauchen: es genügt, daß sie dort $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind. Als Muster sei der spätere Satz 2 angeführt. Dabei benützen wir die folgende

Bezeichnung. Sind n_ν und n'_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ zwei der Bedingung $n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1}$ genügende Indexfolgen, so soll unter $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ die mit $n_0, n_0 + 1, \ldots, n'_0, n_1, n_1 + 1, \ldots$ beginnende Indexfolge bezeichnet werden, deren Glieder in der natürlichen Ordnung die Intervalle $\langle n_0, n'_0\rangle$, $\langle n_1, n'_1\rangle, \ldots$ durchlaufen.

Damit lautet der genannte

Satz. *Mit einem $\vartheta > 0$ sei $n'_\nu - n_\nu > \vartheta n_\nu$ und mit einem $M > 0$ für alle ν*

$$n\,|a_n| < M, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu.$$

Dann folgt aus $\lim\limits_{\nu\to\infty} h^{(k)}_{k_\nu} = s$, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_{k_\nu} = s$ ist.

Für den Fall, daß $a_n = 0$ ist für $n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu$, geht dieser Satz in den Lückensatz zweiter Art über mit der Verschärfung, daß nur die Teilfolge $h^{(k)}_{k_\nu}$ der H_k-Transformation als konvergent vorausgesetzt zu werden braucht. Eine andere Spezialisierung können wir vornehmen, indem wir $n'_\nu = n_{\nu+1} - 1$ setzen. Dann ergibt sich der

---

[8]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. (2), **25** (1926), S. 219–236. Das Theorem lautet: Es sei

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1 + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0,$$

ferner $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ konvergent für $x > 0$. Dann folgt aus $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = s$, daß $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$ ist.

[9]) N. Obreschkoff, Über einige Sätze für Summierung von divergenten Reihen, Tôhoku Math. Journal **32** (1930), S. 231–233.

O-$H_k \to K$-Satz (verschärfte Fassung). Es sei n_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ eine der Lückenbedingung $n_{\nu+1} - n_\nu > \vartheta' n_\nu$ $(\vartheta' > 0)$ genügende Indexfolge und

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \neq n_\nu.$$

Dann folgt aus H_k-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ist.

Insbesondere ist darin für den Fall, daß $a_n = 0$ ist für $n \neq n_\nu$, der Lückensatz erster Art enthalten.

Zusammen mit dem genannten Satz werden in § 3 Sätze ähnlicher Art, bei denen einseitige und ein- und zweiseitige Bedingungen gemischt auftreten, bewiesen. § 4 bringt zwei Umkehrsätze des H_∞-Verfahrens.

§ 1.

Ein Umkehrsatz des C_k-Verfahrens.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1. *Voraussetzung. Für die Indexfolgen n_ν, n'_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ sei*

1) $$n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1},$$

2) $$n'_\nu - n_\nu > \vartheta\, n_\nu, \qquad \vartheta > 0.$$

Für die Folge s_n sei mit einem $M > 0$

3) $$n\,|a_n| < M, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu$$

und, falls $n'_\nu + 1 < n_{\nu+1}$ ist,

4) $$|s_n| < M, \qquad n'_\nu + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1} - 1.$$

Behauptung. Aus C_k-$\lim s_n = s$ (k positiv ganz [10])) folgt

$$\lim_{\nu \to \infty} s_{k_\nu} = s,$$

wobei $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ [11]) ist.

Daraus ergibt sich für $n'_\nu + 1 = n_{\nu+1}$ der O-$C_k \to K$-Satz in der verschärften Fassung (siehe Einleitung), der seinerseits wieder den C_k-Lückensatz erster Art als Spezialfall enthält.

Den von zusätzlichen Voraussetzungen freien C_k-Lückensatz zweiter Art können wir wegen der Voraussetzung (4) hieraus nicht entnehmen. Er wird sich unter Verwendung des $C_k \to H_k$-Satzes aus Satz 2 ergeben. Satz 2 wird nämlich zeigen, daß die Voraussetzung (4) überflüssig ist. Obwohl also der Satz 1 in Satz 2 enthalten sein wird, soll er gesondert bewiesen werden, weil die angewandte Methode eher auch bei anderen Verfahren zum Ziele

[10]) Diese Beschränkung ist wegen des Permanenzsatzes der C_k-Verfahren unwesentlich. Wir werden beim Beweis sogar k ganz $\geqq 2$ voraussetzen.

[11]) Die Definition der Indexfolge $k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ siehe in der Einleitung (S. 450).

führen dürfte als die beim Beweis von Satz 2 benützte. Der Kern der Methode besteht in der durch den Permanenzsatz der C_k-Verfahren gegebenen Möglichkeit, durch lineare Kombination von C_l-Transformationen ($l \geqq k$) zu einer Mittelbildung überzugehen, bei der eine zusammenhängende Gruppe von Gliedern der Folge s_n, die durch die Aussage (3) miteinander verknüpft sind, mit einem beliebig starken Gewicht versehen wird:

Die Voraussetzung $C_k\text{-}\lim s_n = s$ besagt, daß

$$c_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-\nu-1}{k-1} \frac{s_\nu}{\binom{n+k}{k}} \to s$$

strebt. Wir setzen

$$c_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}^{(k)} s_\nu,$$

wobei also

$$a_{n\nu}^{(k)} = \frac{k(n+k-\nu-1)(n+k-\nu-2)\dots(n-\nu+1)}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}, \qquad \nu = 0, 1, \dots, n$$

ist und merken gleich an, daß

$$a_{n\nu}^{(k)} \leqq \frac{k}{n+k} < \frac{k}{n} \tag{5}$$

ist. Ist p ganz $\geqq 1$, r ganz $\geqq 0$, so strebt auf Grund des Permanenzsatzes

$$\frac{\alpha_r}{(k-1)(p+r)+1} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}^{((k-1)(p+r)+1)} s_\nu \to \frac{\alpha_r}{(k-1)(p+r)+1} s, \tag{6}$$

wobei zur Abkürzung

$$\alpha_r = (-1)^r \binom{p}{r} \tag{7}$$

gesetzt wurde. Weiter setzen wir

$$A_p = \sum_{r=0}^{p} \frac{\alpha_r}{(k-1)(p+r)+1}, \tag{8}$$

denken uns (6) für $r = 0, \dots, p$ angeschrieben und erhalten durch Addition

$$B_n^{(p)} = \frac{1}{A_p} \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu}^{(p)} s_\nu \to s. \tag{9}$$

Dabei ist

$$b_{n\nu}^{(p)} = \sum_{r=0}^{p} \frac{\alpha_r}{(k-1)(p+r)+1} a_{n\nu}^{((k-1)(p+r)+1)}. \tag{10}$$

Die in (9) auftretende Mittelbildung hat nun, wie sich zeigen wird, die gewünschte Eigenschaft. Einmal stehen die Hauptgewichte nicht mehr am Anfang, wie es bei der C_k-Transformation der Fall ist, sondern in der

Umgebung des Spaltenindexes $\nu = [\alpha n]$, wobei $\alpha = 1 - 2^{-\frac{1}{k-1}}$ ist für $k > 1$, zum anderen lassen sie sich durch Wahl eines genügend großen p dort beliebig stark konzentrieren [12]). Würde nun entgegen der Behauptung s_{k_ν} nicht gegen s konvergieren, so ließen sich immer wieder Gruppen von Gliedern finden, die in der Mittelbildung $B_n^{(p)}$ den Ausschlag geben und eine Konvergenz von $B_n^{(p)}$ gegen s verhindern würden.

Der Einzelausführung des Beweises schicken wir zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1. In $\langle a, b\rangle$ sei $h(x) \geqq 0$ und in engerem Sinne monoton wachsend. Ist $a < c < b$, so ist gleichmäßig für alle x in $\langle a, c\rangle$

$$h^p(x) = o\Big(\int_a^b h^p(t)\,dt\Big), \qquad p \to \infty.$$

Beweis. Ich wähle ein c', so daß $c < c' < b$ ist. Dann ist für alle x in $\langle a, c\rangle$

$$\frac{h^p(x)}{\int_a^b h^p(t)\,dt} < \frac{h^p(c)}{(b-c')\,h^p(c')} \to 0, \qquad p \to \infty.$$

Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall k ganz $\geqq 2$ [10]). Wir setzen

$$\alpha = 1 - 2^{-\frac{1}{k-1}} \leqq \frac{1}{2},$$

$$g(x) = g_1(x) = (1-x)^{k-1} - (1-x)^{2(k-1)}, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$g_p(x) = g^p(x), \qquad p = 1, 2, \ldots$$

und im Einklang mit (8)

$$A_p = \int_0^1 g_p(x)\,dx = \int_0^1 \Big(\sum_{r=0}^{p} \alpha_r (1-x)^{(k-1)(p+r)}\Big)\,dx = \sum_{r=0}^{p} \frac{\alpha_r}{(k-1)(p+r)+1}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Hilfssatz 2. 1. Für x in $\langle 0, 1\rangle$ und $x \neq \alpha$ ist

$$g_p(x) = o(A_p), \qquad p \to \infty.$$

2. Zu ϑ $(0 < \vartheta \leqq \frac{1}{2})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Nummer p, so daß

$$\frac{1}{A_p} \int_{\alpha(1-\vartheta)}^{\alpha(1+\vartheta)} g_p(x)\,dx > 1 - \varepsilon.$$

---

[12]) Die Verteilung der Gewichte wird charakterisiert durch die unten definierte Funktion $((1-x))^{k-1} - (1-x)^{2(k-1)})^p$ (siehe Abschnitt II des Beweises). Diese geht zum C_k-Verfahren in derselben Beziehung wie die Funktion $(e^{-x} - e^{-2x})^p$ zum A-Verfahren. Letztere Funktion wurde von A. E. Ingham zu einem sehr eleganten Beweis des High-Indices-Theorems von Hardy und Littlewood benutzt [Quart. Journal of Math., Oxford Ser. VIII (1937), S. 1—7].

Beweis. In $\langle 0, 1\rangle$ ist $g_p(x)$ nicht negativ und fällt monoton im engeren Sinne, wenn sich x von der Maximumstelle α entfernt. Für $0 \leqq x < \alpha$ liefert Hilfssatz 1

$$g_p(x) = o\left(\int_0^{\alpha} g_p(t)\,dt\right), \qquad p \to \infty,$$

also ist erst recht

$$g_p(x) = o\left(\int_0^{1} g_p(t)\,dt\right), \qquad p \to \infty.$$

Analoge Schlüsse würden im Falle $\alpha < x \leqq 1$ das Gewünschte liefern. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich nun unmittelbar.

Beweis des Satzes 1. Es genügt, den Beweis im Reellen und für den Fall $s = 0$ zu führen. Wir bereiten den Abschnitt II, in dem die wesentliche Abschätzung erfolgt, vor durch einen Abschnitt I. In I seien n_ν und n'_ν die Indexfolgen aus der Voraussetzung des Satzes, μ sei eine positive Konstante und s_n eine Folge, die $o(n^k)$ ist, (3) und (4) erfüllt und für die $|s_{k_\nu}| > \mu$ für unendlich viele ν ist.

I. 1. Wir machen zunächst noch die weitere Voraussetzung, daß s_n nicht beschränkt sei. Wir setzen

$$\beta = \frac{2}{\alpha}$$

und wählen ein $L > 1$, so daß

$$^{\beta}\log L \geqq k \tag{11}$$

ist. Dann gibt es eine (monoton gegen ∞ wachsende) Indexfolge l_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$, so daß gilt:

$$|s_r| < |s_{l_\nu}|, \qquad 0 \leqq r \leqq l_\nu - 1, \tag{12}$$

$$|s_r| < L\,|s_{l_\nu}|, \qquad l_\nu + 1 \leqq r \leqq \beta l_\nu. \tag{13}$$

Würde eine solche Folge l_ν nicht existieren, so gäbe es immer, wenn

$$|s_r| < |s_q|, \qquad 0 \leqq r \leqq q - 1$$

(was wegen der vorausgesetzten Unbeschränktheit von s_n unendlich oft der Fall ist) und wenn gleichzeitig q größer als eine gewisse Anfangsnummer $\bar{q}$ ist, die Nummer q' zwischen $q + 1$ und βq je einschließlich, so daß $|s_{q'}| \geqq L\,|s_q|$ ist. Ich könnte dann eine Nummernfolge q_ν auf folgende Weise konstruieren. Ich wähle $q_0 > \bar{q}$, so daß $|s_r| < |s_{q_0}|$ für $0 \leqq r \leqq q_0 - 1$. Als q_1 wähle ich die kleinste der Nummern $q_0 + 1, \ldots, [\beta q_0]$, für die $|s_{q_1}| \geqq L\,|s_{q_0}|$ ist. Dann ist $|s_r| < |s_{q_1}|$ für $0 \leqq r \leqq q_1 - 1$. Als q_2 wähle ich die kleinste der Nummern $q_1 + 1, \ldots, [\beta q_1]$, für die $|s_{q_2}| \geqq L\,|s_{q_1}|$ ist, usw. Die Folge q_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ hätte dann die folgenden Eigenschaften:

$$|s_{q_{\nu+1}}| \geqq L\,|s_{q_\nu}|, \tag{14}$$

$$q_\nu + 1 \leqq q_{\nu+1} \leqq \beta q_\nu. \tag{15}$$

Aus (15) würde folgen

$$\frac{q_\nu}{q_0} \leqq \beta^\nu,$$

also

$$\nu \geqq {}^{\beta}\log \frac{q_\nu}{q_0},$$

und zusammen mit (14)

$$|s_{q_\nu}| \geqq L^\nu |s_{q_0}| \geqq |s_{q_0}| \left(\frac{q_\nu}{q_0}\right)^{\beta \log L}. \tag{16}$$

Wegen (11) und (16) wäre aber sicher nicht $s_n = o(n^k)$. Durch diesen Widerspruch ist die Existenz der Folge l_ν nachgewiesen. Wegen (12) kann s_{l_ν} nicht beschränkt sein (sonst wäre ja s_n beschränkt). Da nach (4) $s_n = O(1)$ für $n \neq k_\nu$, kann ich die l_ν jetzt noch so auswählen, daß l_ν Teilfolge von k_ν ist und daß

$$|s_{l_\nu}| > \mu. \tag{17}$$

I. 2. Wir behalten die Voraussetzung, daß s_n nicht beschränkt sein soll, weiterhin bei und zeigen:

Es gibt ein $\vartheta_1 > 0$ und die Indexfolge η_ν ($\to \infty$, $\nu = 0, 1, \ldots$), so daß für $n = \eta_\nu$ gilt:

$$\operatorname{sign} s_{n+1} = \operatorname{sign} s_{n+2} = \ldots = \operatorname{sign} s_{[n(1+\vartheta_1)]}, \tag{18}$$

$$0 < \frac{\mu}{2} < \operatorname{Min}\left(|s_{n+1}|, \ldots, |s_{[n(1+\vartheta_1)]}|\right), \tag{19}$$

$$|s_r| < 2L \operatorname{Min}\left(|s_{n+1}|, \ldots, |s_{[n(1+\vartheta_1)]}|\right), \qquad 0 \leqq r \leqq \beta n. \tag{20}$$

Zum Beweis wähle ich

$$\vartheta_1 = \operatorname{Min}\left(\frac{\mu}{4M}, \frac{\vartheta}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

und ein m_0 so groß, daß mit $\varrho = \frac{\vartheta}{2}$ gilt:

$$r(1+\varrho) - 2 > r\left(1 + \frac{\varrho}{2}\right), \qquad r > m_0, \tag{21}$$

$$\frac{M}{r} < \frac{\mu}{4}, \qquad r > m_0. \tag{22}$$

Die Existenz der Folge η_ν ist sichergestellt, wenn ich zeigen kann, daß es zu jedem $m_1 > m_0$ ein $\eta > m_1$ gibt, so daß (18), (19), (20) für $n = \eta$ erfüllt sind. Ist $m_1 > m_0$ vorgegeben, so kann ich die Nummern ν_1 und ν_2 finden, so daß

$$m_0 < m_1 < n_{\nu_1} \leqq l_{\nu_2} \leqq n'_{\nu_1}$$

ist. Ich unterscheide nun zwei Fälle.

α. Es sei

$$n_{\nu_1} \leqq l_{\nu_2} \leqq [n_{\nu_1}(1+\varrho)].$$

Dann ist $[l_{\nu_2}(1+\vartheta_1)] \leqq n'_{\nu_1}$. Dazu braucht nur die folgende Reihe von Gleichungen richtig zu sein:

$$l_{\nu_2}(1+\vartheta_1) \leqq n'_{\nu_1},$$
$$(1+\varrho)(1+\vartheta_1) \leqq \frac{n'_{\nu_1}}{n_{\nu_1}},$$
$$\varrho + \vartheta_1 + \varrho\,\vartheta_1 \leqq \vartheta,$$
$$\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{4} + \frac{\vartheta}{2}\cdot\frac{1}{2} \leqq \vartheta,$$

was sicher der Fall ist. Nehme ich nun $\eta = l_{\nu_2}$, so sind die an η gestellten Anforderungen erfüllt. Es sei etwa

$$s_{l_{\nu_2}} > \mu. \tag{23}$$

(Der wegen (17) nur noch mögliche Fall $s_{l_{\nu_2}} < -\mu$ ließe sich analog erledigen.) Dann ist wegen (3) für $r = l_{\nu_2}+1, \ldots, [l_{\nu_2}(1+\vartheta_1)]$

$$s_r > s_{l_{\nu_2}} - ([l_{\nu_2}(1+\vartheta_1)] - l_{\nu_2})\frac{M}{l_{\nu_2}} > s_{l_{\nu_2}} - \vartheta_1 M \geqq s_{l_{\nu_2}} - \frac{\mu}{2}. \tag{24}$$

Wegen (23) sind also (18) und (19) für $n = \eta = l_{\nu_2}$ erfüllt. Weiter ist wegen (12) und (13)

$$|s_r| < L|s_{l_{\nu_2}}|, \qquad 0 \leqq r \leqq \beta\, l_{\nu_2}. \tag{25}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit der aus (24) folgenden Ungleichung

$$|s_{l_{\nu_2}}| < \operatorname{Min}(|s_{l_{\nu_2}+1}|, \ldots, |s_{[l_{\nu_2}(1+\vartheta_1)]}|) + \frac{\mu}{2}$$

und (19) (für $n = l_{\nu_2}$), daß (20) für $n = \eta = l_{\nu_2}$ erfüllt ist.

β. Es sei

$$[n_{\nu_1}(1+\varrho)] < l_{\nu_2} \leqq n'_{\nu_1}.$$

Wegen $\vartheta_1 \leqq \frac{1}{2}$ gibt es eine Nummer t, so daß entweder $[t(1+\vartheta_1)] = l_{\nu_2}$ oder $[t(1+\vartheta_1)] = l_{\nu_2} - 1$ ist. Es ist dann $t \geqq n_{\nu_1}$. Dazu braucht ja nur die folgende Reihe von Gleichungen richtig zu sein:

$$\begin{aligned} n_{\nu_1}(1+\vartheta_1) &\leqq t(1+\vartheta_1), \\ &\leqq l_{\nu_2} - 1, \\ &\leqq n_{\nu_1}(1+\varrho) - 2, \\ &\leqq n_{\nu_1}\left(1+\frac{\varrho}{2}\right), \qquad \text{(wegen (21))}, \\ \vartheta_1 &\leqq \frac{\varrho}{2}. \end{aligned}$$

Nehme ich nun $\eta = t$, so sind die an η gestellten Anforderungen erfüllt. Es sei etwa

$$s_{l_{\nu_2}} < -\mu. \tag{26}$$

Für $r = t+1, \ldots, [t(1+\vartheta_1)]$ ist

$$s_r < s_{[t(1+\vartheta_1)]} + ([t(1+\vartheta_1)] - t)\frac{M}{t} \leqq s_{[t(1+\vartheta_1)]} + \frac{\mu}{4}.$$

Entweder ist nun $s_r < s_{l_{\nu_2}} + \frac{\mu}{4}$ oder $s < s_{l_{\nu_2}-1} + \frac{\mu}{4}$. Im letzteren Falle habe ich bei Verwendung von (3) und (22)

$$s_r < s_{l_{\nu_2}} + (s_{l_{\nu_2}-1} - s_{l_{\nu_2}}) + \frac{\mu}{4} < s_{l_{\nu_2}} + \frac{M}{l_{\nu_2}} + \frac{\mu}{4} < s_{l_{\nu_2}} + \frac{\mu}{2}.$$

In jedem Falle ist also $s_r < s_{l_{\nu_2}} + \frac{\mu}{2}$. Mit (26) ergibt sich, daß (18) und (19) für $n = \eta = t$ erfüllt sind. Wegen $-s_{l_{\nu_2}} < -s_r + \frac{\mu}{2}$ gilt

$$|s_{l_{\nu_2}}| < \mathrm{Min}\,(|s_{t+1}|, \ldots, |s_{[t(1+\vartheta_1)]}|) + \frac{\mu}{2}.$$

Daraus und aus (19) (für $n = t$) folgt, daß

$$|s_{l_{\nu_2}}| < 2\,\mathrm{Min}\,(|s_{t+1}|, \ldots, |s_{[t(1+\vartheta_1)]}|)$$

ist; zusammen mit (25) ergibt sich, daß (20) für $n = \eta = t$ erfüllt ist.

I. 3. In I. 1 und I. 2 war s_n als unbeschränkt vorausgesetzt. Die zu Beginn von I. 2 aufgestellte Behauptung trifft aber für geeignetes L auch dann zu, wenn s_n beschränkt, also etwa $|s_n| < U$ ist. Wörtlich ebenso wie in I. 2 überzeugt man sich nämlich von der Existenz eines $\vartheta_1 > 0$ und einer Indexfolge η_ν, die so beschaffen sind, daß (18) und (19) für $n = \eta_\nu$ gelten. Dabei kann ich diesmal an Stelle der vorhin benützten Folge l_ν irgendeine Indexfolge $l_\nu (\to \infty)$ verwenden, die nur Teilfolge von k_ν und so beschaffen ist, daß $|s_{l_\nu}| > \mu$. (20) ist dann wegen (19) von selbst richtig für $n = \eta_\nu$, wenn nur $L > \frac{U}{\mu}$ ist. Die Fallunterscheidung, daß s_n beschränkt bzw. unbeschränkt sei, ist jetzt also überflüssig: für ein geeignetes L gilt jedenfalls die in I. 2 formulierte Behauptung. Aus ihr leite ich nun als bisheriges Ergebnis ab:

I. 4. Es gibt die positiven Konstanten L und ϑ' und die Indexfolge $\eta'_\nu (\to \infty, \nu = 0, 1, \ldots)$, so daß für $n = \eta'_\nu$ gilt:

(27) $$\mathrm{sign}\, s_{[\alpha n(1-\vartheta')]} = \mathrm{sign}\, s_{[\alpha n(1-\vartheta')]+1} = \ldots = \mathrm{sign}\, s_{[\alpha n(1+\vartheta')]},$$

(28) $$0 < \frac{\mu}{2} < \mathrm{Min}_{n,\vartheta'},$$

(29) $$|s_r| < 2L\,\mathrm{Min}_{n,\vartheta'}, \qquad 0 \leqq r \leqq n,$$

wobei

$$\mathrm{Min}_{n,\vartheta'} = \mathrm{Min}\,(|s_{[\alpha n(1-\vartheta')]}|, \ldots, |s_{[\alpha n(1+\vartheta')]}|).$$

Der Beweis ergibt sich, wenn ich

$$\vartheta' = \frac{\vartheta_1}{4}, \quad \eta'_\nu = \left[\frac{1}{\alpha}\eta_\nu\left(1+\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right]$$

setze und (18), (19), (20) anwende. Dabei sind die folgenden leicht zu beweisenden Ungleichungen zu beachten:

$$\eta_\nu + 1 \leqq \left[\alpha\left[\frac{1}{\alpha}\,\eta_\nu\left(1+\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right]\left(1-\frac{\vartheta_1}{4}\right)\right],$$

$$[\eta_\nu(1+\vartheta_1)] \geqq \left[\alpha\left[\frac{1}{\alpha}\,\eta_\nu\left(1+\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right]\left(1+\frac{\vartheta_1}{4}\right)\right],$$

$$\left[\frac{1}{\alpha}\,\eta_\nu\left(1+\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right] \leqq \beta\,\eta_\nu,$$

die wegen $\vartheta_1 \leqq \frac{1}{2}$ richtig sind, wenn η_ν größer als eine gewisse nur von α und ϑ_1 abhängige Anfangsnummer ist.

II. Wir führen den Beweis nun zu Ende. Die Richtigkeit der Behauptung $\lim_{\nu\to\infty} s_{k_\nu} = 0$ weisen wir nach, indem wir zeigen: Wenn eine Folge s_n der Voraussetzung des Satzes 1 genügt und wenn unendlich oft $|s_{k_\nu}| > \mu$ ist mit einem $\mu > 0$, so kann s_n nicht C_k-limitierbar zum Wert 0 sein. Da $s_n = o(n^k)$ eine notwendige Bedingung für C_k-Limitierbarkeit ist, genügt es wegen des in I gewonnenen Ergebnisses zu zeigen: Eine Folge s_n, für welche die Bedingung aus I. 4 gilt, kann nicht C_k-limitierbar zum Werte 0 sein.

Wir greifen zurück auf die Mittelbildung $B_n^{(p)}$ in (9). Um Aufschluß über die Verteilung der dabei auftretenden Gewichte $b_{n\nu}^{(p)}$ zu erhalten, definieren wir für $x \geqq 0$ die Funktionen

$$\psi_n^{(p)}(x) = \begin{cases} b_{n\nu}^{(p)}, & \nu \leqq x < \nu+1, \\ 0\ , & x \geqq n+1 \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

und

$$\varphi_n^{(p)}(x) = n\,\psi_n^{(p)}(n\,x), \qquad x \geqq 0.$$

Da wegen (5)

$$|b_{n\nu}^{(p)}| < \sum_{r=0}^{p} \frac{|\alpha_r|}{n} = \frac{2^p}{n}$$

ist, folgt

$$\psi_n^{(p)}(x) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty, \text{ gleichmäßig für } x \geqq 0,$$

und

$$\varphi_n^{(p)}(x) = O(1), \qquad n \to \infty, \text{ gleichmäßig für } x \geqq 0.$$

Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist bei festem p

$$\varphi_n^{(p)}(x) = n\,b_{n,[n\,x]}^{(p)}$$

$$= \sum_{r=0}^{p} \alpha_r \,\frac{n}{n+(k-1)(p+r)+1} \prod_{\varrho=1}^{\varrho=(k-1)(p+r)} \frac{n-[n\,x]+\varrho}{n+\varrho}.$$

Jeder Summand dieser endlichen Summe ist gleichmäßig konvergent, da jeder Faktor des Produkts gleichmäßig gegen eine beschränkte Grenzfunktion konvergiert. Also ist auch die Summe gleichmäßig konvergent, und zwar ist

$$\varphi_n^{(p)}(x) = \sum_{r=0}^{p} \alpha_r (1-x)^{(k-1)(p+r)} + o(1)$$

$$= g_p(x) + o(1), \quad n \to \infty, \quad \text{gleichmäßig für } x \text{ in } \langle 0,1\rangle.$$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{1}{2(1+4L)} = \varepsilon$$

gesetzt. Dann läßt sich nach Hilfssatz 2 ein p so wählen, daß

(30) $$\frac{1}{A_p} \operatorname{Max}\left(g_p(\alpha(1-\vartheta')),\ g_p(\alpha(1+\vartheta'))\right) < \varepsilon,$$

(31) $$\frac{1}{A_p} \int_{\alpha(1-\vartheta')}^{\alpha(1+\vartheta')} g_p(x)\,dx > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Dieses p werde weiterhin festgehalten. Ich setze

$$P_n^{(p)} = \sum_{\nu=0}^{[\alpha n(1-\vartheta')]-1} |b_{n\nu}^{(p)}| = \int_0^{[\alpha n(1-\vartheta')]} |\psi_n^{(p)}(x)|\,dx,$$

$$Q_n^{(p)} = \sum_{\nu=[\alpha n(1-\vartheta')]}^{[\alpha n(1+\vartheta')]} b_{n\nu}^{(p)} = \int_{[\alpha n(1-\vartheta')]}^{[\alpha n(1+\vartheta')]+1} \psi_n^{(p)}(x)\,dx,$$

$$R_n^{(p)} = \sum_{\nu=[\alpha n(1+\vartheta')]+1}^{n} |b_{n\nu}^{(p)}| = \int_{[\alpha n(1+\vartheta')]+1}^{n+1} |\psi_n^{(p)}(x)|\,dx.$$

Dann ist

$$\frac{1}{A_p}(P_n^{(p)} + R_n^{(p)}) \leqq \frac{1}{A_p} \int_0^{\alpha(1-\vartheta')} \varphi_n^{(p)}(x)\,dx + \frac{1}{A_p} \int_{\alpha n(1+\vartheta')}^{1+\frac{1}{n}} \varphi_n^{(p)}(x)\,dx.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\varphi_n^{(p)}(x)$ in $\langle 0,1\rangle$ und der gleichmäßigen Beschränktheit für $x \geqq 0$ gibt es ein $\bar{n}$, so daß für $n > \bar{n}$

$$\frac{1}{A_p}(P_n^{(p)} + R_n^{(p)}) \leqq \int_0^{\alpha(1-\vartheta')} \left(\frac{g_p(x)}{A_p} + \varepsilon\right) dx + \int_{\alpha(1+\vartheta')}^{1} \left(\frac{g_p(x)}{A_p} + \varepsilon\right) dx + o(1),$$

und wegen der Monotonieeigenschaften von $g_p(x)$ und (30) ein $n^{(1)}$, so daß

(32) $$\frac{1}{A_p}(P_n^{(p)} + R_n^{(p)}) < 2\varepsilon, \qquad n > n^{(1)}$$

ist. Weiter ist

$$\frac{Q_n^{(p)}}{A_p} = \frac{1}{A_p} \int\limits_{\frac{1}{n}[\alpha n(1-\vartheta')]}^{\frac{1}{n}[\alpha n(1+\vartheta')]+\frac{1}{n}} \varphi_n^{(p)}(x)\,dx = \frac{1}{A_p} \int\limits_{\alpha(1-\vartheta')+o(1)}^{\alpha(1+\vartheta')+o(1)} \varphi_n^{(p)}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{A_p} \int\limits_{\alpha(1-\vartheta')}^{\alpha(1+\vartheta')} \varphi_n^{(p)}(x)\,dx + o(1) = \frac{1}{A_p} \int\limits_{\alpha(1-\vartheta')}^{\alpha(1+\vartheta')} g_p(x)\,dx + o(1),\quad n \to \infty.$$

Wegen (31) gibt es ein $n^{(2)}$, so daß

$$\frac{Q_n^{(p)}}{A_p} > 1-\varepsilon, \qquad n > n^{(2)}. \tag{33}$$

Wegen des Zusammenhangs der $b_{n\nu}^{(p)}$ mit $\varphi_n^{(p)}(x)$ und der gleichmäßigen Konvergenz $\varphi_n^{(p)}(x) \to g_p(x)$ für x in $\langle 0, 1\rangle$ kann ich noch ein $n^{(3)}$ so wählen, daß

$$b_{n\nu}^{(p)} \geqq 0, \quad [\alpha n(1-\vartheta')] \leqq \nu \leqq [\alpha n(1+\vartheta')], \qquad n > n^{(3)}.$$

Nun wähle ich ein $\eta_\nu' > \mathrm{Max}\,(n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)})$ und nehme etwa an, daß die in (27) für $n = \eta_\nu'$ auftretenden Vorzeichen $+$ sind. Dann ist

$$B_{\eta_\nu'}^{(p)} = \frac{1}{A_p} \sum_{r=0}^{[\alpha\eta_\nu'(1-\vartheta')]-1} b_{\eta_\nu' r}^{(p)} s_r + \frac{1}{A_p} \sum_{r=[\alpha\eta_\nu'(1-\vartheta')]}^{[\alpha\eta_\nu'(1+\vartheta')]} b_{\eta_\nu' r}^{(p)} s_r$$

$$+ \frac{1}{A_p} \sum_{r=[\alpha\eta_\nu'(1+\vartheta')]+1}^{\eta_\nu'} b_{\eta_\nu' r}^{(p)} s_r$$

$$> -2L\,\mathrm{Min}_{\eta_\nu',\vartheta'} \frac{P_{\eta_\nu'}^{(p)} + R_{\eta_\nu'}^{(p)}}{A_p} + \mathrm{Min}_{\eta_\nu',\vartheta'} \frac{Q_{\eta_\nu'}^{(p)}}{A_p}$$

und mit (32), (33) und (28)

$$> -2L\,\mathrm{Min}_{\eta_\nu',\vartheta'} \cdot 2\varepsilon + \mathrm{Min}_{\eta_\nu',\vartheta'}(1-\varepsilon)$$

$$= \mathrm{Min}_{\eta_\nu',\vartheta'}(1-\varepsilon(1+4L)) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Min}_{\eta_\nu',\vartheta'}$$

$$> \frac{\mu}{4}.$$

Es ist also für $\eta_\nu' > \mathrm{Max}\,(n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)})$

$$|B_{\eta_\nu'}^{(p)}| > \frac{\mu}{4}.$$

Mit dem gewählten p ist also s_n nicht $B^{(p)}$-limitierbar zum Werte 0, also auch nicht C_k-limitierbar zum Werte 0, da ja sonst (9) gelten müßte mit $s = 0$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2.

Zwei Hilfssätze über arithmetische Mittel.

Wir bereiten den Beweis der H_k-Umkehrsätze durch den Beweis zweier Hilfssätze vor.

Wir wollen sagen, die reelle Folge s_n ($n = 0, 1, \ldots$) habe die Eigenschaft I, II oder III, je nachdem bezüglich folgendes erfüllt ist:

I. Es gibt ein $\vartheta > 0$, so daß es zu jedem $\bar{n} > 0$ und $K > 0$ die Nummer $n > \bar{n}$ gibt derart, daß

$$s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots, s_{[n(1+\vartheta)]} > K.$$

II. Es gibt ein $\vartheta > 0$, so daß es zu jedem $\bar{n} > 0$ und $K > 0$ die Nummer $n > \bar{n}$ gibt derart, daß

$$s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots, s_{[n(1+\vartheta)]} < -K.$$

III. Es gibt die beiden punktfremden, abgeschlossenen Intervalle $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$ und die Konstanten $\vartheta > 0$, $M > 0$, so daß es

1. zu $\bar{n} > 0$ stets $n > \bar{n}$ gibt derart, daß

(1) $$s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots, s_{[n(1+\vartheta)]} \text{ in } \langle a_1, b_1\rangle$$

liegen und daß

(2) $$\begin{cases} \text{entweder (a) } ra_r < M, & r = n+2, \ldots, [n(1+\vartheta)] \\ \text{oder (b) } ra_r > -M, & r = n+2, \ldots, [n(1+\vartheta)] \end{cases}$$ [13])

ist, und daß es

2. zu $\bar{m} > 0$ stets $m > \bar{m}$ gibt derart, daß $s_{m+1}, \ldots, s_{[m(1+\vartheta)]}$ in $\langle a_2, b_2\rangle$ liegen und daß entweder (2a) oder (2b) mit m an Stelle von n gilt.

Behauptung. 1. Besitzt s_n wenigstens eine der beiden Eigenschaften I, II, so besitzt auch $\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + \ldots + s_n)$ wenigstens eine der beiden Eigenschaften I, II. 2. Besitzt s_n die Eigenschaft III, so besitzt σ_n wenigstens eine der drei Eigenschaften I, II, III.

Zum Beweis seien zunächst die Beziehungen

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{s_n - \sigma_n}{n}, \qquad \sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{s_{n+1} - \sigma_n}{n+2}$$

aufgestellt. Aus ihnen läßt sich ablesen:

(3) $$\text{Aus } \sigma_n \gtreqless s_n \quad \text{folgt } \sigma_{n-1} \gtreqless \sigma_n,$$

(4) $$\text{aus } \sigma_n \lesseqgtr s_{n+1} \quad \text{folgt } \sigma_{n+1} \lesseqgtr \sigma_n.$$

Wir werden davon fortgesetzt, auch ohne Rückverweisung, Gebrauch machen.

---

[13]) Es wird eine Aussage über die Differenzen benachbarter Glieder aus (1) gemacht. Deshalb tritt a_{n+2} als erstes Glied auf.

1. Ich nehme an, s_n besitze Eigenschaft I (analog wäre der Fall zu behandeln, daß s_n die Eigenschaft II besitzt), und zeige, daß dann σ_n die Eigenschaft I oder II besitzt. Ich kann die Nummernfolge n_ν und Folge $K_\nu > 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ so wählen, daß $[n_\nu(1+\vartheta)] \leqq n_{\nu+1}$ ist und $K_\nu < K_{\nu+1} \to \infty$ strebt und daß weiter $s_{n_\nu+1}, \ldots, s_{[n_\nu(1+\vartheta)]} > K_\nu$ sind.

1.1. Es sei

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{1}{K_\nu} \sigma_{[n_\nu(1+\vartheta')]} < 0, \quad \vartheta' = \frac{\vartheta}{2}.$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\bar{\nu} > 0$, so daß

$$\frac{1}{K_\nu} \sigma_{[n_\nu(1+\vartheta')]} < -\delta, \qquad \nu > \bar{\nu}$$

ist. Unter Verwendung von (3) hat man daher

$$\sigma_{n_\nu+1}, \ldots, \sigma_{[n_\nu(1+\vartheta')]} < -\delta K_\nu, \quad \nu > \bar{\nu},$$

woraus man erkennt, daß σ_n die Eigenschaft II besitzt.

1.2. Es sei

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{1}{K_\nu} \sigma_{[n_\nu(1+\vartheta')]} \geqq 0.$$

Ich wähle ein $\varepsilon > 0$, so daß mit $\vartheta'' = \frac{3\vartheta}{4}$

$$0 < \frac{(1+\varepsilon)(1+\vartheta')}{1+\vartheta''} < 1 \tag{5}$$

ist. Weiter wähle ich die (monoton gegen ∞ wachsende) Nummernfolge $\nu(l)$ $(l = 0, 1, \ldots)$, so daß

$$\frac{1}{K_{\nu(l)}} \sigma_{[n_{\nu(l)}(1+\vartheta')]} > -\varepsilon$$

bleibt. Dann ist mit $\varrho' = [n_{\nu(l)}(1+\vartheta')]$, $\varrho'' = [n_{\nu(l)}(1+\vartheta'')]$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varrho''} &= \frac{1}{\varrho''+1}\left((\varrho'+1)\sigma_{\varrho'} + s_{\varrho'+1} + \ldots + s_{\varrho''}\right) \\
&> \frac{1}{\varrho''+1}\left(-(\varrho'+1)\varepsilon K_{\nu(l)} + (\varrho''-\varrho')K_{\nu(l)}\right) \\
&> \left(1 - \frac{(1+\varepsilon)(\varrho'+1)}{\varrho''+1}\right) K_{\nu(l)}.
\end{aligned}$$

Also gibt es wegen (5) ein δ mit $0 < \delta < 1$ und ein $\bar{l} > 0$, so daß

$$\sigma_{\varrho''} > \delta K_{\nu(l)}, \qquad l > \bar{l}$$

ist. Nun wähle ich noch ein $\vartheta_1 > 0$, so daß $[\varrho''(1+\vartheta_1)] \leqq [n_{\nu(l)}(1+\vartheta)]$ für $l > \bar{\bar{l}}$ ist. Da aus $\sigma_n > \delta K_{\nu(l)}$ und $s_{n+1} > \delta K_{\nu(l)}$ allgemein $\sigma_{n+1} > \delta K_{\nu(l)}$ folgt, hat man

$$\sigma_{\varrho''+1}, \sigma_{\varrho''+2}, \ldots, \sigma_{[\varrho''(1+\vartheta_1)]} > \delta K_{\nu(l)}, \qquad l > \mathrm{Max}(\bar{l}, \bar{\bar{l}}),$$

woraus man erkennt, daß σ_n die Eigenschaft I besitzt. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

2. Ich nehme an, s_n besitze die Eigenschaft III. $J_1 = \langle a_1, b_1\rangle$ liege links von $J_2 = \langle a_2, b_2\rangle$. Ich wähle die Indexfolgen n_ν und m_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ mit $n_{\nu+1} \geqq [n_\nu(1+\vartheta)]$, $m_{\nu+1} \geqq [m_\nu(1+\vartheta)]$, so daß die in III. 1 auftretenden Beziehungen (1) und (2) für $n = n_\nu$ und die in III. 2 auftretenden entsprechenden Beziehungen für $m = m_\nu$ erfüllt sind.

2. 1. σ_{n_ν} habe einen Häufungspunkt im Unendlichen. Ist etwa $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sigma_{n_\nu} = +\infty$, so kann ich die Indexfolge $\nu(l)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ wählen, so daß $\sigma_{n_{\nu(l)}} > l$ ist. $\langle a_1, b_1\rangle$ liege in $\langle -A, A\rangle$, $A > 0$. Für $\varrho = n_{\nu(l)}+1, \ldots, [n_{\nu(l)}(1+\vartheta)]$ ist dann

$$\begin{aligned}\sigma_\varrho &= \frac{1}{\varrho+1}\left((n_{\nu(l)}+1)\sigma_{n_{\nu(l)}} + s_{n_{\nu(l)}+1} + \ldots + s_\varrho\right)\\ &> \frac{1}{\varrho+1}\left((n_{\nu(l)}+1)l - (\varrho - n_{\nu(l)})A\right)\\ &> \frac{l(n_{\nu(l)}+1)}{n_{\nu(l)}(1+\vartheta)+1} - A\frac{\vartheta n_{\nu(l)}}{n_{\nu(l)}+2}\\ &> \frac{l}{1+\vartheta} - \vartheta A \to \infty, \quad l \to \infty,\end{aligned}$$

woraus man erkennt, daß σ_n die Eigenschaft I besitzt. Genau so würde aus der Annahme $\underline{\lim_{\nu\to\infty}} \sigma_{n_\nu} = -\infty$ folgen, daß σ_n die Eigenschaft II besitzt.

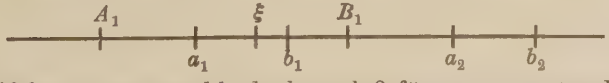
2. 2. σ_{m_ν} habe einen Häufungspunkt im Unendlichen. Wie unter 2. 1 folgt, daß σ_n die Eigenschaft I oder II besitzt.

2. 3. Jetzt ist noch der Hauptfall zu betrachten, daß sowohl σ_{n_ν} als σ_{m_ν} keinen unendlichen Häufungspunkt hat. Dann kann ich mir die Folgen n_ν und m_ν und dazu ein ξ und ein ζ so gewählt denken, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \sigma_{n_\nu} = \xi, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sigma_{m_\nu} = \zeta^{14})$$

ist.

2. 31. ξ liege in $\langle a_1, b_1\rangle$. Ich kann mir (nötigenfalls durch Übergang



zu einer Teilfolge) n_ν so gewählt denken, daß für $n = n_\nu$ entweder stets (2a) oder stets (2b) erfüllt ist. Es sei etwa stets (2a) erfüllt (der andere Fall wäre analog zu erledigen). Ich wähle ein Intervall $\langle A_1, B_1\rangle$, das keinen Punkt mit $\langle a_2, b_2\rangle$ gemeinsam hat, so daß $\langle a_1, b_1\rangle$ in (A_1, B_1) liegt und kann nun

---

14) Es gibt die Teilfolgen n_ν' und m_ν' von n_ν und m_ν, so daß $\sigma_{n_\nu'} \to \xi$, $\sigma_{m_\nu'} \to \zeta$ strebt. Unter Weglassung der Striche bezeichne ich n_ν' und m_ν' nun wieder mit n_ν und m_ν. Ähnlich ist noch des öfteren zu verfahren.

(nötigenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge) n_ν noch so annehmen, daß σ_{n_ν} in (A_1, B_1) liegt. Von selbst liegen dann

$$\sigma_{n_\nu},\ \sigma_{n_\nu+1},\ \ldots,\ \sigma_{[n_\nu(1+\vartheta)]} \quad \text{in} \quad (A_1, B_1). \tag{6}$$

Das nächste Ziel ist nun, ein in J_1 gelegenes Intervall $J_1' = \langle a_1', b_1' \rangle$, ein $\vartheta' > 0$ und die Indexfolge n_ν' anzugeben derart, daß (1) und (2) für $n = n_\nu'$ erfüllt sind, wenn dort J_1 durch J_1', ϑ durch ϑ' ersetzt wird.

A. Entweder gibt es ein $\bar{\nu}$, so daß

$$s_{n_\nu+1},\ s_{n_\nu+2},\ \ldots,\ s_{\left[n_\nu\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]} > a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3}, \quad \nu > \bar{\nu}$$

ist. Dann erreiche ich das Gewünschte durch die Wahl

$$J_1' = \left\langle a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3},\ b_1 \right\rangle, \quad \vartheta' = \frac{\vartheta}{2},\ n_\nu' = n_\nu\,(\nu > \bar{\nu}).$$

B. Oder gibt es die Indexfolge $\nu(l)$ derart, daß ich zu $n_{\nu(l)}$ eine Nummer n_l' angeben kann mit $n_{\nu(l)} + 1 \leqq n_l' + 1 \leqq \left[n_{\nu(l)}\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)\right]$ und $s_{n_l'+1} \leqq a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3}$. Dann wähle ich $J_1' = \left\langle a_1, a_1 + \frac{2\,(b_1 - a_1)}{3} \right\rangle$, $\vartheta' < \mathrm{Min}\left(\frac{b_1 - a_1}{3\,M}, \vartheta\right)$ und außerdem ϑ' so klein, daß $\left[\left[n\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)\right](1 + \vartheta')\right] \leqq [n\,(1 + \vartheta)]$ ist. Dann hat man nämlich

$$n_{\nu(l)} + 1 \leqq n_l' + 1, \ldots, [n_l'(1 + \vartheta')] \leqq [n_{\nu(l)}(1 + \vartheta)]$$

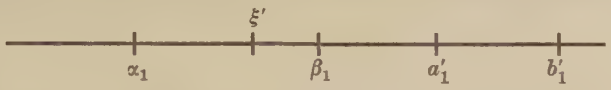
und, weil (2a) für $n = n_{\nu(l)}$ erfüllt ist, für $r = n_l' + 1, \ldots, [n_l'(1 + \vartheta')]$

$$\begin{aligned} s_r &= s_{n_l'+1} + \sum_{\mu = n_l'+2}^{r} (s_\mu - s_{\mu-1}) \\ &\leqq a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3} + \sum_{\mu = n_l'+2}^{r} \frac{M}{\mu} \leqq a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3} + (r - n_l' - 1)\frac{M}{n_l' + 2} \\ &\leqq a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3} + \vartheta' n_l' \frac{M}{n_l'} < a_1 + \frac{2\,(b_1 - a_1)}{3}. \end{aligned}$$

Die in A bzw. B konstruierte Folge n_ν' ist so, daß wegen (6) $\sigma_{n_\nu'}$ in (A_1, B_1) liegt. Ich nehme zunächst an, daß $\sigma_{n_\nu'}$ einen nicht in $\langle a_1', b_1' \rangle$ (aber von selbst in $\langle A_1, B_1 \rangle$) gelegenen Häufungspunkt ξ' hat und betrachte diesen Fall als Unterfall

2. 311. Ich arbeite nun also mit den Konstanten $\vartheta'\,(< \vartheta)$ und M, den Intervallen $J_1' = \langle a_1', b_1' \rangle$, $J_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$, den Folgen n_ν', m_ν und den Grenzwerten $\lim_{\nu \to \infty} \sigma_{n_\nu'} = \xi'$ (vgl. [14]), $\lim_{\nu \to \infty} \sigma_{m_\nu} = \zeta$, wobei ξ' links von a_2 und nicht in J_1' liegt.

2. 3111. $\xi' \neq \zeta$. Ich wähle die Intervalle $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$, $\langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$, so daß sie



keinen Punkt gemeinsam haben und daß ξ' in (α_1, β_1), ζ in (α_2, β_2) liegt. Falls ζ in $\langle a_2, b_2 \rangle$ liegt, treffe ich die Wahl noch so, daß $\langle a_2, b_2 \rangle$ in (α_2, β_2) liegt. Ich will nun zeigen, daß σ_n die Eigenschaft III. 1 besitzt für das Intervall $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ und geeignete Konstanten $\vartheta_1 > 0$, $M_1 > 0$. Es liege etwa ξ' links von $\langle a'_1, b'_1 \rangle$ (der entgegengesetzte Fall ließe sich ganz analog behandeln). Ist $\vartheta_1 \leqq \vartheta'$, so hat man für $r = 1, 2, \ldots, [n'_\nu(1+\vartheta_1)] - n'_\nu$

$$\sigma_{n'_\nu + r} - \sigma_{n'_\nu} = \frac{s_{n'_\nu+1} + \ldots + s_{n'_\nu+r} - r\sigma_{n'_\nu}}{n'_\nu + r + 1} \leqq \frac{r(b'_1 - \sigma_{n'_\nu})}{n'_\nu}$$

$$\leqq \vartheta_1 (b'_1 - \sigma_{n'_\nu}) < \frac{\beta_1 - \xi}{2}$$

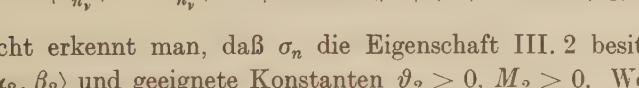
für genügend großes n'_ν, falls ich nur ϑ_1 klein genug gewählt habe. Da sicher $\sigma_{n'_\nu + r} > \sigma_{n'_\nu}$ erkennt man, daß mit dem geeignet gewählten ϑ_1 $\sigma_{n'_\nu+1}, \ldots, \sigma_{[n'_\nu(1+\vartheta_1)]}$ alle in $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ liegen, wenn nur n'_ν genügend groß ist. Weiter wird dann für geeignetes M_1 auch der in (2) gestellten Forderung genügt:

$$(n'_\nu + r + 1)|\sigma_{n'_\nu + r} - \sigma_{n'_\nu + r - 1}|$$

$$= |s_{n'_\nu + r} - \sigma_{n'_\nu + r - 1}| \leqq \mathrm{Max}(|a'_1|, |b'_1|) + \mathrm{Max}(|\alpha_1|, |\beta_1|).$$

Ebenso leicht erkennt man, daß σ_n die Eigenschaft III. 2 besitzt für das Intervall $\langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$ und geeignete Konstanten $\vartheta_2 > 0$, $M_2 > 0$. Wenn $\langle a_2, b_2 \rangle$ in (α_2, β_2) liegt, kann ich sogar einfach $\vartheta_2 = \vartheta'$ nehmen. Insgesamt besitzt also σ_n die Eigenschaft III für die Intervalle $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$, $\langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$ und die Konstanten $\vartheta_0 = \mathrm{Min}(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $M_0 = \mathrm{Max}(M_1, M_2)$.

2. 3112. $\xi' = \zeta$, wobei also $\xi' < a_2$ ist und nicht in $\langle a'_1, b'_1 \rangle$ liegt.



Für $\tau \leqq \frac{\vartheta'}{2}$ ist

$$\sigma_{[m_\nu(1+\tau)]} - \sigma_{m_\nu} = \frac{s_{m_\nu+1} + \cdots + s_{[m_\nu(1+\tau)]} - ([m_\nu(1+\tau)] - m_\nu)\sigma_{m_\nu}}{[m_\nu(1+\tau)] + 1},$$

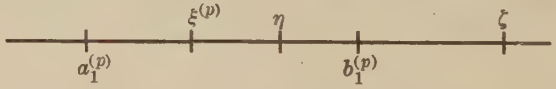
$$\sigma_{[m_\nu(1+\tau)]} - \sigma_{m_\nu} \leqq \frac{([m_\nu(1+\tau)] - m_\nu)(b_2 - \sigma_{m_\nu})}{[m_\nu(1+\tau)] + 1}, \tag{7}$$

$$\sigma_{[m_\nu(1+\tau)]} - \sigma_{m_\nu} \geqq \frac{([m_\nu(1+\tau)] - m_\nu)(a_2 - \sigma_{m_\nu})}{[m_\nu(1+\tau)] + 1}. \tag{8}$$

Wegen (7) und $\sigma_{m_\nu} \to \xi'$ kann ich τ nun noch so klein und dazu ein D ($\xi' < D < a_2$) wählen, daß $\sigma_{[m_\nu(1+\tau)]} < D$ ist, falls m_ν schon genügend groß ist. τ halte ich jetzt fest und kann wegen (8) ein C ($\xi' < C < D$) so wählen, daß $\sigma_{[m_\nu(1+\tau)]} > C$ ist, falls m_ν schon genügend groß ist. ζ' sei ein in $\langle C, D\rangle$ gelegener Häufungspunkt von $\sigma_{[m_\nu(1+\tau)]}$. Ich setze $m'_\nu = [m_\nu(1+\tau)]$ und kann (nötigenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge von m'_ν) also annehmen, daß s_n die Beziehungen (1) und (2) erfüllt für $n = m'_\nu$, für das Intervall $\langle a_2, b_2\rangle$ an Stelle von $\langle a_1, b_1\rangle$ und die Konstanten τ' und M (wobei τ' nur so klein gewählt zu sein braucht, daß $\left[\left[n\left(1+\frac{\vartheta'}{2}\right)\right](1+\tau')\right] \leqq [n(1+\vartheta')]$ ist) und daß $\lim_{\nu\to\infty} \sigma_{m'_\nu} = \zeta'$ ist. Wegen $\xi' \neq \zeta'$ kann ich nun genau wie im Falle 2. 3111 weiterschließen.

2. 312. Ich betrachte jetzt den Fall, daß die in 2. 31 zu J'_1 und ϑ' gehörige Folge n'_ν so beschaffen ist, daß alle Häufungspunkte von $\sigma_{n'_\nu}$ (wenigstens ein solcher ist in $\langle A_1, B_1\rangle$ sicher vorhanden) in J'_1 liegen. Dann setze ich $J'_1 = J_1^{(1)}$, $\vartheta' = \vartheta^{(1)}$ und gehe ebenso, wie ich von J_1, ϑ zu J'_1, ϑ' überging, von $J_1^{(1)}$, $\vartheta^{(1)}$ zu $J_1^{(2)}$, $\vartheta^{(2)}$ über usw. Es kann dann sein, daß ich nach endlich vielen Schritten zu $J_1^{(p)} = \langle a_1^{(p)}, b_1^{(p)}\rangle$, $\vartheta^{(p)}$ komme, so daß die zu ihnen gehörige Folge $n_\nu^{(p)}$ so ist, daß $\sigma_{n_\nu^{(p)}}$ einen nicht in $J_1^{(p)}$ gelegenen Häufungspunkt hat. Dann bin ich beim Falle 2. 311. Oder aber wird durch das Verfahren wegen $|J_1^{(p+1)}| = \frac{2}{3}|J_1^{(p)}|$ eine Intervallschachtelung mit innerstem Punkt η definiert.

2. 3121. $\eta \neq \zeta$. Ich nehme p so groß, daß ζ außerhalb $\langle a_1^{(p)}, b_1^{(p)}\rangle$ liegt und arbeite nun wie unter 2. 311 mit der Konstanten $\vartheta^{(p)}$, den Intervallen $J_1^{(p)}, J_2$, den Folgen $n_\nu^{(p)}, m_\nu$ und den Grenzwerten $\lim_\nu \sigma_{n_\nu^{(p)}} = \xi^{(p)}$ $\lim \sigma_{m_\nu} = \zeta$, wobei diesmal $\xi^{(p)}$ in $J_1^{(p)}$ liegt. Ich wähle die punktfremden



Intervalle $\langle \alpha_1, \beta_1\rangle$, $\langle \alpha_2, \beta_2\rangle$, so daß $\langle a_1^{(p)}, b_1^{(p)}\rangle$ in (α_1, β_1), ζ in (α_2, β_2) liegt, und falls ζ in $\langle a_2, b_2\rangle$ liegt, treffe ich die Wahl noch so, daß $\langle a_2, b_2\rangle$ in (α_2, β_2) liegt. Analoge Schlüsse wie in 2. 3111 lassen erkennen, daß dann σ_n die Eigenschaft III besitzt für die Intervalle $\langle \alpha_1, \beta_1\rangle$, $\langle \alpha_2, \beta_2\rangle$ und geeignete Konstanten ϑ und M.

2. 3122. $\eta = \zeta$. Die Folge $\sigma_{\left[m_\nu\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]}$ $(\nu \to \infty)$ besitzt einen endlichen, von ζ verschiedenen Häufungspunkt ζ'. Ich setze $m'_\nu = \left[m_\nu\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]$ und kann (nötigenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge von m'_ν) setzen $\lim_{\nu\to\infty} \sigma_{m'_\nu} = \zeta'$. Ich wähle ein $\tau' > 0$, so daß $\left[\left[n\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\right](1+\tau')\right]$

$\leqq [n(1+\vartheta)]$ ist. Dann sind (1) und (2) erfüllt für $n = m'_\nu$, das Intervall J_2 an Stelle von J_1 und die Konstanten τ' und M. Wegen $\eta \neq \zeta'$ bin ich damit bei 2. 3121.

2. 32. ζ liege in $\langle a_2, b_2\rangle$. Man geht analog vor wie unter 2. 31.

2. 33. ξ liege nicht in $\langle a_1, b_1\rangle$, ζ nicht in $\langle a_2, b_2\rangle$. Man unterscheide die Fälle $\xi \neq \zeta$ und $\xi = \zeta$ und schließe wie unter 2. 3111 bzw. 2. 3112.

Damit sind alle möglichen Fälle erledigt. Ich bringe das Bewiesene in die folgende, für die spätere Anwendung brauchbare Form:

Hilfssatz 3. Voraussetzung. Es gibt die Konstanten $\vartheta > 0$, $M > 0$, die punktfremden Intervalle $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$, die Indexfolge n_ν und die Folge $K_\nu > 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, so daß $[n_\nu(1+\vartheta)] < n_{\nu+1}$ ist, $K_\nu < K_{\nu+1} \to \infty$ strebt und daß s_n wenigstens einer der drei folgenden Bedingungen genügt:

I. Für unendlich viele ν sind $s_{n_\nu+1}, \ldots, s_{[n_\nu(1+\vartheta)]} > K_\nu$.

II. Für unendlich viele ν sind $s_{n_\nu+1}, \ldots, s_{[n_\nu(1+\vartheta)]} < -K_\nu$.

III. Für unendlich viele ν gilt:

$$s_{n_\nu+1}, \ldots, s_{[n_\nu(1+\vartheta)]} \text{ liegen in } \langle a_1, b_1\rangle$$

und es ist entweder

$$ra_r < M, \qquad r = n_\nu + 2, \ldots, [n_\nu(1+\vartheta)]$$

oder

$$ra_r > -M, \quad r = n_\nu + 2, \ldots, [n_\nu(1+\vartheta)],$$

und gleichzeitig gilt für unendlich viele ν:

$$s_{n_\nu+1}, \ldots, s_{[n_\nu(1+\vartheta)]} \text{ liegen in } \langle a_2, b_2\rangle$$

und es ist entweder

$$ra_r < M, \qquad r = n_\nu + 2, \ldots, [n_\nu(1+\vartheta)]$$

oder

$$ra_r > -M, \quad r = n_\nu + 2, \ldots, [n_\nu(1+\vartheta)].$$

Behauptung. Was in der Voraussetzung von s_n ausgesagt ist, gilt mit geeigneten, dieselben Nebenbedingungen wie dort erfüllenden Konstanten ϑ', M', Intervallen $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle$, $\langle\alpha_2, \beta_2\rangle$, und Folgen n'_ν, K'_ν auch für $\sigma_n = \frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1}$. Und zwar läßt es sich so einrichten, daß $k'_\nu = k'_\nu(n'_\nu, [n'_\nu(1+\vartheta')])$ Teilfolge von $k_\nu = k_\nu(n_\nu, [n_\nu(1+\vartheta)])$ ist [11]).

Die Anwendung dieses Hilfssatzes zum Beweis von H_k-Umkehrsätzen wird sich so vollziehen, daß aus der Divergenz von s_n oder einer Teilfolge davon zusammen mit der Konvergenzbedingung gefolgert wird, daß s_n seine Voraussetzung erfüllt, d. h. in einer ganz bestimmten Weise divergiert. Dann divergiert auch $h_n^{(1)}$ (= Mittel 1. Ordnung) in derselben Weise, also auch $h_n^{(2)}$ (= Mittel 2. Ordnung), usw. und s_n könnte von keiner Ordnung H_k-limitierbar sein. Ist damit die Konvergenz der Folge s_n oder einer Teilfolge festgestellt,

so interessiert weiter noch ihr Grenzwert. Daß dieser in den betrachteten Fällen nicht von H_k-lim s_n verschieden sein kann, wird der folgende Hilfssatz 4 lehren.

Hilfssatz 4. Voraussetzung. Es gibt ein $\vartheta > 0$ und die Indexfolge n_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$, so daß $[n_\nu(1+\vartheta)] < n_{\nu+1}$ ist. Mit

$$k_\nu = k_\nu(n_\nu, [n_\nu(1+\vartheta)])$$

ist

$$s_{k_\nu} = s + o(1), \qquad \nu \to \infty.$$

Behauptung. Entweder ist

$$\sigma_{k_\nu} = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{k_\nu}}{k_\nu + 1} = s + o(1), \qquad \nu \to \infty$$

oder es trifft die Behauptung von Hilfssatz 3 zu.

Der Beweis wird erbracht sein, wenn aus der Annahme eines von s verschiedenen Häufungspunktes h von σ_{k_ν} die Gültigkeit der Behauptung von Hilfssatz 3 gefolgert werden kann.

1. $\overline{\lim}\, \sigma_{k_\nu} = +\infty$. Es sei $|s_{k_\nu}| < A$. Ist ein $L > 0$ vorgegeben, so gibt es dazu und zu jeder Nummer $\bar{n}$ die Nummern n und ν, so daß $\sigma_n > L$ und $\bar{n} < n_\nu \leqq n \leqq [n_\nu(1+\vartheta)]$ ist. Nummer μ sei eingeschränkt durch $n_\nu \leqq \mu \leqq [n_\nu(1+\vartheta)]$. Dann ist für $\mu < n$

$$\sigma_\mu = \frac{1}{\mu+1}\left((n+1)\sigma_n - s_n - \ldots - s_{\mu+1}\right) > \frac{n+1}{\mu+1} L - \frac{n-\mu}{\mu+1} A > L - \vartheta A.$$

Für $\mu > n$ hat man

$$\sigma_\mu = \frac{1}{\mu+1}\left((n+1)\sigma_n + s_{n+1} + \ldots + s_\mu\right) > \frac{n+1}{\mu+1} L - \frac{\mu-n}{\mu+1} A > \frac{L}{1+\vartheta} - \vartheta A.$$

Es folgt

$$\sigma_\mu > \operatorname{Min}\left(L - \vartheta A,\ \frac{L}{1+\vartheta} - \vartheta A\right), \quad \mu = n_\nu, \ldots, [n_\nu(1+\vartheta)].$$

Da L beliebig groß vorgegeben werden konnte, erkennt man, daß die Behauptung von Hilfssatz 3 zutrifft (Forderung I wird erfüllt).

2. $\underline{\lim}\, \sigma_{k_\nu} = -\infty$. Man schließt analog wie unter 1.

3. σ_{k_ν} habe den endlichen Häufungspunkt $h \neq s$.

Ich behandle den Fall $h > s$. Ich wähle ein $\varepsilon > 0$, so daß $s + \varepsilon < h - \varepsilon$ ist. Es sei $|s - s_{k_\nu}| < \varepsilon$ für $k_\nu > n'$. Dann gibt es zu $l = 0, 1, \ldots$ die Nummern $n^{(l)}$ und $\nu(l)$ $(\to \infty,\ l \to \infty)$, so daß $n' < n_{\nu(l)} \leqq n^{(l)} \leqq [n_{\nu(l)}(1+\vartheta)]$ ist und daß $\sigma_{n^{(l)}}$ in $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$ liegt. Dann ist wegen (3)

$$h - \varepsilon < \sigma_{n_{\nu(l)}}. \tag{9}$$

Weiter ist

$$\sigma_{n_{\nu(l)}} = \frac{1}{n_{\nu(l)}+1}\left((n^{(l)}+1)\,\sigma_{n^{(l)}} - s_{n^{(l)}} - \ldots - s_{n_{\nu(l)}+1}\right)$$

$$< \frac{n^{(l)}+1}{n_{\nu(l)}+1}(h+\varepsilon) + \frac{n^{(l)}-n_{\nu(l)}}{n_{\nu(l)}+1}\operatorname{Max}(|s-\varepsilon|,\ |s+\varepsilon|),$$

(10) $$\sigma_{n_{\nu(l)}} < (1+\vartheta)(h+\varepsilon) + \vartheta \operatorname{Max}(|s-\varepsilon|,\ |s+\varepsilon|).$$

Wegen (9) und (10) hat σ_{n_ν} einen endlichen Häufungspunkt $\xi \geqq h-\varepsilon$. Ich wähle $n_\nu^{(1)}$ als Teilfolge von n_ν, so daß $\lim \sigma_{n_\nu^{(1)}} = \xi$ ist. Weiter wähle ich ein $\tau < \frac{\vartheta}{2}$; dann hat $\sigma_{[n_\nu^{(1)}(1+\tau)]}$ einen links von ξ gelegenen Häufungspunkt ζ. Wähle ich außerdem τ genügend klein, so kann ich erreichen, daß ζ in $(s+\varepsilon, \xi)$ liegt. Ich bezeichne eine geeignete Teilfolge von $[n_\nu^{(1)}(1+\tau)]$ mit $n_\nu^{(2)}$ und kann dann setzen: $\sigma_{n_\nu^{(2)}} \to \zeta$. Wähle ich nun noch zwei punktfremde Intervalle $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle$, $\langle\alpha_2, \beta_2\rangle$, so daß ξ in (α_1, β_1), ζ in (α_2, β_2) liegt, so erkennt man, daß σ_n mit geeigneten Konstanten $\vartheta' > 0$, $M' > 0$ und geeigneter Folge n_ν' die Behauptung von Hilfssatz 3 erfüllt, indem es der Forderung III genügt.

§ 3.

Umkehrsätze des H_k-Verfahrens.

Die Hilfssätze 3 und 4 setzen uns nun in den Stand, einige Umkehrsätze für das H-Verfahren zu beweisen, deren erster Satz 1 enthält und so lautet:

Satz 2. *Voraussetzung. Für die Indexfolgen n_ν, n_ν' $(\nu = 0, 1, \ldots)$ sei*

(1) $$n_\nu < n_\nu' < n_{\nu+1},$$

(2) $$n_\nu' - n_\nu > \vartheta n_\nu, \qquad \vartheta > 0.$$

Für die Folge s_n sei mit einem $M > 0$

(3) $$n\,|a_n| < M, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n_\nu'.$$

Behauptung. Aus $h_{k_\nu}^{(k)} \to s$ (k positiv ganz) folgt $s_{k_\nu} \to s$, wobei $h_n^{(k)}$ die Folge der k-ten Hölderschen Mittel und $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n_\nu')$ [11] ist.

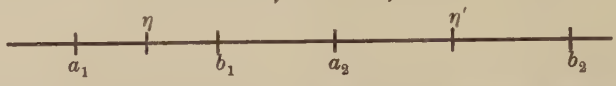
Die Erläuterung des Satzes erfolgte schon in der Einleitung. Erwähnt sei noch, daß gegenüber Satz 1 abgesehen vom Wegfall der dortigen Voraussetzung (4) jetzt auch noch dadurch mehr erreicht ist, daß nur die Konvergenz einer Teilfolge der H_k-Transformation vorausgesetzt wird [15]).

[15]) Auf eine Anwendungsmöglichkeit des Satzes 2 sei hingewiesen. Untersuchungen von A. Kolmogoroff [Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, Fund. math. 5 (1924), S. 96—97] zeigen unter anderem: Die Fourierreihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

Beweis. Hier und beim Beweis des folgenden Satzes treten immer wieder Abschätzungen derselben Art auf. Wir werden uns teilweise also kurz fassen können. Es genügt, den Beweis für eine reelle Folge s_n zu führen. Ich nehme an, daß s_{k_ν} divergiert. Die Häufungsgrenzen seien etwa endlich:

$$\eta = \underline{\lim}\, s_{k_\nu} < \overline{\lim}\, s_{k_\nu} = \eta'.$$



Ich wähle die Intervalle $\langle a_1, b_1\rangle$ und $\langle a_2, b_2\rangle$ mit den Mittelpunkten η und η', so daß sie keinen Punkt gemeinsam haben. Ich setze

$$\vartheta' = \mathrm{Min}\left(\frac{b_1 - a_1}{8M},\ \frac{b_2 - a_2}{8M},\ \frac{1}{2},\ \frac{\vartheta}{4}\right)$$

und zeige, daß es zu einem $\bar{n} > 0$ stets ein $n > \bar{n}$ gibt, so daß $s_{n+1}, \ldots, s_{[n(1+\vartheta')]}$ in $\langle a_1, b_1\rangle$ liegen und die Indizes $n+1, \ldots, [n(1+\vartheta')]$ in einem Intervall $\langle n_\nu, n'_\nu\rangle$ mit geeignetem ν liegen. (Analoges ließe sich für das Intervall $\langle a_2, b_2\rangle$ machen.) Damit ist dann bewiesen, daß s_n die Voraussetzung von Hilfssatz 3 erfüllt, indem es der Forderung III genügt. Ist $\bar{n} > 0$ gegeben, so gibt es eine Nummer m und zu ihr ein ν, so daß $\bar{n} < n_\nu \leqq m \leqq n'_\nu$ und s_m in $\left(\frac{a_1+\eta}{2}, \frac{\eta+b_1}{2}\right)$ liegt.

α. $n_\nu \leqq m \leqq [n_\nu(1+\varrho)]$, $\varrho = \frac{\vartheta}{2}$. Dann findet man leicht, daß $[m(1+\vartheta')] \leqq n'_\nu$ ist. Für meine gewünschte Nummer n kann ich m nehmen. Denn für $r = 1, 2, \ldots [m(1+\vartheta')] - m$ hat man

$$|s_{m+r} - s_m| \leqq |s_{m+1} - s_m| + \ldots + |s_{m+r} - s_{m+r-1}|$$
$$< r\frac{M}{m} < \vartheta' M \leqq \frac{b_1 - a_1}{8}.$$

β. $[n_\nu(1+\varrho)] < m \leqq n'_\nu$. Wegen $\vartheta' \leqq \frac{1}{2}$ gibt es sicher eine Nummer p, so daß entweder $[p(1+\vartheta')] = m$ oder $[p(1+\vartheta')] = m - 1$ ist. Einfache Abschätzungen (bei denen man $\bar{n}$ größer als eine geeignete, nur von vorgegebenen Größen abhängige Anfangsnummer annehme) lehren, daß $p \geqq n_\nu$ ist und daß ich p für meine gewünschte Nummer n nehmen kann.

---

einer integrierbaren Funktion $f(x)$ weise Lücken (n_ν, n'_ν) auf, d. h. es sei $a_n = b_n = 0$ für $n = n_\nu + 1, \ldots, n'_\nu$ und es sei $n'_\nu - n_\nu > \vartheta n_\nu$, $\vartheta > 0$. Dann konvergieren die Teilsummen $s_{n_\nu}(x)$ fast überall, nämlich sicher überall dort, wo die Reihe C_1-summierbar ist. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Lückensatz zweiter Art des C_1-Verfahrens [J. Marcinkiewicz, A new proof of a theorem on Fourier series, Journal London Math. Soc. 8 (1933), S. 279]. Vermöge Satz 2 läßt sich dieses Ergebnis in der Weise verallgemeinern, daß in den Intervallen (n_ν, n'_ν) auch nichtverschwindende Koeffizienten a_n und b_n zugelassen sind, sofern sie nur $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind und daß auf die Konvergenz von $s_{k_\nu}(x)$ mit $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ überall dort geschlossen werden kann, wo die Reihe C-summierbar von irgendeiner Ordnung ist.

Hat s_{k_ν} wenigstens eine unendliche Häufungsgrenze, so erfüllt s_n die Voraussetzung zu Hilfssatz 3, indem es der Forderung I oder II genügt [16]). s_n erfüllt also in jedem Falle die Voraussetzung von Hilfssatz 3. Bezeichne ich die dort auftretende Folge n_ν, um Verwechslungen mit der in der Voraussetzung zu Satz 2 vorkommenden Folge n_ν zu vermeiden, mit $\bar{n}_\nu$, so geht die Konstruktion von $\bar{n}_\nu$ jeweils so vor sich, daß $\bar{k}_\nu = \bar{k}_\nu(\bar{n}_\nu, [\bar{n}_\nu(1+\vartheta')])$ Teilfolge von $k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ ist. Die mehrfache Anwendung von Hilfssatz 3 zeigt nun, daß $h^{(k)}_{k_\nu}$ nicht konvergieren kann im Gegensatz zur Voraussetzung. Damit ist bewiesen, daß Folge s_{k_ν} konvergiert. Daß ihr Grenzwert gleich s ist, ergibt Hilfssatz 4 in Verbindung mit Hilfssatz 3.

Man wird fragen, ob Satz 2 im Falle einer reellen Folge auch noch richtig ist, wenn man nur die einseitige Konvergenzbedingung fordert, d. h. wenn man (3) etwa ersetzt durch

$$na_n < M, \quad M > 0, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu. \tag{4}$$

Das ist nicht der Fall, wie ein einfaches Gegenbeispiel zeigt. Man setze

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2^\nu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist mit $h^{(1)}_n = \sigma_n$

$$\frac{\nu}{2^\nu + 1} = \sigma_{2^\nu} > \sigma_{2^\nu+1} > \cdots > \sigma_{2^{\nu+1}-1} \geqq 0,$$

also $\lim \sigma_n = 0$. (1), (2), (4) sind erfüllt mit $n_\nu = 2^\nu$, $n'_\nu = 2^{\nu+1} - 1$, $\vartheta = \frac{1}{4}$ und $M > 0$. Jedoch divergiert s_{k_ν} wegen $s_{n_\nu} = 1$, $s_{n'_\nu} = 0$. Will man trotzdem auch bei der nur einseitigen Bedingung (4) eine Konvergenzaussage der Form $s_{l_\nu} \to s$ machen, so darf man zu l_ν keine Indizes zulassen, die sich „in der Nähe" der Enden des Intervalls (n_ν, n'_ν) befinden. In diesem Falle kann die Voraussetzung dann noch in der Weise gemildert werden, daß, nur in jedem einzelnen Intervall (n_ν, n'_ν) gleichbleibend, jedoch mit diesen Intervallen beliebig wechselnd, die links- oder rechtsseitige Bedingung zugelassen wird. Es gilt nämlich:

Satz 3. *Voraussetzung. Die Indexfolgen n_ν und n'_ν erfüllen* (1) *und* (2). *Für die reelle Folge s_n ist für jedes $\nu = 0, 1, \ldots$ mit einem $M > 0$ entweder*

$$na_n < M, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu, \tag{5}$$

oder

$$na_n > -M, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu. \tag{6}$$

Behauptung. Aus $h^{(k)}_{k_\nu} \to s$ (k positiv ganz) folgt $s_{l_\mu} \to s$, wobei $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ und l_μ ($\mu = 0, 1, \ldots$) eine (monoton wachsende) Index-

[16]) Man führt den Beweis analog wie oben durch Betrachtung zweier Fälle α und β.

folge von der folgenden Eigenschaft ist: es gibt ein τ $(0 < \tau < 1)$, *so daß für jedes* μ *die Beziehung* $n_\nu (1 + \tau) < l_\mu < n'_\nu (1 - \tau)$ *für ein gewisses* ν *richtig ist.*

Dieser Satz stellt eine Erweiterung des O_L-$H_k \to K$-Satzes dar, den er enthält. Ist nämlich H_k-lim $s_n = s$ und die einseitige Konvergenzbedingung durchweg nach derselben Seite hin erfüllt, so wähle man eine Indexfolge η_ν, so daß $\eta_{\nu+1} - \eta_\nu > 2\,\eta_\nu$ ist, und betrachte die folgenden drei Teilfolgen von s_n:

1. n durchläuft die Intervalle $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$, $\langle \eta_4, \eta_5 \rangle$, $\langle \eta_7, \eta_8 \rangle$, ...,
2. n durchläuft die Intervalle $\langle \eta_2, \eta_3 \rangle$, $\langle \eta_5, \eta_6 \rangle$, $\langle \eta_8, \eta_9 \rangle$, ...,
3. n durchläuft die Intervalle $\langle \eta_3, \eta_4 \rangle$, $\langle \eta_6, \eta_7 \rangle$, $\langle \eta_9, \eta_{10} \rangle$, ...

Setzt man $n_\nu = \eta_{3\nu}$, $n'_\nu = \eta_{3(\nu+1)} - 1$, so ergibt Satz 3 die Konvergenz der ersten Teilfolge. Ebenso schließt man auf die Konvergenz der beiden anderen Teilfolgen. Der Grenzwert ist jedesmal s, also hat man insgesamt $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$.

Beweis. Ich nehme an, s_{l_μ} oszilliere zwischen den endlichen verschiedenen Häufungsgrenzen η und η'. Ich wähle die punktfremden Intervalle $\langle a_1, b_1 \rangle$ und $\langle a_2, b_2 \rangle$ mit den Mittelpunkten η und η'. Weiter wähle ich ein ϑ', so daß

$$0 < \vartheta' < \text{Min}\left(\frac{b_1 - a_1}{8\,M}, \frac{b_2 - a_2}{8\,M}, \tau, \frac{1}{2}\right)$$

ist und ein $n^{(1)}$, so daß gilt:

$$n\,(1 + \vartheta') \leqq n\,(1 + \tau) - 1, \qquad n > n^{(1)}, \tag{7}$$

$$\frac{M}{n} < \frac{b_1 - a_1}{8}, \qquad n > n^{(1)}. \tag{8}$$

Ist für ein μ und ein ν $n^{(1)} < n_\nu < l_\mu < n'_\nu$ und p eine (wegen $\vartheta' < \frac{1}{2}$ sicher vorhandene) natürliche Zahl, so daß $[p\,(1 + \vartheta')] = l_\mu$ oder $= l_\mu - 1$ ist, so hat man:

$$n_\nu \leqq l_\mu,\ l_\mu + 1,\ \ldots,\ [l_\mu\,(1 + \vartheta')] \leqq n'_\nu, \tag{9}$$

$$n_\nu \leqq p,\ p + 1,\ \ldots,\ [p\,(1 + \vartheta')] \leqq n'_\nu. \tag{10}$$

Damit (9) richtig ist, braucht ja nur $l_\mu\,(1 + \vartheta') \leqq n'_\nu$ oder $n'_\nu\,(1 - \tau)\,(1 + \vartheta') \leqq n'_\nu$ oder $\vartheta' \leqq \tau\,(1 + \vartheta')$ zu sein. Damit (10) richtig ist, braucht nur $n_\nu\,(1 + \vartheta') \leqq [p\,(1 + \vartheta')]$ oder $n_\nu\,(1 + \vartheta') \leqq n_\nu\,(1 + \tau) - 1$ zu sein, was wegen (7) der Fall ist. $n^{(2)}$ sei so gewählt, daß s_{l_μ} in (a_1, b_2) liegt für $l_\mu > n^{(2)}$. Ich zeige, daß es zu einem $\bar{n} > \text{Max}\,(n^{(1)}, n^{(2)})$ stets ein $n > \bar{n}$ gibt, so daß $s_{n+1}, \ldots, s_{[n\,(1+\vartheta')]}$ in $\langle a_1, b_1 \rangle$ liegen und die Indizes $n + 1, \ldots, [n\,(1 + \vartheta')]$ in einem Intervall $\langle n_\nu, n'_\nu \rangle$ mit geeignetem ν liegen. (Analoges ließe sich für das Intervall $\langle a_2, b_2 \rangle$ machen.) Damit ist dann bewiesen, daß s_n die Voraussetzung von Hilfssatz 3 erfüllt. Zu dem $\bar{n}$ gibt es ein μ und ein ν, so daß

$n < n_\nu < l_\mu < n'_\nu$ ist und s_{l_μ} in $\left(\frac{a_1+\eta}{2}, \frac{b_1+\eta}{2}\right)$ liegt. Es sei für das jetzt feste ν etwa $na_n > -M$, $n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu$. Dann nehme ich für das gewünschte n das oben definierte p. (Wäre die andersseitige Bedingung erfüllt, so käme ich mit der Wahl $n = l_\mu$ zum Ziele.) Für $r = 1, \ldots, [p(1+\vartheta')] - p$ hat man

$$\begin{aligned} s_{p+r} - s_{[p(1+\vartheta')]} &= -(a_{p+r+1} + a_{p+r+2} + \ldots + a_{[p(1+\vartheta')]}) \\ &< \frac{M}{p+r+1} + \ldots + \frac{M}{[p(1+\vartheta')]} < \frac{M}{p}([p(1+\vartheta')] - p) \\ &< M\vartheta' < \frac{b_1 - a_1}{8}. \end{aligned}$$

Ist $[p(1+\vartheta')] = l_\mu$, so liest man daraus das Gewünschte ab. Ist $[p(1+\vartheta')] = l_\mu - 1$, so kommt man mit (8) durch die folgende Abschätzung zum Ziele:

$$s_{p+r} - s_{l_\mu} < s_{l_\mu - 1} - s_{l_\mu} + \frac{b_1 - a_1}{8} < \frac{b_1 - a_1}{4}.$$

In ähnlich einfacher Weise erkennt man auch dann, wenn s_{l_μ} wenigstens einen unendlichen Häufungspunkt besitzt, daß s_n die Voraussetzung von Hilfssatz 3 erfüllt. Die Anwendung der Hilfssätze 3 und 4 vollendet den Beweis.

Aus den Sätzen 2 und 3 läßt sich die folgende Verschärfung des Satzes 2 ableiten, die die zweiseitige Konvergenzbedingung nur „an den Enden" des Intervalls (n_ν, n'_ν), „ im Innern" jedoch lediglich die einseitige Bedingung voraussetzt:

Satz 2a. *Voraussetzung. Für die Indexfolgen* $n_\nu, n_\nu^{(1)}, n_\nu^{(2)}, n'_\nu$ *sei*

$$n_\nu < n_\nu^{(1)} < n_\nu^{(2)} < n'_\nu < n_{\nu+1},$$

$$n_\nu^{(1)} - n_\nu > \vartheta n_\nu, \quad n'_\nu - n_\nu^{(2)} > \vartheta n_\nu^{(2)}, \qquad \vartheta > 0.$$

Für die reelle Folge s_n *sei für jedes* $\nu = 0, 1, \ldots$ *mit einem* $M > 0$

$$n|a_n| < M \quad \text{für} \quad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n_\nu^{(1)} \quad \text{und} \quad n_\nu^{(2)} + 1 \leqq n \leqq n'_\nu$$

und entweder

$$na_n < M \text{ für } n_\nu^{(1)} + 1 \leqq n \leqq n_\nu^{(2)}$$

oder

$$na_n > -M \quad \text{für} \quad n_\nu^{(1)} + 1 \leqq n \leqq n_\nu^{(2)}.$$

Behauptung. Aus $h_{k_\nu}^{(k)} \to s$ *(k positiv ganz) folgt* $s_{k_\nu} \to s$, *wobei* $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ *ist.*

Beweis. Für $0 < \tau < \frac{\vartheta}{1+\vartheta}$ ist

$$n_\nu < n_\nu(1+\tau) \leqq n_\nu^{(1)} < n_\nu^{(2)} \leqq n'_\nu(1-\tau) < n'_\nu,$$

also konvergiert nach Satz 3 die Teilfolge von s_n gegen s, bei der s_n die Intervalle $\langle n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\rangle$, $\langle n_1^{(1)}, n_1^{(2)}\rangle$, ... durchläuft. Nach Satz 2 konvergiert ferner

die Teilfolge von s_n gegen s, bei der s_n die Intervalle $\langle n_0, n_0^{(1)}\rangle$, $\langle n_0^{(2)}, n_0'\rangle$, $\langle n_1, n_1^{(1)}\rangle$, $\langle n_1^{(2)}, n_1'\rangle$, ... durchläuft. Insgesamt ist also $\lim_{\nu \to \infty} s_{k_\nu} = s$.

Als letzter Satz in dieser Reihe werde der folgende formuliert:

Satz 4. *Voraussetzung. Es gelte die Voraussetzung zu Satz 2. Ferner sei für die reelle Folge s_n für jedes ν, für das $n_\nu' < n_{\nu+1} - 1$ ist, entweder*

$$n a_n < M, \qquad n_\nu' + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1}$$

oder

$$n a_n > -M, \qquad n_\nu' + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1}.$$

Behauptung. Aus $H_k\text{-}\lim_{n \to \infty} s_n = s$ (k positiv ganz) folgt $\lim_{n \to \infty} s_n = s$.

Man ziehe Satz 2 zum Vergleich heran. Außer der zweiseitigen Konvergenzbedingung in den Intervallen (n_ν, n_ν') wird in den übrigbleibenden Intervallen jetzt noch die einseitige Bedingung gefordert. Ferner wird die ganze H_k-Transformation als konvergent vorausgesetzt. Dafür folgt aber auch die Konvergenz der ganzen Folge s_n [17]). Der Beweis ergibt sich wieder, indem man aus den Sätzen 2 und 3 auf die Konvergenz geeigneter Teilfolgen von s_n schließt.

§ 4.

Über die Umkehrung des H_∞-Verfahrens.

Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf reelle Folgen s_n.

Das H_∞-Verfahren ist folgendermaßen definiert. Es sei wieder $h_n^{(k)}$ die Folge der k-ten Hölderschen Mittel von s_n und

$$h^{(k)} = \underline{\lim_{n \to \infty}}\, h_n^{(k)}, \quad H^{(k)} = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, h_n^{(k)}.$$

Sind $h^{(k)}$ und $H^{(k)}$ für $k > k_0$ endlich und ist überdies

$$\lim_{n \to \infty} h^{(k)} = \lim_{n \to \infty} H^{(k)} = s,$$

so setzt man $H_\infty\text{-}\lim s_n = s$ [18]). Über die Umkehrung des so definierten H_∞-Verfahrens gilt der

---

[17]) Satz 4 deckt den „wahren" Grund für die Gültigkeit der verschärften Fassung des $O\text{-}H_k \to K$-Satzes (siehe Einleitung) auf. Dort konnte erst verwundern, daß über die Glieder a_{n_ν} keine Voraussetzung gemacht wird. Im Licht von Satz 4 kann man das so auffassen, daß für diese Glieder als die einzigen in den Restintervallen zu den Hauptintervallen (n_ν, n_ν') von selbst jeweils die einseitige Konvergenzbedingung erfüllt ist.

[18]) Über das H_∞-Verfahren sind neuerdings einige überraschende Tatsachen gefunden worden. Es verhält sich nämlich nicht so, wie man es vom H_k-Verfahren her zunächst erwarten sollte: es gilt nicht der $H_\infty \to C_\infty$-Satz und nicht der $H_\infty \to A$-Satz [V. Garten und K. Knopp, Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen, Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 365—388], ferner nicht der $O\text{-}H_\infty \to K$-Satz (siehe unten).

Satz 5. *Ist die Voraussetzung von Satz 2 erfüllt, ist* $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ *und ist* $h^{(k)}_{k_\nu}$ *für irgendein positives ganzes* k *beschränkt, so ist* s_{k_ν} *beschränkt. Insbesondere folgt also aus* $H_\infty\text{-}\lim s_n = s$ *und* $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *daß* $s_n = O(1)$.

Beweis. Es sei $h^{(\bar{k})}_{k_\nu}$ beschränkt. Wäre s_{k_ν} nicht beschränkt, so würde s_n wegen der Konvergenzbedingung eine der beiden zu Beginn von § 2 definierten Eigenschaften I und II besitzen [19]), also auf Grund des ersten Teiles der dortigen Behauptung auch $h^{(1)}_n$, also auch $h^{(2)}_n$, . . ., also auch $h^{(\bar{k})}_n$. Insbesondere ließe sich, wie der Beweis der herangezogenen Behauptung zeigt, eine Teilfolge η_ν von k_ν angeben, so daß $h^{(\bar{k})}_{\eta_\nu}$ nicht beschränkt ist. Dieser Widerspruch vollendet den Beweis.

Daß man aus $H_\infty\text{-}\lim s_n = s$ und $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ nicht auf $\lim s_n = s$ schließen kann, d. h. also daß der zunächst zu erwartende $O\text{-}H_\infty \to K$-Satz falsch ist, zeigt die von Karamata [20]) angegebene H_∞-limitierbare Folge $s_n = \Re(n) = \cos \log n$. Jedoch gilt der $o\text{-}H_\infty \to K$-Satz, wie aus dem folgenden Satz hervorgeht.

Satz 6. *Voraussetzung.* n_ν *sei eine monoton gegen* ∞ *strebende Indexfolge,* $\varphi(\nu) > 1$ *eine für* $\nu = 0, 1, \ldots$ *definierte und gegen* ∞ *strebende Funktion und es sei* $[n_\nu\, \varphi(\nu)] < n_{\nu+1}$. *Ferner sei, wenn* $k_\nu = k_\nu(n_\nu, [n_\nu\, \varphi(\nu)])$ *gesetzt wird,*

$$k_\nu\, a_{k_\nu} = o(1), \qquad \nu \to \infty .$$

Behauptung. *Aus* $H_\infty\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *folgt* $\lim_{\nu\to\infty} s_{k_\nu} = s$.

Zum Beweis benötigen wir den

Hilfssatz 5. Voraussetzung. m_ν sei eine monoton gegen ∞ strebende Indexfolge, $\psi(\nu) > 1$ eine für $\nu = 0, 1, \ldots$ definierte und gegen ∞ strebende Funktion und es sei $[m_\nu\, \psi(\nu)] < m_{\nu+1}$. Ferner sei $\lim_{\nu\to\infty} s_{\bar{k}_\nu} = \eta$, wobei $\bar{k}_\nu = \bar{k}_\nu(m_\nu, [m_\nu\, \psi(\nu)])$ ist.

Behauptung. Entweder gibt es ein m'_ν und $\psi'(\nu)$, die dieselben Nebenbedingungen wie eben m_ν und $\psi(\nu)$ erfüllen, so daß $\sigma_{k'_\nu} \to \eta$ strebt, wobei $\sigma_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}$ und $k'_\nu = k'_\nu(m'_\nu, [m'_\nu\, \psi'(\nu)])$ ist. Oder es besitzt σ_n eine der beiden Eigenschaften I und II.

Beweis. Es genügt, den Fall $\eta = 0$ zu behandeln. Ich bestimme ein $\bar{a} > 0$ und ein $\bar{b} > 0$, so daß $a \sqrt[3]{b^2} \leqq ab - 1$ ist für $a > \bar{a}$, $b > \bar{b}$.

α. Entweder kann ich m'_ν und $\psi'(\nu)$ in der gewünschten Weise durch die folgende Folge von Schritten definieren:

---

[19]) Davon wurde schon beim Beweis des Satzes 2 Gebrauch gemacht [siehe [16]].

[20]) J. Karamata, Divergente Reihen und Summierungsverfahren, Tübinger Vorlesung W. S. 1937/38.

0. Schritt. Ich wähle ein ν_0, so daß $m_\nu > \bar{a}$ und $\psi(\nu) > \bar{b}$ für $\nu \geqq \nu_0$ und daß

$$|s_{\bar{k}_\nu}| < \frac{1}{2 \cdot 2^0} \quad \text{für } \bar{k}_\nu \geqq m_{\nu_0}, \tag{1}$$

$$|\sigma_{[m_{\nu_0} \sqrt[3]{\psi(\nu_0)}]}| < \frac{1}{2^0} \tag{2}$$

ist. Abgesehen von (2) erfülle ich diese Forderungen, indem ich ν_0 groß genug wähle. Daß ich auch (2) erfüllen kann, will ich annehmen. Ich setze $m_0' = \left[m_{\nu_0} \sqrt[3]{\psi(\nu_0)}\right]$, $\psi'(0) = \sqrt[3]{\psi(\nu_0)}$. Dann ist $[m_0' \psi'(0)] \leqq [m_{\nu_0} \psi(\nu_0)]$ (denn dazu braucht ja nur $m_{\nu_0} \sqrt[3]{\psi(\nu_0)^2} \leqq m_{\nu_0} \psi(\nu_0) - 1$ zu sein), also liegen alle σ_n mit den Indizes $m_0', \ldots, [m_0' \psi'(0)]$ im Intervall $\left(-\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^0}\right)$.

l. Schritt ($l = 1, 2, \ldots$). Ich wähle $\nu_l > \nu_{l-1}$, so daß $m_{\nu_l} > m_{l-1}' \psi'(l-1$ und daß

$$|s_{\bar{k}_\nu}| < \frac{1}{2 \cdot 2^l} \quad \text{für } \bar{k}_\nu \geqq m_{\nu_l}, \tag{3}$$

$$|\sigma_{[m_{\nu_l} \sqrt[3]{\psi(\nu_l)}]}| < \frac{1}{2^l} \tag{4}$$

ist. Daß dies möglich ist, will ich wieder annehmen. Ich setze

$$m_l' = [m_{\nu_l} \sqrt[3]{\psi(\nu_l)}], \quad \psi'(l) = \sqrt[3]{\psi(\nu_l)}.$$

Dann ist $[m_l' \psi'(l)] \leqq [m_{\nu_l} \psi(\nu_l)]$, also liegen alle σ_n mit den Indizes $m_l', \ldots, [m_l' \psi'(l)]$ im Intervall $\left(-\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l}\right)$.

β. Oder aber gibt es in dieser Folge von Schritten einen frühesten, es sei der l. Schritt ($l = 0, 1, \ldots$), den ich nicht ausführen kann. Dann gibt es eine Nummer $\bar{\nu}$, so daß

$$|s_{\bar{k}_\nu}| < \frac{1}{2 \cdot 2^l}, \qquad \bar{k}_\nu \geqq m_{\bar{\nu}}, \tag{5}$$

$$|\sigma_{[m_\nu \sqrt[3]{\psi(\nu)}]}| \geqq \frac{1}{2^l}, \qquad \nu \geqq \bar{\nu} \tag{6}$$

ist. Setze ich vorübergehend $\varrho = \sqrt[3]{\psi(\nu)}$, so ist für $\nu \geqq \bar{\nu}$

$$\sigma_{m_\nu} = \frac{([m_\nu \varrho] + 1)\, \sigma_{[m_\nu \varrho]} - (s_{m_\nu + 1} + \ldots + s_{[m_\nu \varrho]})}{m_\nu + 1},$$

$$|\sigma_{m_\nu}| > \frac{[m_\nu \varrho] + 1}{m_\nu + 1} |\sigma_{[m_\nu \varrho]}| - \frac{[m_\nu \varrho] - m_\nu}{2\,(m_\nu + 1)\, 2^l}$$

$$> \frac{m_\nu \varrho}{(m_\nu + 1)\, 2^l} - \frac{m_\nu \varrho}{2\,(m_\nu + 1)\, 2^l} = \frac{m_\nu \varrho}{(m_\nu + 1)\, 2^{l+1}}.$$

Wegen $\varrho \to \infty$ für $\nu \to \infty$ kann ich daher die Indexfolge $\nu(p)$ $(p = 1, 2, \ldots,$ $\leqq \nu(p) < \nu(p+1) \to \infty)$ so wählen, daß $\sigma_{m_{\nu(p)}} > 3p$ für alle p oder daß $\sigma_{m_{\nu(p)}} < -3p$ für alle p ist. Es liege etwa der erste Fall vor. Dann findet man bei Berücksichtigung von (5), daß für genügend große p

$$\sigma_{m_{\nu(p)+1}},\quad \sigma_{m_{\nu(p)+2}}, \ldots, \sigma_{2m_{\nu(p)}} > p$$

sind. σ_n hat also die Eigenschaft I. Liegt der zweite Fall vor, so hat σ_n die Eigenschaft II. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes 6. Zunächst ergibt Satz 5, daß s_{k_ν} beschränkt ist. Weiter kann nach dem ersten Teil der zu Beginn von § 2 aufgestellten Behauptung $h_n^{(k)}$ für kein k die Eigenschaft I oder II besitzen, da sonst H_∞-lim s_n nicht existieren könnte. Ist also η ein Häufungspunkt von s_{k_ν} und ist mit diesem η und geeigneter Folge m_ν und Funktion $\psi(\nu)$ die Voraussetzung des Hilfssatzes 5 erfüllt, so ergibt dieser wegen H_∞-lim $s_n = s$, daß $\eta = s$ ist. Ich brauche also nur noch zu zeigen, daß für einen Häufungspunkt η von s_{k_ν} die Voraussetzung des Hilfssatzes erfüllt ist. Ich konstruiere das erforderliche m_ν und $\psi(\nu)$ in einer Folge von Schritten:

l. Schritt $(l = 2, 3, \ldots)$. Die bisherigen Schritte haben $m_2, \ldots, m_{l-1}$, $\psi(2), \ldots, \psi(l-1)$ geliefert. Ich wähle nun ein m und ein $\bar{\nu}$, so daß die Beziehungen

$$\text{Min}\,(2l, [m_{l-1}\,\psi(l-1)]) < n_{\bar{\nu}}^- \leqq m \leqq [n_{\bar{\nu}}^-\,\varphi(\bar{\nu})], \tag{7}$$

$$\sqrt{\varphi(\bar{\nu})} > l, \tag{8}$$

$$|k_\nu a_{k_\nu}| < \frac{1}{4l \cdot 2^l}, \qquad k_\nu \geqq n_{\bar{\nu}}^-, \tag{9}$$

$$\eta - \frac{1}{2 \cdot 2^l} < s_m < \eta + \frac{1}{2 \cdot 2^l} \tag{10}$$

gelten. Im Falle $l = 2$ setze ich an die Stelle von (7) nur: $2l < n_{\bar{\nu}}^- \leqq m \leqq [n_{\bar{\nu}}^-\,\varphi(\bar{\nu})]$.

α. Es sei $n_{\bar{\nu}}^- \leqq m \leqq n_{\bar{\nu}}^- \sqrt{\varphi(\bar{\nu})}$. Dann ist wegen (8) $lm < n_{\bar{\nu}}^-\,\varphi(\bar{\nu})$, also $m \leqq [n_{\bar{\nu}}^-\,\varphi(\bar{\nu})]$. Wegen (9) ist für $r = m+1, \ldots, ml$

$$\begin{aligned} |s_r - s_m| &\leqq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_{lm}| \\ &< \frac{(l-1)m}{m \cdot 4l \cdot 2^l} < \frac{1}{2 \cdot 2^l}. \end{aligned}$$

Also liegen wegen (10) $s_m, s_{m+1}, \ldots, s_{lm}$ in $\left(\eta - \frac{1}{2^l}, \eta + \frac{1}{2^l}\right)$. Ich nehme daher $m_l = m$, $\psi(l) = l$.

β. Es sei $n_{\bar{\nu}}\sqrt[\bar{\nu}]{\varphi(\bar{\nu})} < m \leqq [n_{\bar{\nu}}\,\varphi(\bar{\nu})]$. Dann ist wegen (8) $n_{\bar{\nu}} < \frac{m}{l}$, also $n_{\bar{\nu}} \leqq \left[\frac{m}{l}\right]$. Ich nehme diesmal $m_l = \left[\frac{m}{l}\right]$, $\psi(l) = \frac{m}{m_l}$. Wegen (7) ist $l < \frac{m}{2}$, also $m_l \neq 0$ und

$$l \leqq \psi(l) < \frac{m}{\frac{m}{l} - 1} < 2l.$$

Wegen (9) ist für $r = m_l, \ldots, m_l\,\psi(l) - 1$

$$|s_r - s_m| \leqq |a_{m_l+1}| + |a_{m_l+2}| + \ldots + |a_m|$$
$$< \frac{m - m_l}{m_l \cdot 4l \cdot 2^l} < \frac{\psi(l) - 1}{4l \cdot 2^l} < \frac{1}{2 \cdot 2^l}.$$

Also liegen wegen (10) $s_{m_l}, s_{m_l+1}, \ldots, s_{m_l\psi(l)}$ in $\left(\eta - \frac{1}{2^l}, \eta + \frac{1}{2^l}\right)$. Damit ist Satz 6 bewiesen.

(Eingegangen am 16. Februar 1939.)

Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. II.

Von

Werner Meyer-König in Stuttgart.

Inhalt.

Seite

Einleitung 479
1. Umkehrsätze des E-Verfahrens mit Lückenintervall ϑn 480
2. Funktionentheoretische Anwendungen 485
3. Umkehrsätze des E-Verfahrens mit Lückenintervall $\vartheta\sqrt{n}$ 487

Einleitung.

Die vorstehende Note bildet die Fortsetzung einer in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit des Verfassers [1]), die den Beweis von Lückenumkehrsätzen der Cesàroschen und Hölderschen Limitierungsverfahren zum Ziele hatte. Für Weiteres und wegen der Begriffe Konvergenzintervall und Lückensatz erster und zweiter Art sei auf die Einleitung der erwähnten Arbeit selbst verwiesen.

In dieser Note sollen Lückensätze des E-Verfahrens bewiesen werden, wobei unter E-Verfahren das durch

$$E\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} s_\nu$$

definierte Limitierungsverfahren von Euler-Knopp der Ordnung 1 [2]) verstanden ist. Das zugehörige Konvergenzintervall hat die Länge $\vartheta\sqrt{n}$ entsprechend der Gültigkeit des O-$E \to K$-Satzes mit der Konvergenzbedingung $s_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ob jedoch die Lückensätze mit diesem Intervall ohne Zusatzvoraussetzungen richtig sind, konnte hier nicht entschieden werden. Das Hindernis, das sich dem Beweis der positiven Aussage entgegenstellt, besteht darin, daß es nicht gelingt, für s_n die Beschränktheit oder auch nur eine schwächere Wachstumseinschränkung nachzuweisen, welche die für die E-Limitierbarkeit einer Folge notwendige Bedingung $s_n = o(3^n)$ verschärft. Das schärfste Resultat in der genannten Richtung ist, daß der Lückensatz

[1]) Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen I, Math. Zeitschr. 45 (1939) 447—478, im folgenden mit L. I zitiert.

[2]) K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren I und II, Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 226—253 und 18 (1923), S. 125—156. Diese beiden Mitteilungen sind im folgenden als Knopp, E-Verfahren I und II zitiert.

erster Art unter der Nebenbedingung $s_n = O(n^k)$ gilt, wobei die Glieder a_n in den Lücken nicht wirklich zu verschwinden, sondern nur $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ zu sein brauchen (§ 3)[3]. Wird s_n als beschränkt vorausgesetzt, so läßt sich der Lückensatz zweiter Art ohne Schwierigkeit gewinnen, wenn man sich der von Knopp zum Beweis des O-$E \to K$-Satzes benutzten Hilfsmittel bedient (§ 3).

Solange nun aber nicht feststeht, ob wirklich $\vartheta \sqrt{n}$ das maßgebliche Lückenintervall ist, ist es berechtigt zu untersuchen, wie die Verhältnisse bei Lücken anderer Größenordnung liegen. So hat Y. Okada einen Lückensatz zweiter Art mit Intervall ϑn bewiesen. In § 1 sollen einige verwandte Sätze, bei denen in den Lücken nichtverschwindende Glieder a_n der Größenordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ zugelassen sind, hergeleitet werden. Dieselben gestatten eine unmittelbare Anwendung auf Potenzreihen (§ 2).

§ 1.

Umkehrsätze des E-Verfahrens mit Lückenintervall ϑn.

Wir gebrauchen im folgenden die Abkürzung

$$E_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} s_\nu .$$

Ferner sei, wenn n_ν und n'_ν ($n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \ldots$) zwei Indexfolgen sind, unter $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ die mit $k_0 = n_0$, $k_1 = n_0 + 1, \ldots,$ $k_{n'_0 - n_0} = n'_0$, $k_{n'_0 - n_0 + 1} = n_1, \ldots$ beginnende Indexfolge verstanden, deren Glieder in der natürlichen Ordnung die Intervalle $\langle n_0, n'_0\rangle$, $\langle n_1, n'_1\rangle, \ldots$ durchlaufen.

Der genannte Satz von Okada[4] lautet:

---

[3]) Im Rahmen einer ausgedehnten Theorie, die mit wesentlich tieferen Hilfsmitteln als den hier benutzten arbeitet, hat H. R. Pitt [General Tauberian Theorems, Proc. London Math. Soc. (2) 44 (1938), S. 243—287, Theorem 17] einen Lückensatz des Borelschen Verfahrens bewiesen, aus dem sich wegen des $E \to B$-Satzes ergibt, daß der Lückensatz erster Art des E-Verfahrens (mit in den Lücken verschwindenden Gliedern a_n) mit Intervall $\vartheta \sqrt{n}$ richtig ist, sofern für jedes positive ε die Bedingung $s_n = O(n^{1+\varepsilon})$ erfüllt ist.

[4]) Y. Okada, Bull. Am. Math. Soc. 43 (1937), S. 536—540. Eine hinreichende Beziehung zwischen A und ϑ wird von O. angegeben. Ersetzt man die Voraussetzung $E\text{-}\lim s_n = s$ durch $B\text{-}\lim s_n = s$, so bleibt der Satz richtig [A. Zygmund, On a theorem of Ostrowski, Journal London Math. Soc. 6 (1931), S. 162—163]. Sowohl der Okadasche als auch der Zygmundsche Satz liefert zusammen mit den Sätzen über die E- bzw. B-Summierbarkeit einer Potenzreihe in der Umgebung regulärer Randpunkte des Konvergenzkreises den Ostrowskischen Überkonvergenzsatz.

Aus

$$n'_\nu - n_\nu > \vartheta n_\nu \quad \textit{für ein} \quad \vartheta > 0, \quad \nu = 0,1, \ldots,$$
$$a_n = 0, \qquad n = n_\nu + 1, \ldots, n'_\nu,$$
$$s_n = O(\alpha^n) \qquad \textit{für ein } \alpha \textit{ mit}$$
$$1 < \alpha < A = A(\vartheta),$$
$$E\text{-}\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

lgt

$$\lim_{\nu \to \infty} s_{n_\nu} = s.$$

Der Beweis ist insofern elementar, als die Abschätzung direkt an der '-Transformation vorgenommen und nicht zu Transformationen mit anderer symptotischer Gewichtsverteilung übergegangen wird, was nur durch tiefer-egende Methoden möglich ist. Auf prinzipiell dieselbe Weise werden die Sätze ieses Paragraphen bewiesen. Wir verlegen die wesentliche Abschätzung in den eweis eines Hilfssatzes.

Hilfssatz. Es seien gegeben die Indexfolge m_ν ($\to \infty$), die Konstanten t, c, α ($0 < t < 1$, $c > 0$, $\alpha > 1$) und die reelle Folge s_n, so daß

1) $$s_{m_\nu - [tm_\nu]}, \; s_{m_\nu - [tm_\nu]+1}, \; \ldots, \; s_{m_\nu + [tm_\nu]} \geqq c$$

ind. Ferner sei $s_n = O(\alpha^n)$ und

2) $$\alpha^2 < (1+t)^{1+t}(1-t)^{1-t}$$ [5]).

Dann ist $\varliminf_{\nu \to \infty} E_{2m_\nu} \geqq c$.

Beweis. Mit

$$|s_n| < L\alpha^n, \quad L > 0$$

nd

$$P_n = \sum_{\mu=0}^{n-[tn]-1} \binom{2n}{\mu}, \qquad Q_n = \sum_{\mu=n-[tn]}^{n+[tn]} \binom{2n}{\mu}$$

rhält man

$$E_{2m_\nu} = \frac{1}{2^{2m_\nu}} \sum_{\mu=0}^{2m_\nu} \binom{2m_\nu}{\mu} s_\mu > \frac{1}{2^{2m_\nu}} (-2L\alpha^{2m_\nu} P_{m_\nu} + cQ_{m_\nu}).$$

Vegen

$$\frac{P_n}{2^{2n}} < \frac{n-[tn]}{2^{2n}} \binom{2n}{n-[tn]} = W_n$$

rhält man

$$E_{2m_\nu} > -2L\alpha^{2m_\nu} W_{m_\nu} + c(1 - 2W_{m_\nu}).$$

---

[5]) Man beachte, daß

$$(1+t)^{1+t}(1-t)^{1-t} > 1, \qquad 0 < t < 1,$$

t.

Die Behauptung ist bewiesen, wenn gezeigt ist, daß $\alpha^{2n} W_n \to 0$ strebt für $n \to \infty$. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel ergibt sich

$$W_n = \frac{(n-[tn])\,(2n)!}{2^{2n}\,(n-[tn])!\,(n+[tn])!} \cong V_n,$$

$$V_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left(\frac{n-[tn]}{n+[tn]}\right)^{[tn]} \frac{1}{\left(\frac{n^2-[tn]^2}{n^2}\right)^n}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{tn} \frac{1}{\left(1-\frac{[tn]^2}{n^2}\right)^n} \frac{\left(1-\frac{[tn]}{n}\right)^{[tn]}}{(1-t)^{tn}} \frac{(1+t)^{tn}}{\left(1+\frac{[tn]}{n}\right)^{[tn]}}$$

$$\leqq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{tn} \frac{1}{(1-t^2)^n} \cdot Q_1 \cdot Q_2,$$

$$Q_1 = \frac{\left(1-\frac{tn-1}{n}\right)^{tn-1}}{(1-t)^{tn}} \to e^{\frac{t}{1-t}} \frac{1}{1-t},$$

$$Q_2 = \frac{(1+t)^{tn}}{\left(1+\frac{tn-1}{n}\right)^{tn-1}} \to e^{\frac{t}{1+t}} (1+t).$$

Es gibt also eine Nummer $\bar{n}$, so daß

$$V_n \leqq D(t) \sqrt{n} \left(\frac{1}{(1+t)^{1+t}\,(1-t)^{1-t}}\right)^n, \qquad n > \bar{n},$$

ist, wobei $D(t)$ nicht von n abhängt. Wegen (2) folgt daraus $\alpha^{2n} V_n \to 0$, also $\alpha^{2n} W_n \to 0$.

Gemeinsame Voraussetzung der folgenden Sätze 1 bis 3 sei: n_ν und n'_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ seien zwei Indexfolgen, für die für ein $\vartheta > 0$

(3) $$n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1},$$

(4) $$n'_\nu - n_\nu > \vartheta n_\nu$$

ist.

Satz 1. *Voraussetzung. Es sei für die Folge s_n mit einem $M > 0$*

(5) $$n\,|a_n| < M, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu$$

(6) $$s_n = O\left((1+\varepsilon)^n\right) \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Behauptung. Aus $E_{2k_\nu} \to s$ folgt $s_{k_\nu} \to s$, wobei $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ ist.

Beweis. Es genügt, den Beweis für eine reelle Folge s_n und für $s = 0$ zu führen. Wir gehen indirekt vor und nehmen etwa an, daß $s_{k_\nu} > 2c$ für unendlich viele ν ist $(c > 0)$. Dann kann ich [6]) die Folge $\bar{m}_\nu$ und ein $\bar{t} > 0$ finden, so daß für alle ν

(7) $$s_{\bar{m}_\nu+1}, \ldots, s_{[\bar{m}_\nu(1+\bar{t})]} > c$$

[6]) Nach einer in L. I oft gebrauchten Schlußweise (siehe z. B. den Beweis des dortigen Satzes 2, S. 470).

ind und daß die in (7) auftretenden Indizes der Folge k_ν angehören. Setze ch nun $m_\nu = \left[\overline{m}_\nu\left(1+\frac{\bar{t}}{2}\right)\right]$ und $t = \text{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{\bar{t}}{4}\right)$, dann ist (1) für genügend großes ν erfüllt und m_ν ist Teilfolge von k_ν. Ich wähle ein $\alpha > 1$, so daß (2) erfüllt ist. Wegen (6) ist dann $s_n = O(\alpha^n)$. Nach dem Hilfssatz ist $\varlimsup_{\nu\to\infty} E_{2m_\nu} \geqq c$, also, weil m_ν Teilfolge von k_ν ist, $\varlimsup_{\nu\to\infty} E_{2k_\nu} \geqq c$. Nun ist aber nach Voraussetzung $\lim_{\nu\to\infty} E_{2k_\nu} = 0$. Dieser Widerspruch vollendet den Beweis.

Satz 2. *Voraussetzung. Es sei für die reelle Folge s_n mit einem $M > 0$*

8) $$\begin{cases} \textit{entweder} & n a_n < M, & n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu, \\ \textit{oder} & n a_n > -M, & n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu, \end{cases}$$

für jedes $\nu = 0, 1, \ldots$

und außerdem (6) erfüllt.

Behauptung. Aus $E_{2k_\nu} \to s$ folgt $s_{l_\mu} \to s$, wobei $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ und l_μ ($\mu = 0, 1, \ldots$) eine (monoton wachsende) Indexfolge von der folgenden Eigenschaft ist: es gibt ein τ ($0 < \tau < 1$), so daß für jedes μ die Beziehung $n_\nu(1+\tau) < l_\mu < n'_\nu(1-\tau)$ für ein gewisses ν richtig ist.

Beweis. Man nimmt $s = 0$ und geht wieder indirekt vor. Wäre unendlich oft $s_{l_\mu} > 2c$, so würde dieselbe Schlußweise, die beim Beweis des Satzes 3 in L. I (S. 472) angewandt wurde und nachher bei Satz 4 wieder auftritt, zusammen mit dem Hilfssatz einen Widerspruch ergeben.

Satz 3. *Voraussetzung. Es gelte die Voraussetzung zu Satz 1 und es sei s_n reell. Für jedes ν, für das $n'_\nu < n_{\nu+1} - 1$ ist, sei*

$$\begin{cases} \textit{entweder} & n a_n < M, & n'_\nu + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1}, \\ \textit{oder} & n a_n > -M, & n'_\nu + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1}. \end{cases}$$

Behauptung. Aus $E\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ folgt $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Beweis. Man wendet die Sätze 1 und 2 auf geeignete Teilfolgen von s_n an.

Die Sätze 1 bis 3 entsprechen den Sätzen 2 bis 4 in L. I. Auch die dem Satz L. I, 2a entsprechende Verschärfung des Satzes 1 gilt. Wir verzichten auf ihre Formulierung und beweisen noch den

Satz 4. *Voraussetzung. Für die reelle Folge s_n sei für $\nu = 0, 1, \ldots$*

9) $$\begin{cases} \textit{entweder} & a_n \leqq 0, & n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu, \\ \textit{oder} & a_n \geqq 0, & n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu. \end{cases}$$

Es seien l_μ ($\mu = 0, 1, \ldots$) eine (monoton wachsende) Indexfolge und τ und α Konstanten ($0 < \tau < 1$, $\alpha > 1$), so daß für jedes μ die Beziehung $n_\nu(1+\tau) < l_\mu < n_\nu(1-\tau)$ für ein gewisses ν richtig ist, daß $s_n = O(\alpha^n)$ und daß

10) $$\alpha^2 < (1+\tau')^{1+\tau'}(1-\tau')^{1-\tau'}, \qquad \tau = \frac{\tau}{2+\tau}$$

ist.

Behauptung. *Aus* $E_{2k_\nu} \to s$ *folgt* $s_{l_\mu} \to s$, *wobei* $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n_\nu')$ *ist.*

Man ziehe Satz 2 zum Vergleich heran. Statt (8) wird diesmal die schärfere Bedingung (9) gestellt, dafür wird die Beziehung (6) abgeschwächt zu $s_n = O(\alpha^n)$, wobei α eine von τ abhängige Zahl oberhalb 1 ist.

Fordern wir speziell, daß in (9) das Gleichheitszeichen gilt und bestimmen wir τ so, daß $n_\nu(1+\tau)+1 < n_\nu'(1-\tau)$ ist, womit τ in einer gewissen Weise von ϑ abhängig gemacht wird, so folgt aus der Konvergenz einer geeigneten, zu τ gehörigen Folge s_{l_μ} (z. B. der Folge $s_{[n_\nu(1+\tau)]+1}$) gegen s, daß $s_{n_\nu} \to s$ strebt, falls $\alpha > 1$ gemäß (10) unterhalb einer von τ, also von ϑ abhängigen Schranke gelegen ist. Satz 4 enthält also den Okadaschen Satz in der oben angegebenen Form für reelle Folgen, also auch für komplexe Folgen.

Beweis des Satzes 4. Ich beschränke mich auf den Fall $s = 0$. Ich wähle ein τ_2, $0 < \tau_2 < \tau'$, so nahe bei τ', daß

$$\alpha^2 < (1+\tau_2)^{1+\tau_2}(1-\tau_2)^{1-\tau_2} \tag{11}$$

ist. Wegen $\tau_2 < \frac{\tau}{2+\tau}$ kann ich ein τ_1, $0 < \tau_1 < \tau$, so nahe bei τ wählen, daß

$$\tau_2 < \frac{\tau_1}{2+\tau_1} \tag{12}$$

ist. Es sei unendlich oft $s_{l_\mu} > c > 0$. Ich halte ein solches μ jetzt fest. Dann gibt es ein bestimmtes ν, so daß $n_\nu(1+\tau) < l_\mu < n_\nu'(1-\tau)$ ist. Ich will zeigen, daß es zu diesem ν eine Nummer m gibt, so daß $s_m, \ldots, s_{[m(1+\tau_1)]} > c$ sind. Ist $a_n \geqq 0$ für $n = n_\nu + 1, \ldots, n_\nu'$, so kann ich offenbar l_μ für m nehmen, sofern $[l_\mu(1+\tau_1)] \leqq n_\nu'$ ist. Damit dies gilt, braucht nur $n_\nu'(1-\tau)(1+\tau_1) \leqq n_\nu'$ zu sein, was wegen $\tau_1 < \tau$ sicher richtig ist. Ist $a_n \leqq 0$ für $n = n_\nu + 1, \ldots, n_\nu'$, so kann ich wegen $\tau_1 < 1$ die Nummer p so bestimmen, daß $[p(1+\tau_1)] = l_\mu$ oder $= l_\mu - 1$ ist. Dann ist $n_\nu \leqq p$. Dazu braucht ja nur $n_\nu(1+\tau_1) \leqq [p(1+\tau_1)]$ bzw. $n_\nu(1+\tau_1) \leqq n_\nu(1+\tau) - 1$ zu sein, was wegen $\tau_1 < \tau$ sicher richtig ist, wenn n_ν schon genügend groß ist. Offenbar kann ich für das gewünschte m nun p nehmen. Indem ich auf diese Weise zu unendlich vielen Nummern ν je ein m bestimme, komme ich zu einer Indexfolge $m_\nu'(\to \infty)$, so daß $s_{m_\nu'}, \ldots, s_{[m_\nu'(1+\tau_1)]} > c$ sind. Ich setze $m_\nu = \left[m_\nu'\left(1+\frac{\tau_1}{2}\right)\right]$. Dann ist

$$m_\nu - [\tau_2 m_\nu] \geqq m_\nu', \tag{13}$$

$$m_\nu + [\tau_2 m_\nu] \leqq [m_\nu'(1+\tau_1)]. \tag{14}$$

Damit (13) richtig ist, braucht nur

$$m_\nu'\left(1+\frac{\tau_1}{2}\right) - 1 - \tau_2 m_\nu'\left(1+\frac{\tau_1}{2}\right) \geqq m_\nu',$$

d. h.

$$m_\nu'\left(1+\frac{\tau_1}{2}\right)(1-\tau_2) - 1 \geqq m_\nu' \tag{15}$$

zu sein. Nun ist

$$\left(1+\frac{\tau_1}{2}\right)\left(1-\frac{\tau_1}{2+\tau_1}\right)=1,$$

also ist (15) wegen (12) sicher richtig, wenn nur m_ν' schon genügend groß ist. Ebenso findet man, daß (14) richtig ist. Also liegen für genügend großes ν alle s_n mit den Indizes $m_\nu-[\tau_2 m_\nu], \ldots, m_\nu+[\tau_2 m_\nu]$ rechts von c. Wegen (11) kann ich nun den Hilfssatz mit der angegebenen Folge m_ν und mit $t=\tau_2$ anwenden und erhalte $\lim\limits_{\nu\to\infty} E_{2\,m_\nu} \geqq c$. Da aber m_ν der Folge k_ν angehört, steht das im Widerspruch zur Voraussetzung.

§ 2.

Funktionentheoretische Anwendungen.

Die Sätze des vorigen Paragraphen gestatten unmittelbar, einige Aussagen über das Verhalten einer Potenzreihe am Rande der Konvergenzgrenze zu machen. Es sei $f(z)$ eine im Einheitskreis reguläre Funktion:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

Dann ist $a_n=O\left((1+\varepsilon)^n\right)$ für jedes $\varepsilon>0$, also für $|z|=1$

$$|s_n(z)|=\Big|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu\Big| \leqq \sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu| = O\left((1+\varepsilon)^n\right) \text{ für jedes } \varepsilon>0.$$

Für die Indexfolgen n_ν und n_ν' $(\nu=0,1,\ldots)$ soll wieder gelten:

$$n_\nu < n_\nu' < n_{\nu+1}, \qquad\qquad .$$
$$n_\nu' - n_\nu > \vartheta\, n_\nu, \qquad\qquad \vartheta>0.$$

Dann ergeben sich aus den Sätzen 1 bis 3 zusammen mit dem Satz von Knopp [7]), daß eine Potenzreihe in einer gewissen Umgebung eines regulären Punktes des Konvergenzkreises E-limitierbar ist, die folgenden Sätze 5 bis 7.

Satz 5. *Es sei mit einem* $M>0$

1) $$n|a_n|<M, \qquad n_\nu+1\leqq n\leqq n_\nu'.$$

Es sei $f(z)$ *in* z_0 $(|z_0|=1)$ *regulär und* $k_\nu=k_\nu(n_\nu, n_\nu')$. *Dann ist*

$$\lim_{\nu\to\infty} s_{k_\nu}(z_0)=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{n=0}^{k_\nu} a_n z_0^n = f(z_0).$$

Satz 6. *Es sei* a_n *reell und mit einem* $M>0$ *für jedes* $\nu=0,1,\ldots$

entweder $\quad n a_n < M, \qquad n_\nu+1\leqq n\leqq n_\nu',$

oder $\quad n a_n > -M, \qquad n_\nu+1\leqq n\leqq n_\nu'.$

---

[7]) Knopp, *E*-Verfahren I, S. 239, Satz 2 für $p=1$.

Ferner sei $f(z)$ in 1 regulär. Dann ist

$$\lim_{\mu \to \infty} s_{l_\mu}(1) = \lim_{\mu \to \infty} \sum_{n=0}^{l_\mu} a_n = f(1),$$

wobei l_μ von derselben Eigenschaft wie in Satz 2 sein soll.

Satz 7. *Es sei a_n reell und (1) erfüllt. Für jedes ν, für das $n_\nu' < n_{\nu+1} - 1$ ist, sei*

entweder	$n a_n < M,$	$n_\nu' + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1},$
oder	$n a_n > -M,$	$n_\nu' + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1}.$

Es sei $f(z)$ in 1 regulär. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(1).$$

Wir vergleichen Satz 5 mit dem Satz von Fatou. Dieser schließt aus $a_n \to 0$ auf $\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z_0^\nu = f(z_0)$ für einen regulären Randpunkt z_0. Satz 5 schließt auf die Konvergenz einer gewissen Teilfolge von $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z_0^\nu$, wenn a_n in den Intervallen (n_ν, n_ν') mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen 0 strebt. Auch den Ostrowskischen Überkonvergenzsatz können wir zum Vergleich heranziehen: Wird an Stelle von (1) sogar verlangt, daß $a_n = 0$ für $n_\nu + 1 \leqq n \leqq n_\nu'$ ist, so ist $\lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{n_\nu} a_n z^n = f(z)$ für alle z aus einer gewissen Umgebung von z_0.

Satz 4 enthält in seiner speziellen, von Okada angegebenen Form den Ostrowskischen Überkonvergenzsatz. In seiner allgemeinen Form liefert er den folgenden Überkonvergenzsatz:

Es sei a_n reell und für $\nu = 0, 1, \ldots$

entweder	$a_n \leqq 0,$	$n_\nu + 1 \leqq n \leqq n_\nu',$
oder	$a_n \geqq 0,$	$n_\nu + 1 \leqq n \leqq n_\nu'.$

Es sei $f(z)$ in 1 regulär und l_μ eine Folge von derselben Eigenschaft wie in Satz 2. Dann gibt es ein $\beta > 1$, so daß

$$s_{l_\mu}(z) = \sum_{n=0}^{l_\mu}{}' a_n z^n \to f(z)$$

strebt für jedes z aus $\langle 0, \beta \rangle$.

Man wähle zu dem zu l_μ gehörigen τ ein α und α', so daß

$$1 < \alpha^2 < \alpha'^2 < (1+\tau')^{1+\tau'} (1-\tau')^{1-\tau'}, \qquad \tau' = \frac{\tau}{2+\tau},$$

ist. Für $|z| \leqq \alpha$ ist dann $z^n = O(\alpha^n)$, $a_n z^n = O(\alpha'^n)$, $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = O(\alpha'^n)$. Die Anwendung des Satzes von Knopp und des Satzes 4 vollendet

len Beweis. Der damit gewonnene Satz enthält aber tatsächlich nichts Neues. Entweder gibt es nämlich eine Indexfolge m_ϱ ($\varrho = 0, 1, \ldots$) und ein $t > 0$, so daß für jedes ϱ $n_\nu (1 + t) < m_\varrho < n'_\nu (1 - t)$ für ein geeignetes ν und daß $\overline{\lim}\ \sqrt[m_\varrho]{|a_{m_\varrho}|} = 1$ ist. Dann ist nach einem Satz von Fabry [8]) $f(z)$ in 1 singulär, trifft also die Voraussetzung nicht zu. Oder aber ergibt sich die Behauptung durch Darstellung von $f(z)$ als Summe zweier Potenzreihen, deren eine einen Konvergenzradius größer als 1 hat und auf deren andere sich der Ostrowskische Satz anwenden läßt.

Wir ziehen aus dem formulierten Überkonvergenzsatz, also aus Satz 4, noch die folgende Bemerkung, die freilich nur einen speziellen Fall eines viel allgemeineren Satzes [8]) bildet:

Es sei

$$a_n = 0, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu,$$

und für jedes ν, für das $n'_\nu < n_{\nu+1} - 1$ ist

entweder $\qquad a_n \leqq 0, \qquad n'_\nu + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1}.$

oder $\qquad a_n \geqq 0, \qquad n'_\nu + 1 \leqq n \leqq n_{\nu+1}.$

Dann ist $f(z)$ in 1 singulär.

Wäre nämlich $f(z)$ in 1 regulär, so könnte ich zunächst auf Überkonvergenz von $\sum_{n=0}^{h_\nu} a_n x^n$ auf der reellen Achse bei 1 schließen, wobei h_ν die Intervalle $\langle n'_0 + 1, n_1\rangle$, $\langle n'_2 + 1, n_3\rangle$, ... durchläuft. Ebenso könnte ich auf Überkonvergenz von $\sum_{n=0}^{h'_\nu} a_n x^n$ schließen, wobei h'_ν die Intervalle $\langle n'_1 + 1, n_2\rangle$, $\langle n'_3 + 1, n_4\rangle$, ... durchläuft. Zusammen würde sich die Überkonvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ergeben.

§ 3.

Umkehrsätze des E-Verfahrens mit Luckenintervall $\vartheta \sqrt{n}$.

Okada [a. a. O. [4])] hat noch einen weiteren Lückensatz für das E-Verfahren bewiesen, nämlich den Lückensatz zweiter Art für Lückenintervalle der Größenordnung $\vartheta \sqrt{n \log n}$, wobei s_n als $O(n^k)$ vorausgesetzt wird und zwischen ϑ und k eine Beziehung bestehen muß. Wir wollen von s_n nun sogar Beschränktheit voraussetzen und einen Satz zweiter Art mit Lückenintervallen $\vartheta \sqrt{n}$ beweisen. Der Beweis beruht auf der wegen $s_n = O(1)$ möglichen Anwendung eines von Knopp zum Beweis des O-$E \to K$-Satzes aufgestellten tief-

[8]) Siehe z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Berlin 1929, § 19, Satz 1 (S. 81).

liegenden Satzes [9]), der von einer konvergenten E-Transformation zu andern konvergenten linearen Transformationen derselben Folge überzugehen erlaubt, bei denen die Gewichte in der Umgehung eines gewissen dem Zeilenindex proportionalen Spaltenindexes beliebig stark konzentriert werden können. Der zu beweisende Satz lautet:

Satz 8. *Voraussetzung. Für die Indexfolgen* n_ν, n'_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *sei mit einem* $\vartheta > 0$

$$n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1}, \tag{1}$$

$$n'_\nu - n_\nu > \vartheta \sqrt{n_\nu}. \tag{2}$$

Für die Folge s_n *sei mit einem* $M > 0$

$$\sqrt{n}\,|a_n| < M, \qquad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu, \tag{3}$$

$$s_n = O(1). \tag{4}$$

Behauptung. Aus $E_{2k_\nu} \to s$ *folgt* $s_{k_\nu} \to s$, *wobei* $k_\nu = k_\nu(n_\nu, n'_\nu)$ *ist.*

Sieht man als bekannt an, daß $s_n = O(1)$ aus $E\text{-}\lim s_n = s$ und $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ folgt [10]), so ist in Satz 8 der $O\text{-}E \to K$-Satz enthalten.

Beweis. Es genügt, den Beweis für eine reelle Folge s_n und für $s = 0$ zu führen. Ich nehme etwa an, für unendlich viele ν sei $s_{k_\nu} > \mu$, $\mu > 0$, und werde daraus einen Widerspruch herleiten.

I. Ich wähle ein $\vartheta_1 > 0$, so daß mit $\varrho = \frac{\vartheta}{2}$

$$\vartheta_1 < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \varrho, \frac{\mu}{4M}\right)$$

bleibt. Dann gibt es eine Indexfolge $\eta_\nu < \eta_{\nu+1} \to \infty$, so daß für jedes ν

$$s_{\eta_\nu+1}, \ldots, s_{\eta_\nu + [\vartheta_1\sqrt{\eta_\nu}]} > \frac{\mu}{2}$$

sind. Ich wähle ein $m_0 > 0$, so daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\vartheta_1^2 r + \vartheta_1^2 \varrho \sqrt{r} \leqq \varrho^2 r, \qquad r > m_0, \tag{5}$$

$$\vartheta_1 \sqrt{r} < \varrho \sqrt{r} - 2, \qquad r > m_0, \tag{6}$$

$$\frac{M}{\sqrt{r-1}} < \frac{\mu}{4}, \qquad r > m_0. \tag{7}$$

Die Existenz der gewünschten Folge η_ν ist nachgewiesen, wenn gezeigt ist, daß es zu einem $m_1 > m_0$ stets eine Nummer $\eta > m_1$ gibt, so daß $s_{\eta+1}, \ldots, s_{\eta+[\vartheta_1\sqrt{\eta}]}$ alle größer als $\frac{\mu}{2}$ sind. Zu $m_1 > m_0$ gibt es die Nummern p und ν_0, so daß gilt:

$$m_0 < m_1 < n_{\nu_0} \leqq p \leqq n'_{\nu_0}$$

[9]) Knopp, E-Verfahren II, S. 139, Satz 7.

[10]) Der Beweis dieser Tatsache verläuft ebenso wie der des $o\text{-}E \to K$-Satzes. Siehe Knopp, E-Verfahren II, S. 136—139.

und

8) $$s_p > \mu.$$

α) Es sei $n_{\nu_0} \leqq p \leqq n_{\nu_0} + [\varrho \sqrt{n_{\nu_0}}]$. Dann ist $p + [\vartheta_1 \sqrt{p}] \leqq n'_{\nu_0}$. Dazu braucht ja nur die folgende Reihe von Gleichungen richtig zu sein:

$$p + \vartheta_1 \sqrt{p} \leqq n'_{\nu_0},$$

$$\varrho \sqrt{n_{\nu_0}} + \vartheta_1 \sqrt{n_{\nu_0} + \varrho \sqrt{n_{\nu_0}}} \leqq n'_{\nu_0} - n_{\nu_0},$$

$$\vartheta_1 \sqrt{n_{\nu_0} + \varrho \sqrt{n_{\nu_0}}} \leqq \varrho \sqrt{n_{\nu_0}},$$

$$\vartheta_1^2 n_{\nu_0} + \vartheta_1^2 \varrho \sqrt{n_{\nu_0}} \leqq \varrho^2 n_{\nu_0}.$$

Die letzte Gleichung ist wegen (5) erfüllt. Nehme ich nun $\eta = p$, so wird den gestellten Forderungen genügt. Denn für $t = 1, \ldots, [\vartheta_1 \sqrt{p}]$ hat man

$$s_{p+t} = s_p - (s_p - s_{p+1}) - \ldots - (s_{p+t-1} - s_{p+t})$$
$$> \mu - [\vartheta_1 \sqrt{p}] \frac{M}{\sqrt{p}} > \frac{\mu}{2}.$$

β) Es sei $n_{\nu_0} + [\varrho \sqrt{n_{\nu_0}}] < p \leqq n'_{\nu_0}$. Da die Differenz zweier benachbarter Glieder in der Folge $l + [\vartheta_1 \sqrt{l}]$ $(l = 0, 1, \ldots)$ höchstens 2 ist, kann ich eine Nummer q so wählen, daß $q + [\vartheta_1 \sqrt{q}]$ eine der Zahlen p oder $p - 1$ ist. Dann ist

9) $$q + \vartheta_1 \sqrt{q} > n_{\nu_0} + \varrho \sqrt{n_{\nu_0}} - 2.$$

Wäre nun $n_{\nu_0} > q$, so wäre wegen (6) $\vartheta_1 \sqrt{q} < \varrho \sqrt{n_{\nu_0}} - 2$, also $q + \vartheta_1 \sqrt{q} < n_{\nu_0} + \varrho \sqrt{n_{\nu_0}} - 2$, im Widerspruch zu (9). Daher ist $n_{\nu_0} \leqq q$. Nehme ich nun $\eta = q$, so sind die gestellten Forderungen erfüllt. Für $t = 1, \ldots, [\vartheta_1 \sqrt{q}] - 1$ ist

$$s_{q+t} = s_{q+[\vartheta_1 \sqrt{q}]} - (a_{q+[\vartheta_1 \sqrt{q}]} + \ldots + a_{q+t+1})$$
$$> s_{q+[\vartheta_1 \sqrt{q}]} - ([\vartheta_1 \sqrt{q}] - t) \frac{M}{\sqrt{q+t}} > s_{q+[\vartheta_1 \sqrt{q}]} - \frac{\mu}{4}.$$

Da wegen (7) und (8) $s_{q+[\vartheta_1 \sqrt{q}]} > \frac{3\mu}{4}$ ist, liegen $s_{q+1}, \ldots, s_{q+[\vartheta_1 \sqrt{q}]}$ alle rechts von $\frac{\mu}{2}$.

Die Folge η_ν ist auf Grund ihrer hiermit geleisteten Konstruktion so beschaffen, daß für alle ν die Indizes $\eta_\nu + 1, \ldots, \eta_\nu + [\vartheta_1 \sqrt{\eta_\nu}]$ der Folge k_ν angehören.

II. Von η_ν und ϑ_1 gehe ich nun zu der Folge m_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ und der Konstanten $t > 0$ über, so daß

10) $$s_{m_\nu - [t \sqrt{m_\nu}]}, \ldots, s_{m_\nu}, \ldots, s_{m_\nu + [t \sqrt{m_\nu}]} > \frac{\mu}{2}$$

sind und daß m_ν Teilfolge von k_ν ist.

III. Aus $E_{2k_\nu} \to 0$ folgt für $l = 2^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$

$$(11) \quad E_{k_\nu}^{(l)} = \frac{l}{2^{2lk_\nu}} \left(\binom{2lk_\nu}{0} s_0 + \binom{2lk_\nu}{l} s_1 + \ldots + \binom{2lk_\nu}{2lk_\nu} s_{2k_\nu} \right) = o(1).$$

Das ergibt sich für $l = 2$ aus dem erwähnten Satz von Knopp [9]). Ich nehme nun an, (11) sei bewiesen für $l = 2^r$. Dann folgt, daß (11) richtig bleibt, wenn ich l durch $2l$ ersetze. Denn ist

$$t_n = \begin{cases} s_{nl}, & n = 0, l, 2l, \ldots, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

so hat man

$$\frac{l}{2^{2lk_\nu}} \left\{ \binom{2lk_\nu}{0} t_0 + \binom{2lk_\nu}{1} t_1 + \ldots + \binom{2lk_\nu}{2lk_\nu} t_{2lk_\nu} \right\} = o(1).$$

Der Satz von Knopp liefert nun wieder

$$\frac{2l}{2^{4lk_\nu}} \left\{ \binom{4lk_\nu}{0} t_0 + \binom{4lk_\nu}{2} t_1 + \ldots + \binom{4lk_\nu}{4lk_\nu} t_{2lk_\nu} \right\} = o(1),$$

$$\frac{2l}{2^{4lk_\nu}} \left\{ \binom{4lk_\nu}{0} s_0 + \binom{4lk_\nu}{2l} s_1 + \ldots + \binom{4lk_\nu}{4lk_\nu} s_{2k_\nu} \right\} = o(1).$$

Damit ist (11) bewiesen.

IV. Wir setzen

$$(12) \quad E_n^{(l)} = \sum_{m=-n}^{n} a_{n,m}^{(l)} s_{n+m},$$

$$a_{n,m}^{(l)} = \frac{l}{2^{2ln}} \binom{2ln}{ln + lm}, \qquad m = -n, \ldots, +n,$$

$$P_n^{(l)} = \sum_{m=-n}^{-[t\sqrt{n}]-1} a_{n,m}^{(l)} = \sum_{m=[t\sqrt{n}]+1}^{n} a_{n,m}^{(l)},$$

$$Q_n^{(l)} = \sum_{m=-[t\sqrt{n}]}^{-1} a_{n,m}^{(l)} = \sum_{m=1}^{[t\sqrt{n}]} a_{n,m}^{(l)}.$$

Dann ist

$$(13) \quad \sum_{m=-n}^{n} a_{n,m}^{(l)} = 2P_n^{(l)} + 2Q_n^{(l)} + a_{n,0}^{(l)} = 1 + o(1), \qquad n \to \infty \text{ [11])}.$$

Um Aufschluß über die Verteilung der Gewichte $a_{n,m}^{(l)}$ der Mittelbildung (12) zu erhalten, definiere ich für $x \geqq 0$ die Funktionen $\psi_n^{(l)}(x)$ und $\varphi_n^{(l)}(x)$:

$$\psi_n^{(l)}(x) = \begin{cases} a_{n,m}, & m \leqq x < m+1 \qquad (m = 0, \ldots, n), \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

$$\varphi_n^{(l)}(x) = \sqrt{n}\, \psi_n^{(l)}(x\sqrt{n}).$$

[11]) Knopp, E-Verfahren II, S. 140, Fußnote [20]).

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel ergibt sich für $n \to \infty$

$$\varphi_n^{(l)}(0) = \sqrt{n}\, a_{n,0}^{(l)} = \frac{l\sqrt{n}}{2^{2ln}} \binom{2ln}{ln} \simeq \sqrt{\frac{l}{\pi}} \tag{14}$$

und bei festem x

$$\frac{\varphi_n^{(l)}(0)}{\varphi_n^{(l)}(x)} = \frac{a_{n,0}^{(l)}}{a_{n,[x\sqrt{n}]}^{(l)}} = \binom{2ln}{ln} : \binom{2ln}{ln + l[x\sqrt{n}]} = \frac{(ln - l[x\sqrt{n}])!\,(ln + l[x\sqrt{n}])!}{(ln)!\,(ln)!}$$

$$\simeq \left(\frac{l^2n^2 - l^2[x\sqrt{n}]^2}{l^2n^2}\right)^{ln} \left(\frac{ln + l[x\sqrt{n}]}{ln}\right)^{l[x\sqrt{n}]} \left(\frac{ln - l[x\sqrt{n}]}{ln}\right)^{-l[x\sqrt{n}]}$$

$$\simeq \left(1 - \frac{[x\sqrt{n}]^2}{n^2}\right)^{ln} \left(1 + \frac{[x\sqrt{n}]}{n}\right)^{lx\sqrt{n}} \left(1 - \frac{[x\sqrt{n}]}{n}\right)^{-lx\sqrt{n}}.$$

Ich bezeichne die drei rechts stehenden Produkte mit A, B und C. Es ist

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{ln} \leqq A \leqq \left(1 - \frac{(x\sqrt{n}-1)^2}{n^2}\right)^{ln}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite strebt gegen e^{-lx^2}, der auf der rechten Seite ist mit $z = \frac{1}{n}$ gleich

$$e^{l/z \log(1 - x^2 z + 2xz^{3/2} - z^2)} = e^{-lx^2} + o(1), \qquad z \to 0.$$

Geht man ähnlich bei B und C vor, so findet man insgesamt

$$A \simeq e^{-lx^2}, \quad B \simeq e^{lx^2}, \quad C \simeq e^{lx^2}.$$

Zusammen mit (14) ergibt sich

$$\varphi_n^{(l)}(x) = \sqrt{\frac{l}{\pi}}\, e^{-lx^2} + o(1), \qquad n \to \infty, \quad x \geqq 0. \tag{15}$$

Bei festem l ist $\varphi_n^{(l)}(x)$ gleichmäßig für $x \geqq 0$ beschränkt. Es folgt für $n \to \infty$

$$Q_n^{(l)} = \int_1^{[t\sqrt{n}]+1} \varphi_n^{(l)}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{[t\sqrt{n}]+1} \varphi_n^{(l)}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx$$

$$= \int_{o(1)}^{t+o(1)} \varphi_n^{(l)}(x)\, dx = \int_0^t \varphi_n^{(l)}(x)\, dx + o(1).$$

Mit (15) folgt nach dem Satz von Arzelà über gliedweise Integration

$$Q_n^{(l)} = \sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_0^t e^{-lx^2} dx + o(1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{l}t} e^{-x^2} dx + o(1), \qquad n \to \infty.$$

Es sei $|s_n| < U$ für alle n. Wegen $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und wegen (13) und $a_{n,0}^{(l)} \to 0$ für $n \to \infty$ kann ich ein l so groß und dazu ein $\bar{n}$ wählen, so daß

$$Q_n^{(l)} > \frac{1}{4}, \qquad n > \bar{n},$$

$$P_n^{(l)} < \frac{\mu}{16\,U}, \qquad n > \bar{n},$$

ist. Dieses l halte ich jetzt fest. Für $m_\nu > \bar{n}$ ist dann wegen (10)

$$E_{m_\nu}^{(l)} > -2\,U\,P_{m_\nu}^{(l)} + \mu Q_{m_\nu}^{(l)} > \frac{\mu}{8}.$$

Da m_ν Teilfolge von k_ν ist, steht dies im Widerspruch zu (11). Damit ist Satz 8 bewiesen.

Mit Hilfe des Satzes 8 beweisen wir zum Schluß noch den folgenden

Satz 9. *Voraussetzung. Für die Indexfolge n_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) sei mit einem $\vartheta > 0$*

$$n_{\nu+1} - n_\nu > \vartheta\sqrt{n_\nu}. \tag{16}$$

Für die Reihenglieder a_n sei mit einem reellen α

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{für } n \neq n_\nu, \tag{17}$$

$$a_n = O(n^\alpha) \quad \text{für } n = n_\nu. \tag{18}$$

Behauptung. Aus $E\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ folgt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Beweis. Der Beweis braucht nur für eine reelle Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ geführt zu werden. Es sei $\sqrt{n}\,|a_n| < M$ für $n \neq n_\nu$. Ist s_n beschränkt, so liefert Satz 8 das Gewünschte.

I. Ich nehme an, s_n sei nicht beschränkt. Dann kann ich eine Indexfolge λ_ν ($\lambda_\nu < \lambda_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \ldots$) und ein $L > 1$ angeben, so daß

$$|s_m| < L\,|s_{\lambda_\nu}|, \qquad 0 \leqq m \leqq 3\,\lambda_\nu \tag{19}$$

ist [12]). Ich definiere nun eine Indexfolge l_ν auf die folgende Weise. Zu jedem ν gehört ein gewisses μ, so daß

$$n_\mu \leqq \lambda_\nu \leqq n_{\mu+1} - 1$$

ist. Falls $\lambda_\nu \leqq n_\mu\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)$ ist, setze ich $l_\nu = \lambda_\nu$; im anderen Fall nehme ich für l_ν eine positive ganze Zahl r, für die $r + [\vartheta' \sqrt{\bar{r}}]$ gleich λ_ν oder gleich

[12]) Wegen (17) und (18) gibt es ein ganzes $k \geqq 2$, so daß $s_n = o(n^k)$ und $2\left(1 - 2^{-\frac{1}{k-1}}\right)^{-1} \geq 3$ ist. Das Behauptete ergibt sich dann nach L. I, S. 454, I. 1

-1 ist mit $\vartheta' = \operatorname{Min}\left(\frac{\vartheta}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (vgl. hier und im folgenden die Abschätzungen
. 489). Für genügend große ν hat man

20) $$n_\mu \leqq m \leqq n_{\mu+1} - 1, \quad m = l_\nu, l_\nu + 1, \ldots, l_\nu + [\vartheta' \sqrt{l_\nu}]$$

nd wegen (17)

21) $$s_{l_\nu} - A < s_m < s_{l_\nu} + A, \quad m = l_\nu, l_\nu + 1, \ldots, l_\nu + [\vartheta' \sqrt{l_\nu}]$$

nd

$$|s_{l_\nu} - s_{\lambda_\nu}| < A,$$

obei A eine nur von M und ϑ' abhängige Konstante ist. Wegen (19) muß
$|_{\lambda_\nu}| \to \infty$ streben, da andernfalls s_n beschränkt wäre. Also strebt auch

22) $$|s_{l_\nu}| \to \infty.$$

Weiter läßt sich wegen (19) eine Konstante $L' > L$ so wählen, daß für
$\leqq m \leqq 3\lambda_\nu$

$$|s_m| < L|s_{l_\nu} + (s_{\lambda_\nu} - s_{l_\nu})| \leqq L|s_{l_\nu}| + LA < L'|s_{l_\nu}|$$

st. Wegen $l_\nu \leqq \lambda_\nu$ ist also sicher

23) $$|s_m| < L'|s_{l_\nu}|, \qquad 0 \leqq m \leqq 3 l_\nu.$$

ndem ich unter Umständen endlich viele Anfangsglieder der Folge l_ν weglasse
nd dann eine neue, wieder mit $\nu = 0, 1, \ldots$ beginnende Numerierung ihrer
lieder vornehme, kann ich erreichen, daß die angeschriebenen Beziehungen
ür alle ν gelten. Aus demselben Grunde kann ich noch voraussetzen, daß

24) $$2 l_\nu + 2[\vartheta' \sqrt{l_\nu}] < 3 l_{\nu+1}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots$$

st.

II. Es sei s_n weiterhin als nicht beschränkt vorausgesetzt und l_ν die in I
onstruierte Indexfolge. Es sei ε_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Nullfolge. Wir werden
un in einer Folge von Schritten eine Folge s'_n $(n = 0, 1, \ldots)$ konstruieren
nd mit ihr die Ausdrücke

$$E'_n = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0} s'_0 + \binom{n}{1} s'_1 + \ldots + \binom{n}{n} s'_n\right)$$

ilden. Zugleich werden wir eine Indexfolge $\nu(k)$ angeben:

$$0 = \nu(0) < \nu(1) < \ldots.$$

0. Schritt. Wir setzen

$$s'_n = \frac{s_n}{s_{l_{\nu(0)}}}, \qquad 0 \leqq n \leqq 3 l_{\nu(0)}.$$

Wegen (23) ist

$$|s'_n| < L', \qquad 0 \leqq n \leqq 3 l_{\nu(0)}.$$

Ferner ist wegen (21) und (24)

$$|s'_n - 1| < \frac{A}{|s_{l_{\nu(0)}}|}, \quad l_{\nu(0)} \leqq n \leqq l_{\nu(0)} + [\vartheta' \sqrt{l_{\nu(0)}}],$$

$$E'_{2n} = \frac{E_{2n}}{s_{l_{\nu(0)}}}, \qquad l_{\nu(0)} \leqq n \leqq l_{\nu(0)} + [\vartheta' \sqrt{l_{\nu(0)}}].$$

k. Schritt ($k = 1, 2, \ldots$). Wir wählen $\nu(k) > \nu(k-1)$, so daß $l_{\nu(k)} > 3\, l_{\nu(k-1)}$ und

$$\frac{1}{2^{2n}}\left|\binom{2n}{0} s_0 + \ldots + \binom{2n}{3\, l_{\nu(k-1)}} s_{3 l_{\nu(k-1)}}\right| < \varepsilon_k, \qquad n \geqq l_{\nu(k)},$$

$$\frac{1}{2^{2n}}\left|\binom{2n}{0} s'_0 + \ldots + \binom{2n}{3\, l_{\nu(k-1)}} s'_{3 l_{\nu(k-1)}}\right| < \varepsilon_k, \qquad n \geqq l_{\nu(k)}$$

ist. Wir setzen

$$s'_n = \frac{s_n}{s_{l_{\nu(k)}}}, \qquad 3\, l_{\nu(k-1)} < n \leqq 3\, l_{\nu(k)}.$$

Wegen (23), (21) und (24) ist

$$|s'_n| < L', \qquad 3\, l_{\nu(k-1)} < n \leqq 3\, l_{\nu(k)}, \tag{25}$$

$$|s'_n - 1| < \frac{A}{|s_{l_{\nu(k)}}|}, \qquad l_{\nu(k)} \leqq n \leqq l_{\nu(k)} + [\vartheta' \sqrt{l_{\nu(k)}}]. \tag{26}$$

Für dieselben n wie in (26) ist

$$\frac{1}{2^{2n}}\left|\binom{2n}{3\, l_{\nu(k-1)} + 1} s_{3 l_{\nu(k-1)+1}} + \ldots + \binom{2n}{2n} s_{2n}\right| < |E_{2n}| + \varepsilon_k,$$

$$\frac{1}{2^{2n}}\left|\binom{2n}{3\, l_{\nu(k-1)} + 1} s'_{3 l_{\nu(k-1)+1}} + \ldots + \binom{2n}{2n} s'_{2n}\right| > |E'_{2n}| - \varepsilon_k.$$

Also ist

$$|E'_{2n}| < \frac{|E_{2n}|}{|s_{l_{\nu(k)}}|} + \frac{\varepsilon_k}{|s_{l_{\nu(k)}}|} + \varepsilon_k, \quad l_{\nu(k)} \leqq n \leqq l_{\nu(k)} + [\vartheta' \sqrt{l_{\nu(k)}}]. \tag{27}$$

Damit sind wir am Ziel. Auf die nun konstruierte Folge s'_n läßt sich nämlich Satz 8 anwenden. Wegen (25) ist s'_n beschränkt. Weiter ist wegen (17) und (20) für $n = l_{\nu(k)} + 1, \ldots, l_{\nu(k)} + [\vartheta' \sqrt{l_{\nu(k)}}]$

$$\sqrt{n}\,|s_n - s_{n-1}| < M,$$

also

$$\sqrt{n}\,|s'_n - s'_{n-1}| < \frac{M}{|s_{l_{\nu(k)}}|}.$$

Die Voraussetzungen von Satz 8 sind also für die Folge s'_n erfüllt, wenn für die dort auftretenden Indexfolgen $n_0, n_1, \ldots$ und $n'_0, n'_1, \ldots$ die Folgen $l_{\nu(k)}$ und $l_{\nu(k)} + [\vartheta' \sqrt{l_{\nu(k)}}]$ $(k = 0, 1, \ldots)$ genommen werden. Jedoch ist, wenn $K_k = K_k\,(l_{\nu(k)}, l_{\nu(k)} + [\vartheta' \sqrt{l_{\nu(k)}}])$ gesetzt und E_n als konvergent angenommen wird, wegen (22) und (27)

$$\lim_{k \to \infty} E'_{2K_k} = 0$$

und wegen (26)

$$\lim_{k \to \infty} s'_{K_k} = 1.$$

Dieser Widerspruch gegen die Behauptung von Satz 8 zeigt, daß die Annahme, s_n sei nicht beschränkt, falsch ist. Damit ist Satz 9 bewiesen.

(Eingegangen am 27. Mai 1939.)

On Generalised Tauberian Theorems.

By

S. Minakshi Sundaram, Madras University.

1. Let $\varphi(t)$ be a positive monotonic or quasi-monotonic[1]) and differentiable function defined in $(0\ \infty)$ such that

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 1 \tag{1}$$

and the integrals

$$\int_0 \frac{1-\psi(t)}{t}\,dt \quad \text{and} \quad \int^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt$$

exist, where

$$\psi(t) = \int_t^\infty \varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Also let $s(t)$ be a function defined in $(0\ \infty)$ and of bounded variation in every finite interval. If we write

$$F(\sigma) = \sigma \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, s(t)\,dt, \qquad \sigma > 0, \tag{3}$$

it is known that, if $s(t)$ converges as $t \to \infty$, $F(\sigma)$ converges to the same limit as $s(t)$, when $\sigma \to 0$. In fact

$$\left.\begin{aligned} \overline{\operatorname{Lim}}_{\sigma\to 0} F(\sigma) &\leqq \overline{\operatorname{Lim}}_{t\to\infty} s(t), \\ \underline{\operatorname{Lim}}_{\sigma\to 0} F(\sigma) &\geqq \underline{\operatorname{Lim}}_{t\to\infty} s(t). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

The aim of this paper is to study the converse problem.

2. Before proceeding to Tauberian Theorems we shall first note an Abelian result which is of use in what follows. If we write

$$S(t) = \int_0^t s(u)\,du, \tag{5}$$

[1]) A quasi monotonic function may be defined as one which is monotonic in an interval (T, ∞), T finite, while in $(0\ T)$ it is of bounded variation, so that a quasi monotonic function is ultimately monotonic.

we observe that

$$F(\sigma) = \sigma \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, s(t)\, dt,$$

$$= -\sigma^2 \int_0^\infty \varphi'(\sigma t)\, S(t)\, dt,$$

by integration by parts. Therefore

$$\sigma \int_\sigma^\infty \frac{F(x)}{x^2}\, dx = -\sigma \int_\sigma^\infty dx \int_0^\infty \varphi'(xt)\, S(t)\, dt,$$

$$= -\sigma \int_0^\infty S(t)\, dt \int_\sigma^\infty \varphi'(xt)\, dx,$$

$$= \sigma \int_0^\infty \varphi(\sigma t) \frac{S(t)}{t}\, dt.$$

So if we write

$$F_1(\sigma) = \sigma \int_\sigma^\infty \frac{F(x)}{x^2}\, dx = \sigma \int_0^\infty \varphi(\sigma t) \frac{S(t)}{t}\, dt \tag{6}$$

we at once observe

$$\begin{cases} \overline{\operatorname{Lim}}_{\sigma \to 0} F_1(\sigma) \leqq \overline{\operatorname{Lim}}_{\sigma \to 0} F(\sigma), \\ \underline{\operatorname{Lim}}_{\sigma \to 0} F_1(\sigma) \geqq \underline{\operatorname{Lim}}_{\sigma \to 0} F(\sigma) \end{cases} \tag{7}$$

which inequalities we denote more simply by

$$\overline{\underline{\operatorname{Lim}}}_{\sigma \to 0} F_1(\sigma) \lesseqgtr \overline{\underline{\operatorname{Lim}}}_{\sigma \to 0} F(\sigma). \tag{7}$$

3. The above Abelian result (7) together with the following two simple Tauberian Theorems will enable us to prove very general results.

3. 1. The Generalised Hardy-Littlewood Lemma. If we consider the graph of the function $\varphi(t)$ defined in the interval $(0\ \infty)$, which we have assumed to be essentially positive and ultimately tending to zero monotonely — convergence to zero follows on account of (1) — we at once observe that, provided A is sufficiently large and greater than T, $\varphi(t)$ will be monotonic decreasing in $(A\ \infty)$ and in $(0\ A)$ in addition to having a finite number of maxima and minima will satisfy the condition

$$\varphi(t) \geqq \varphi(A) \quad \text{for} \quad t < A. \tag{8}$$

let ν be the least value of A for which inequality (8) is satisfied. If $\varphi(t)$ is monotonic in $(0\ \infty)$, then $\nu = 0$. Now let δ be any number greater than $\geqq 0$ and let

9) $$s(t) \geqq 0.$$

Then

$$\begin{aligned}\varphi(\delta)\, S(\omega) &= \varphi(\delta) \int_0^{\omega} s(t)\, dt \\ &\leqq \int_0^{\omega} \varphi\left(\frac{\delta t}{\omega}\right) s(t)\, dt \\ &\leqq \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{\delta t}{\omega}\right) s(t)\, dt \\ &= \frac{\omega}{\delta} F\left(\frac{\delta}{\omega}\right).\end{aligned}$$

Dividing both sides by ω and then letting $\omega \to \infty$, we observe that

10) $$\overline{\lim_{\omega \to \infty}} \frac{S(\omega)}{\omega} \leqq \frac{1}{\delta \varphi(\delta)} \cdot \overline{\lim_{\sigma \to 0}} F(\sigma).$$

(10) is true for all values of $\delta \geqq \nu \geqq 0$ so that it will remain valid if we replace $\frac{1}{\delta \varphi(\delta)}$ by it least value, if it exists, on the right. Now $\delta \varphi(\delta)$ is a continuous function of δ, tends to zero as $\delta \to \infty$, on account of (1) and therefore is bounded in $(0\ \infty)$. So $\delta \varphi(\delta)$ attains its greatest value in $(\nu\ \infty)$ at some point say $\varkappa > 0$, in any case. In fact $\varkappa \geqq \nu$ if $\nu > 0$ and $\varkappa > 0$ if $\nu = 0$. Replacing $\delta \varphi(\delta)$ by its maximum value $\varkappa \varphi(\varkappa)$ in (10) we have

11) $$\overline{\lim_{\omega \to \infty}} \frac{S(\omega)}{\omega} \leqq \frac{1}{\varkappa \varphi(\varkappa)} \overline{\lim_{\sigma \to 0}} F(\sigma)\ ^{2}).$$

After a slight refinement of the argument used in deducing (10) we at once observe the following

---

[2]) I am thankful to Prof. Dr. K. Knopp who read the manuscript and made some kind and critical remarks. In particular I am grateful to him for referring me to a paper by V. Garten and K. Knopp „Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen", Math. Zeitschr. 42 (1937), pp. 365—388, where inequalities similar to (11) are obtained. If $\Phi(t) = e^{-t}$, then $\delta\, \Phi(\delta) = \delta e^{-\delta}$ is maximum for $\delta = 1$, so that (11) leads to theorem 4 b with $k = 1$ (p. 383) of the paper quoted. Similarly if $\Phi(t) = l(1-t)^{l-1} l > 1$ if $0 \leqq t \leqq 1$ and $\Phi(t) = 0$ if > 1, we are led to theorem 1 b (p. 382) with $k = 1$. It is not difficult to identify the method I have used with that of the authors quoted.

Theorem 1. If

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{t\to\infty} s(t) \geqq 0 \tag{12}$$

then

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{\omega\to\infty} \frac{S(\omega)}{\omega} \leqq \frac{1}{\varkappa\,\varphi(\varkappa)}\,\overline{\operatorname{Lim}}_{\sigma\to 0} F(\sigma) \tag{13}$$

where $\varkappa$ is the value of δ for which $\delta\,\varphi(\delta)$ is greatest in $(\nu\ \infty)$, ν being the least value of A defined by (8).

3. 2. Let us now assume for the moment that $s(t)$ is differentiable and that

$$\begin{aligned} &\overline{\operatorname{Lim}}_{t\to\infty}\, t\,s'(t) \leqq \beta, \\ &\underline{\operatorname{Lim}}_{t\to\infty}\, t\,s'(t) \geqq -\alpha, \end{aligned} \qquad 0 \leqq \alpha, \beta < \infty. \tag{14}$$

Then

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \sigma \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, s(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty s'(t)\ \psi(\sigma t)\, dt \end{aligned} \tag{15}$$

and

$$\begin{aligned} s(\omega) &= F(\sigma) + s(\omega) - F(\sigma) \\ &= F(\sigma) + \int_0^\omega s'(t)\,(1 - \psi(\sigma t))\, dt \\ &\qquad - \int_\omega^\infty \psi(\sigma t)\, s'(t)\, dt. \end{aligned} \tag{16}$$

In (16) we set $\sigma = \dfrac{\delta}{\omega}$, $\delta > 0$ and let $\omega \to \infty$. Using (14) we have

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\operatorname{Lim}}_{\omega\to\infty} s(\omega) &\leqq \overline{\operatorname{Lim}}_{\sigma\to 0} F(\sigma) + \beta \int_0^\delta \frac{1-\psi(t)}{t}\, dt \\ &\qquad + \alpha \int_\delta^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt, \\ \underline{\operatorname{Lim}}_{\omega\to\infty} s(\omega) &\geqq \underline{\operatorname{Lim}}_{\sigma\to 0} F(\sigma) - \alpha \int_0^\delta \frac{1-\psi(t)}{t}\, dt \\ &\qquad - \beta \int_\delta^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Hence the

Theorem 2. If as

3) $$\sigma \to 0, \quad F(\sigma) = O(1),$$

e conditions (14) imply the inequalities (17).

3. 3. If either α or β is zero in (14) while the other is finite, we observe, letting $\delta \to 0$ or ∞ as the case may be in (17)

$$\overline{\underset{\omega \to \infty}{\text{Lim}}}\, s(\omega) = \overline{\underset{\to 0}{\text{Lim}}}\, F(\sigma),$$

at is

9) $$\underset{\omega \to \infty}{\text{Oscillation of}}\ s(\omega) = \underset{\sigma \to \infty}{\text{Oscillation of}}\ F(\sigma).$$

e thus have the

Corollary. If in (14) either α or β is zero while the other is finite and (18) fulfilled, then

9) $$\underset{\omega \to \infty}{\text{Osc.}}\ s(\omega) = \underset{\sigma \to 0}{\text{Osc.}}\ F(\sigma).$$

4. In this section we shall arrive at the same conclusion (19) with the one led condition

0) $$\underset{t \to \infty}{\text{Lim}}\, ts'(t) \geqq 0,$$

e require the following

Lemma 1. (18) and (20) imply

1) $$\sigma F'(\sigma) = O(1) \quad \text{as} \quad \sigma \to 0.$$

ow

5) $$F(\sigma) = \sigma \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, s(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma t)\, s'(t)\, dt,$$

$$F'(\sigma) = \int_0^\infty \psi'(\sigma t)\, t s'(t)\, dt$$

$$= -\int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, t\, s'(t)\, dt,$$

$$F''(\sigma) = -\int_0^\infty \varphi'(\sigma t)\, t^2\, s''(t)\, dt.$$

nce $\varphi(x)$ is ultimately monotonic decreasing, $\varphi'(x)$ is ultimately negative zero, so that from (20) we observe that

) $$\underset{\sigma \to 0}{\text{Lim}}\, \sigma^2 F''(\sigma) \geqq 0.$$

In fact it is not difficult to observe that the kernel $-\sigma^2 t\,\varphi'(\sigma t)$ satisfies Toeplitz's conditions. We will now complete the proof of lemma 1 by observing that (22) and (18) imply (21). For, if $0 < \delta < 1$, we have the two forms of Taylor's formula

$$F(x) - F(x - \delta x) = \delta x F'(x - \delta x) + \frac{\delta^2 x^2}{2} F''(\xi)$$
$$= \delta x F'(x) - \frac{\delta^2 x^2}{2} F''(\xi)$$
$$\text{where } x - \delta x \leqq \xi \leqq x.$$

From the first we have

$$(x - \delta x) F'(x - \delta x) = \frac{1-\delta}{\delta} \cdot (F(x) - F(x - \delta x)) - \frac{\delta(1-\delta)}{2} \cdot \frac{x^2}{\xi^2} \cdot \xi^2 F''(\xi)$$

and from the 2nd

$$x F'(x) = \frac{F(x) - F(x - \delta x)}{\delta} + \frac{\delta}{2} \frac{x^2}{\xi^2} \cdot \xi^2 F''(\xi).$$

Letting $x \to 0$, we have on account of (22), respectively

$$(23) \qquad \begin{cases} \overline{\lim_{\sigma \to 0}}\, \sigma F'(\sigma) \leqq O\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right), \\ \underline{\lim_{\sigma \to 0}}\, \sigma F'(\sigma) \geqq -O\left(\frac{1}{\delta}\right). \end{cases}$$

The expression in "O" will be minimum when $\delta = 1$, so that our lemma follows at once.

4. 1. Now by Theorem 1, (20) and (21) imply

$$(24) \qquad \overline{\lim_{\omega \to \infty}} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} t\, d s(t) < \infty.$$

And by the application of the corollary in 3. 3 we observe that (18), (20) and (24) imply

$$(25) \qquad \operatorname*{Osc.}_{\omega \to \infty} \frac{S(\omega)}{\omega} = \operatorname*{Osc.}_{\sigma \to 0} F(\sigma)$$

for

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{x}\right) = \frac{s(x)}{x} - \frac{S(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^x t\, d s(t).$$

We shall now briefly observe that (20) implies

$$(26) \qquad \operatorname*{Osc.}_{\omega \to \infty} s(\omega) = \operatorname*{Osc.}_{\omega \to \infty} \frac{S(\omega)}{\omega}.$$

ow, if $x = (1+\delta)\omega$, where δ is an arbitrary positive number,

$$\frac{s(x) - s(\omega)}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_{\omega}^{x} s'(t)\,dt$$

d so from (20)

$$\underset{\omega \to \infty}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, \frac{s(x) - s(\omega)}{\delta} \geqq 0. \tag{27}$$

lso

$$\int_0^x s(t)\,dt - \int_0^\omega s(t)\,dt = \int_\omega^x s(t)\,dt$$

$$= \delta\omega\, s(\omega) + \int_\omega^x (s(t) - s(\omega))\,dt$$

$$s(\omega) = \frac{1+\delta}{\delta}\cdot\frac{S(x)}{x} - \frac{1}{\delta}\cdot\frac{S(\omega)}{\omega} - \frac{1}{\delta\omega}\int_\omega^x (s(t) - s(\omega))\,dt. \tag{28}$$

xing δ, and letting $\omega \to \infty$, we observe from the above, that if

$$\overline{\underset{\omega \to \infty}{\mathrm{Lim}}}\, \frac{S(\omega)}{\omega} = u \quad \text{and} \quad \underset{\omega \to \infty}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, \frac{S(\omega)}{\omega} = l,$$

$$\overline{\underset{\omega \to \infty}{\mathrm{Lim}}}\, s(\omega) \leqq u + \frac{u-l}{\delta}$$

ing (27). This inequality is true for all values of $\delta > 0$ and therefore letting $\to \infty$, we have

$$\overline{\underset{\omega \to \infty}{\mathrm{Lim}}}\, s(\omega) \leqq \overline{\underset{\omega \to \infty}{\mathrm{Lim}}}\, \frac{S(\omega)}{\omega}.$$

milarly we prove

$$\underset{\omega \to \infty}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, s(\omega) \geqq \underset{\omega \to \infty}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, \frac{S(\omega)}{\omega}$$

om

$$s(x) = \frac{1+\delta}{\delta}\cdot\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt - \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\omega}\int_0^\omega s(t)\,dt + \frac{1}{\delta\omega}\int_\omega^x (s(x) - s(t))\,dt. \tag{29}$$

us (26) is proved. Now from (7), (24) and (25) we observe (19). Hence the

Theorem 3. If

$$\underset{t \to \infty}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, t\, s'(t) \geqq 0 \tag{30}$$

d

$$F(\sigma) = O(1) \text{ as } \sigma \to 0, \tag{31}$$

then

$$\underset{\omega \to \infty}{\text{Osc.}}\ s(\omega) = \underset{\sigma \to 0}{\text{Osc.}}\ F(\sigma). \tag{19}$$

5. From theorem 3, we can prove the following general theorem due to[3] V. Ramaswami immediately

Theorem 4. Let (λ_p) be a bounded sequence such that for every p, $1 < \lambda_p < e^h$ (say), $h > 0$ and let for

$$\chi(\lambda_p) = \underset{t \to \infty}{\text{Lim inf.}}\ s(u) - s(t), \quad t \leqq u \leqq t\lambda_p \tag{30}$$

$$\underset{p \to \infty}{\text{Lim}}\ \frac{\chi(\lambda_p)}{\log \lambda_p} \geqq 0, \tag{31}$$

then

$$\underset{\omega \to \infty}{\text{Osc.}}\ s(\omega) = \underset{\sigma \to 0}{\text{Osc.}}\ F(\sigma). \tag{19}$$

This theorem would follow from theorem 3 and the following lemmas.

Lemma 2. (31) implies (26).

Lemma 3. (31) implies

$$\underset{\omega \to \infty}{\underline{\text{Lim}}}\ \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} t\, d\, s(t) \geqq 0. \tag{32}$$

If in theorem 3 we put $\frac{S(\omega)}{\omega}$ in the place of $s(\omega)$ we observe that (32) implies

$$\begin{aligned} \underset{\omega \to \infty}{\text{Osc.}}\ \frac{(S\omega)}{\omega} &= \underset{\sigma \to 0}{\text{Osc.}}\ F_1(\sigma) \\ &= \underset{\sigma \to 0}{\text{Osc.}}\ F(\sigma) \end{aligned} \quad \text{by (7)}$$

and by lemma 2

$$\begin{aligned} \underset{\omega \to \infty}{\text{Osc.}}\ s(\omega) &= \underset{\omega \to \infty}{\text{Osc.}}\ \frac{S(\omega)}{\omega} \\ &= \underset{\sigma \to 0}{\text{Osc.}}\ F(\sigma). \end{aligned}$$

Hence the theorem.

We have only to prove the lemmas, which we proceed to do.

5. 1. Proof of Lemma 2. To every (λ_p) we can associate a positiv null-sequence (ε_p) so that

$$\frac{\chi(\lambda_p)}{\log \lambda_p} \geqq -\varepsilon_p. \tag{33}$$

---

[3] V. Ramaswami, "The Generalised Abel Tauber Theorem", Proc. Lond. Mat Soc. Vol. 41 (1936), pp. 408 et seqq. (Theorem 2).

If λ be an arbitrary positive number greater than 1 and r an integer such that $\lambda_p^{r-1} < \lambda \leqq \lambda_p^r$, we observe, since if $t \leqq u \leqq t\lambda$

$$s(u) - s(t) = s(u) - s(\lambda_p^{r-1}t) + s(\lambda_p^{r-1}t) - \ldots - s(t)$$

(34) $$\begin{aligned} \underset{t \to \infty}{\text{Lim inf.}}\ \underset{t \leqq u \leqq t\lambda}{} s(u) - s(t) &\geqq -r\,\varepsilon_p \log \lambda_p \\ &\geqq -\varepsilon_p \log \lambda - \varepsilon_p \log \lambda_p \\ &\geqq -\varepsilon_p(\lambda - 1) - \varepsilon_p h. \end{aligned}$$

Now, if we use (34) in the formula (28), λ taking the place of $(1 + \delta)$ and let $\omega \to \infty$, we observe

(35) $$\begin{aligned} \overline{\underset{\omega \to \infty}{\text{Lim}}}\ s(\omega) &\leqq \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,u - \frac{1}{\lambda - 1}\,l + \varepsilon_p(\lambda - 1) + \varepsilon_p h \\ &= u + \frac{u - l}{\lambda - 1} + \varepsilon_p(\lambda - 1) + \varepsilon_p h. \end{aligned}$$

This is true for all values of λ and taking the minimum value of the expression on the right we observe

(36) $$\overline{\underset{\omega \to \infty}{\text{Lim}}}\ s(\omega) \leqq u + 2\sqrt{\varepsilon_p(u - l)} + \varepsilon_p h.$$

Letting now $p \to \infty$ we observe

$$\overline{\underset{\omega \to \infty}{\text{Lim}}}\ s(\omega) \leqq u = \overline{\underset{\omega \to \infty}{\text{Lim}}}\ \frac{S(\omega)}{\omega}.$$

Similarly from (29) and (34) we will have

$$\underline{\underset{\omega \to \infty}{\text{Lim}}}\ s(\omega) \geqq l = \underline{\underset{\omega \to \infty}{\text{Lim}}}\ \frac{S(\omega)}{\omega}$$

which proves Lemma 2.

5. 2. Proof of Lemma 3. Write

(37) $$B(\omega) = \int_0^{\omega} t\,ds(t).$$

Then

(38) $$\begin{aligned} B(x) - B(\omega) &= \int_{\omega}^{x} t\,d\,s(t) \\ &= x\,s(x) - \omega\,s(\omega) - \int_{\omega}^{x} s(t)\,dt \\ &= \omega\,(s(x) - s(\omega)) + \int_{\omega}^{x} (s(x) - s(t))\,dt. \end{aligned}$$

Now if in (34) we make $p \to \infty$, we observe that for every λ

(39) $$\underset{t \to \infty}{\text{Lim}}\ \underset{t \leqq u \leqq t\lambda}{} \frac{s(u) - s(t)}{\lambda - 1} \geqq 0$$

and hence, if $x = \lambda\omega$ we note from (38)

$$B(x) - B(\omega) \geqq -k(\lambda-1)\omega - k(\lambda-1)(x-\omega) \tag{40}$$
$$= -k(\lambda-1)x,$$

where k is a definite constant, which certainly exists for every fixed λ on account of (39) such that

$$s(u) - s(t) > -k(\lambda-1),\ t \leqq u \leqq t\lambda. \tag{41}$$

Now

$$B(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{B\left(\frac{\omega}{\lambda^{\nu}}\right) - B\left(\frac{\omega}{\lambda^{\nu-1}}\right)\right\}$$
$$\geqq -k(\lambda-1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\omega}{\lambda^{\nu}}$$
$$= -k\omega\lambda.$$

This shows that

$$\underset{\omega\to\infty}{\underline{\mathrm{Lim}}}\ \frac{B(\omega)}{\omega} > -\infty \tag{42}$$
$$= -\wedge \text{ (say)}.$$

Now from (38) and (39) we easily observe using (34) that

$$\underset{\omega\to\infty}{\underline{\mathrm{Lim}}}\ \underset{\omega \leqq x \leqq \omega\lambda}{\ }\frac{B(x)-B(\omega)}{x} \geqq -\varepsilon_p(\lambda-1) - \varepsilon_p h. \tag{43}$$

And corresponding to a fixed λ and an arbitrarily chosen positive number ε, we can find numbers ω and x so that

$$\begin{cases} \dfrac{B(x)}{x} < -\wedge + \varepsilon, \\ \dfrac{B(\omega)}{\omega} > -\wedge - \varepsilon, \\ B(x) - B(\omega) > -(\varepsilon_p(\lambda-1) + \varepsilon_p h + \varepsilon)\lambda\omega \end{cases} \tag{44}$$

and

$$\omega \leqq x \leqq \lambda\omega.$$

We have then, from

$$\frac{B(x)}{x} - \frac{B(\omega)}{\omega} = \frac{B(x)-B(\omega)}{\omega} - \frac{x-\omega}{\omega}\cdot\frac{B(x)}{x} \tag{45}$$
$$-\wedge + \varepsilon + \wedge + \varepsilon \geqq -\{\varepsilon_p(\lambda-1) + \varepsilon_p h + \varepsilon\}\lambda + (\lambda-1)(\wedge - \varepsilon).$$

That is

$$\wedge - \varepsilon \leqq \frac{2\varepsilon}{\lambda-1} + \frac{\varepsilon_p(\lambda-1) + \varepsilon_p h + \varepsilon}{\lambda-1}\cdot\lambda. \tag{46}$$

etting $\varepsilon \to 0$ first and then $p \to \infty$ we note that

47) $$\wedge \leqq 0.$$

Hence the lemma.

6. A specially important application of theorem 4 is in the Theory of Dirichlet's Series[4]). Let the Dirichlet's Series

48) $$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu t}, \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty$$

e convergent for $t > 0$. Let in addition

18) $$F(t) = O(1) \text{ as } t \to 0.$$

We have then

Theorem 5. If

49) $$\underset{\lambda_n \to \infty}{\text{Lim inf.}} \; \min \sum_{\lambda_n \leqq \lambda_\nu \leqq (1+\delta)\lambda_n} a_\nu = -\varphi(\delta) = 0(\delta) \text{ as } \delta \to 0$$

nd if (18) is satisfied, then

$$\underset{n \to \infty}{\text{Osc.}} (s_n) = \underset{t \to 0}{\text{Osc.}} F(t),$$

where

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu.$$

This theorem would follow as in theorem 4 when we observe that $F(t)$ an be expressed in the form

$$F(t) = t \int_0^{\infty} A(x) e^{-xt} dx,$$

where

$$A(x) = 0 \quad \text{if} \quad x < \lambda,$$
$$= s_n \quad \text{if} \quad \lambda_n \leqq x < \lambda_{n+1}.$$

he discontinuity of the function $A(x)$ does not give any difficulty, in proving he analogues of lemmas 2 and 3. In formulae (28) and (29) we have to put $= \lambda_n$ and $x = (1+\delta)\lambda_n$ and proceed as in lemma 2. Infact instead of n arbitrary bounded sequence (λ_p) we have here a variable $(1+\delta)$ onverging to unity. Lemma 3 also has its analogue, the proof of which e indicate only briefly.

---

[4]) I have studied Power Series elsewhere. Jour. Ind. Math. Soc. 3 (1938), p. 131—135.

Lemma 4. (49) implies

$$\underset{\omega \to \infty}{\underline{\mathrm{Lim}}} \frac{\sum^{\lambda_n \leqq \omega} \lambda_n a_n}{\omega} \geqq 0. \tag{32'}$$

Proof. Write

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \sum^{\lambda_n \leqq \omega} \lambda_n a_n \\ &= \lambda_n s_n - \sum_{\nu=0}^{n-1} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) s_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)(s_n - s_\nu). \end{aligned} \tag{37'}$$

then

$$\begin{aligned} B(\overline{1+\delta}\,\lambda_n) - B(\lambda_n) &= \sum_{\nu=0}^{n+r-1} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)(s_{n+r} - s_\nu) \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{n-1} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)(s_n - s_\nu) \\ &= \lambda_n (s_{n+r} - s_n) + \sum_{\nu=n}^{n+r-1} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)(s_{n+r} - s_\nu) \end{aligned} \tag{38'}$$

where

$$\lambda_{n+r} \leqq (1+\delta)\lambda_n < \lambda_{n+r+1}.$$

With these two formulae we can prove as in (42) that

$$\underset{n \to \infty}{\underline{\mathrm{Lim}}} \frac{B(\lambda_n)}{\lambda_n} > -\infty = -\wedge \tag{42}$$

and then that $\wedge = 0$ as in (47).

(Eingegangen am 20. August 1938.)

Zur Werteverteilung einer Klasse transzendenter Funktionen.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In seiner fundamentalen Abhandlung [1]) in der Acta Mathematica aus dem Jahre 1935 untersuchte Ahlfors im Anschluß an seine topologisch-metrische Theorie der Überlagerungsflächen eine spezielle Klasse von meromorphen Funktionen, deren Riemannsche Flächen die Eigenschaft besitzen, daß ihre sämtlichen Windungs- und Grenzpunkte über endlich vielen Grundpunkten $a_1, a_2, \ldots, a_q$ liegen.

Diese Funktionen haben unter anderen, wie dies von Ahlfors gezeigt wurde, die Eigenschaft, eine gewisse Regelmäßigkeit bei der Verteilung der Wurzeln der Gleichung $w(z) - a = 0$ aufzuweisen; und zwar ist die Anzahlfunktion $n(r, a)$ im allgemeinen von der Größenordnung $S(r, w)$, wenn r außerhalb der bekannten Ausnahmeintervalle liegt [2]).

Genauer gilt folgendes:

Ist $a \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ und bezeichnet $L(r)$ die Länge (in der üblichen sphärischen Metrik) des Randes der Näherungsfläche F_r, so gilt:

$$|S(r, w) - n(r, a)| \leqq h\, L(r) + 2, \tag{1. 1}$$

wobei h eine positive Konstante ist.

Nun kann man eine ähnliche Ungleichung beweisen, wenn die Funktion $w(z)$ eine ganze transzendente Funktion von der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ ist, und a eine beliebige endliche Zahl bedeutet. Die so erhaltenen Resultate sind insofern schärfer als diejenigen, die aus dem Wimanschen Satz erhalten werden können [3]), da hier die Aussagen sich direkt auf die Anzahlfunktion $n(r, a)$ und nicht auf den Mittelwert $N(r, a)$ beziehen.

Zum Beweis der Hauptungleichung (1. 1) benutze ich eine Verschärfung des Wimanschen Satzes, die ich mit Hilfe einer Formel von Beurling beweise, und eine Abschätzung eines bestimmten Ausdruckes nach oben. Die Intervalle, in denen (1. 1) nicht gilt, können zwar eine unendliche logarithmische

[1]) Ahlfors, Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta Math. 65 (1935), S. 157 bis 194.

[2]) Zur Begriffsbildung vgl. man entweder: Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin, Julius Springer, 1936, oder die vorstehend zitierte Arbeit von Ahlfors.

[3]) Vgl. R. Nevanlinna, Über den Picard-Borelschen Satz in der Theorie der ganzen Funktionen, Acta Soc. Sci. Fenn. 23, Nr. 5, 1924.

Länge aufweisen, jedoch haben sie eine obere logarithmische Dichte $\overline{\mu}_l \leqq 2\,\varrho$, so daß (1. 1) auf eine Punktmenge mit unterer logarithmischer Dichte $\mu_l \geqq 1 - 2\,\varrho > 0$ gilt. Dagegen fällt die Bedingung, daß die Riemannsche Fläche von $w(z)$ nur über der Stelle $a = \infty$ algebraische Windungspunkte aufweisen darf, fort.

2. Eine Formel von Beurling. Es sei $w = w(z)$ eine in $|z| \leqq R$ [4]) reguläre analytische Funktion von z, und es sei $|w(z)| \leqq M(R) = M$ für $|z| = R$. Es sei ferner $\mu(r)$ das Minimum von $|w|$ auf dem Kreise $|z| = r < R$. Die Menge $E(\xi, R)$, die aus denjenigen Punkten des Intervalls (ξ, R) besteht, für welche die Ungleichung $\mu(r) = \mu$ mit festem $\mu > 0$ gilt, ist aus endlich vielen Intervallen J gebildet. Es fragt sich, ob es eine obere Schranke für $|w|$ gibt, die nur von M, μ und der Verteilung der Intervalle J abhängt. Für den Fall, wo $E(\xi, R)$ aus der ganzen Strecke (ξ, R) besteht, wurde das Problem zuerst von Milloux [5]) (bis auf die genaue Konstante) gelöst, aber erst Beurling [6]) und Nevanlinna [7]) haben den allgemeinen Fall vollständig beantwortet. Insbesondere hat Beurling eine Formel angegeben, die, wenn man sie auf ganze transzendente Funktionen von der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ anwendet, unmittelbar zu einem wichtigen Satz aus dem Wimanschen Ideenkreis führt.

Setzen wir

$$m_l E_{(r,R)} = \int_r^R \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \tag{2. 1}$$

wobei $\varphi(x)$ die charakteristische Funktion [8]) der Menge $E_{(r,R)}$ bedeutet, die aus denjenigen Punkten des Intervalls (r, R) besteht, für die

$$\mu(r) = \operatorname*{Min}_{|z|=r} |w| \leqq \mu$$

ist, so lautet die Beurlingsche Formel [9])

$$|w(z)| \leqq \mu \left(\frac{M}{\mu}\right)^{2\,e^{-\frac{1}{2} m_l E_{(r,R)}}} \tag{2. 2}$$

---

[4]) Beurling verlangt, daß $w(z)$ nur in $|z| < R$ regulär ist.

[5]) Milloux, Le théoreme de M. Picard, suites des fonctions holomorphes, fonctions meromorphes et fonctions entieres, Journal de mathemathiques pures et appliquées, Ser. 9, 3 (1924), S. 345—481, insbesondere S. 348. Ferner: Milloux, Sur le théoreme de Picard, Bull. de la Soc. Math. de France **53** (1925), S. 181—207, insbesondere S. 182.

[6]) Beurling, Études sur un problème de majoration, Thèse de Upsal, 1933, S. 94.

[7]) Nevanlinna, Über eine Minimumaufgabe in der Theorie der konformen Abbildungen, Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1933, S. 103—115.

[8]) $\varphi(x)$ ist also gleich Eins auf dieser Menge und sonst Null.

[9]) Beurling bewies eine noch schärfere Formel, von der wir aber keinen Gebrauch machen werden.

für alle $|z| \leqq r < R$. Wir werden im folgenden diese Formel auf ganze Funktionen von der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ anwenden. Dazu führen wir zuerst die Dichtebegriffe ein. Wir schreiben

$$\mu_l(r) = \frac{m_l E_{(r_0, R)}}{\log r} \qquad (r_0 > 1, \text{ fest}) \tag{2.3}$$

und nennen

$$\underline{\mu}_l = \varliminf_{r \to \infty} \mu(r) \quad \text{bzw.} \quad \overline{\mu}_l = \overline{\lim_{r \to \infty}}\, \mu(r) \tag{2.4}$$

die untere (bzw. obere) logarithmische Dichte der Menge E, wobei $E = \lim_{r \to \infty} E_{(r_0, R)}$ ist.

Aus (2.2) folgt nun mit Rücksicht auf (2.3) und $\mu \geqq 1$

$$\log |w(z)| \leqq 2 \log M(R) \cdot R^{-\frac{1}{2}\mu_l(R)}, \tag{2.5}$$

also, wenn man ein $z = z_0$ wählt mit $|w(z_0)| > e$,

$$\varlimsup_{R \to \infty} \frac{\log M(R)}{R^{\frac{1}{2}\mu_l(R)}} > 0. \tag{2.6}$$

Aus dieser letzten Bedingung folgt unmittelbar, daß $\overline{\mu}_l \leqq 2\varrho$ sein muß. Bezeichnen wir mit E_c die zu E komplementäre Menge (relativ zu E), so gilt für die untere logarithmische Dichte $\underline{\mu}_l^c$ dieser Menge, wegen $\underline{\mu}_l^c + \overline{\mu}_l = 1$ die Ungleichung

$$\underline{\mu}_l^c \geqq 1 - 2\varrho > 0. \tag{2.7}$$

Von dieser letzten Tatsache wird unmittelbar Gebrauch gemacht.

3. Nach diesen vorbereitenden Tatsachen betrachten wir die Funktion $w(z)$ im Kreise $|z| \leqq r$. Bezeichnet dann allgemein $n(r, a)$ die Anzahl der Wurzeln von $w(z) - a$ in diesem Kreise und ist

$$[w, a] = \frac{|w - a|}{\sqrt{1 + |a|^2}\,\sqrt{1 + |w|^2}},$$

so gilt [10])

$$S(r, w) = n(r, a) + \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{[w, a]}\, d\varphi, \tag{3.1}$$

wobei $S(r, w)$ die bekannte Ahlforssche Charakteristik darstellt. Es sei nun E die Menge $r \geqq e$, für welche $\max_{|z| = r} |w(z)| > 1$ gilt, und a eine endliche Zahl.

Es ist für jeden Punkt r von E, wenn $w = u + iv$ und $a = \alpha + i\beta$ gesetzt wird.

$$\frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{[w, a]} = \frac{(u - \alpha)\, u_r + (v - \beta)\, v_r}{(1 + |w|^2)\, |w|^2} + \frac{\alpha u_r + \beta v_r}{1 + |w|^2},$$

[10]) Vgl. z. B. Ahlfors, Über eine neue Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen, Comment. Phys.-Math., 8., 1935.

also mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w,a]}\right| \leqq \frac{|w-a|\,|w'|}{|w|^2\,(1+|w|^2)} + \frac{|a|\,|w'|}{1+|w|^2},$$

d. h. wegen $|w| \geqq 1$

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w,a]}\right| \leqq C(a)\,\frac{|w'|}{1+|w|^2},$$

wobei $C(a)$ von a abhängt.

Für die Randlänge $L(r)$ des Riemannschen Stückes F_r in der sphärischen Metrik gilt nun

$$L(r) = r\int_0^{2\pi}\frac{|w'|}{1+|w|^2}\,d\varphi.$$

Trägt man dieses Resultat in (3. 1) ein, so wird unter Berücksichtigung von (3. 2)

$$|S(r,w) - n(r,a)| \leqq C(a)\,L(r)$$

oder

$$S(r,w) = n(r,a) + O(L(r)). \tag{3. 4}$$

Die asymptotische Gleichung (3. 4) gilt nach dem früher Gesagten auf einer Menge E, deren logarithmische Dichte $\underline{\mu}_l \geqq 1 - 2\varrho$ ist. Wegen $\varrho < \frac{1}{2}$ ist also $\underline{\mu}_l > 0$ und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 11. November 1938.)

Zur Zahlengeometrie in den total reellen kubischen Körpern.

Von

G. Bullig in Hamburg.

§ 1.

Einleitung. Erklärung der Grundbegriffe.

In den total reellen kubischen Körpern läßt sich ein Verfahren definieren, elches — ähnlich wie das Kettenbruchverfahren in den reellen quadratischen örpern — ein System von Grundeinheiten zu berechnen gestattet[1]): In nem beliebig vorgegebenen dreigliedrigen Modul $\mathfrak{R}$ von Vektoren, deren oordinaten bzw. den reellen kubischen Körpern K_1, K_2, K_3 angehören, wird e Teilmenge $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}$ aller *Minima* definiert; das sind solche Vektoren $= (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, für welche die Ungleichungen $|\xi_i| < |\mu_i|$ $(i = 1, 2, 3)$ in on $(0, 0, 0)$ verschiedenen Modulelementen $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ unlösbar sind. ie Elemente $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}+}$ — d. i. die Menge aller Minima mit positiver dritter oordinate —, werden in Zusammenhang gebracht, indem zu jedem solchen $\mathfrak{m}$ vei Nachfolger $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ bestimmt werden, die wiederum Elemente von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}+}$ nd. Fügt man zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}+}$ alle Paare $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2)$ hinzu, so entsteht ein treckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$, dessen topologische Eigenschaften u. a. die Be-immung eines Systems von Grundeinheiten der Ordnung von $\mathfrak{R}$ ermöglichen gl. *H*, Satz 21).

Im folgenden wird die Kenntnis der Theorie von *H* vorausgesetzt; an nigen Stellen wird auf die in Frage kommenden Sätze von *H* verwiesen.

Die Nachfolger lassen sich zahlengeometrisch definieren, wenn man die lemente von $\mathfrak{R}$ in bekannter Weise auf die Punkte eines Gitters im drei-mensionalen Cartesischen Raum abbildet. In dieser Definition sind die chsen des Koordinatensystems nicht gleichberechtigt. Es entsteht daher die rage, welche Paare von Nachfolgern und welchen Streckenkomplex wir er-alten, wenn wir die Achsen permutieren. Es stellt sich heraus, daß diese treckenkomplexe unabhängig von der zahlengeometrischen Definition (bis ufs Vorzeichen ihrer Elemente) topologisch bestimmt werden können, sofern e Struktur von $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$ bekannt ist. Dies soll im folgenden bewiesen werden.

Vorerst wird der wichtige Satz bewiesen, daß der Streckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$ nter Erfüllung einer Zusatzbedingung in die Ebene eingebettet werden kann.

[1]) Vgl. hierzu: G. Bullig, Ein periodisches Verfahren usw., Abhandl. a. d. Mathem. m. Hamburg, Bd. 12, Heft 3/4; im folgenden bezeichnet mit *H*.

Dieser Satz wird für die Ableitung des ebengenannten topologischen Satzes verwendet; außerdem ist ein Graph des $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$ für die praktische Durchführung dieser topologischen Konstruktionen von Wert.

Sei i eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3. Sei $\mathfrak{m}$ ein beliebig vorgegebenes Minimum. Mit $\mathfrak{r}_i(\mathfrak{m}) = (\varrho_{i1}(\mathfrak{m}), \varrho_{i2}(\mathfrak{m}), \varrho_{i3}(\mathfrak{m}))$ bezeichnen wir denjenigen Gitterpunkt, der von allen im Quader

$$x_i > 0, \quad |x_k| < |\mu_k|, \quad |x_l| < |\mu_l|$$

liegenden Gitterpunkten die kleinste Distanz von der $x_k x_l$-Ebene hat. Hierbei sind k, l unter den Zahlen 1, 2, 3 die von i verschiedenen.

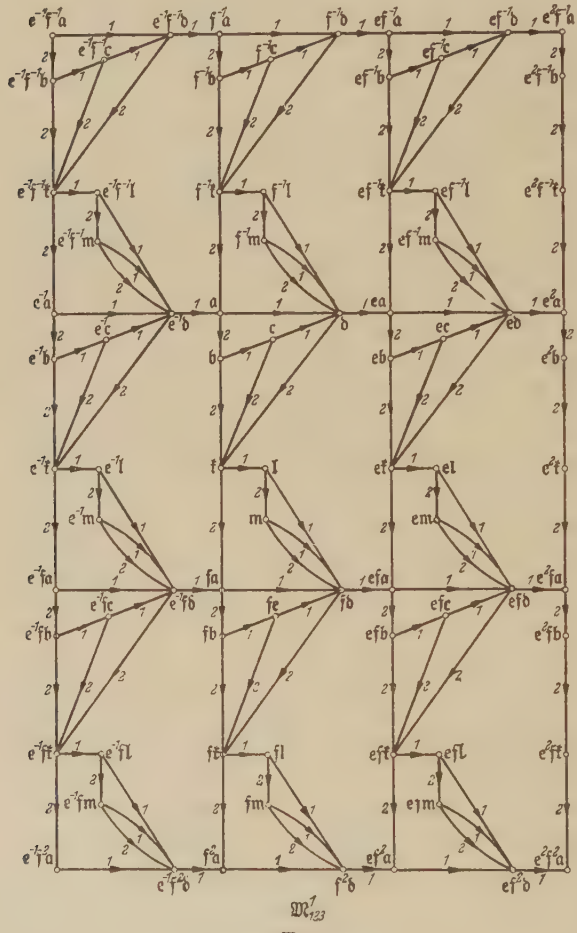


Fig. 1.

Sei (i, l) eines der Paare (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 1), (1, 3). Mit $\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m})$ bezeichnen wir denjenigen Gitterpunkt, der von allen im Quader

$$Q_{il}(\mathfrak{m}): \ |x_i| < \varrho_{ii}(\mathfrak{m}), \quad |x_k| < |\mu_k|, \quad x_l > 0$$

liegenden Gitterpunkten die kleinste Distanz von der $x_i x_k$-Ebene hat. Hierbei ist k unter den Zahlen 1, 2, 3 die von i, l verschiedene.

$\mathfrak{r}_i(\mathfrak{m})$ ist durch Vorgabe von i, $\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m})$ durch Vorgabe von (i, l) eindeutig bestimmt; beide Gitterpunkte sind Minima.

Sei i, k, l durch Permutation aus 1, 2, 3 hervorgegangen. Wir nennen $(\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m}), \mathfrak{s}_{kl}(\mathfrak{m}))$ das zum Tripel (i, k, l) gehörige Nachfolgerpaar von $\mathfrak{m}$, und zwar $\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m})$ den 1-Nachfolger, $\mathfrak{s}_{kl}(\mathfrak{m})$ den 2-Nachfolger. Für $i = 1$, $k = 2$, $l = 3$ ergibt sich das in H definierte Nachfolgerpaar. Insgesamt haben wir zu einem Minimum 6 Nachfolgerpaare, von denen je zwei mit gleichem Index l durch Vertauschung ihrer Elemente auseinander hervorgehen.

Der Streckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ bestehe aus Eckpunkten, die eineindeutig en Minima $\mathfrak{m}$ mit positiver l-ter Koordinate zugeordnet sind, ferner aus trecken $(\mathfrak{m}, \mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m}))$, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{s}_{kl}(\mathfrak{m}))$, die die geometrische Konstruktion des um Tripel (i, k, l) gehörigen 1- bzw. 2-Nachfolgers von $\mathfrak{m}$ symbolisieren. edem Übergang $\mathfrak{m} \to \mathfrak{s}_{rl}(\mathfrak{m})$ $(r = i, k)$ entspricht genau eine Strecke des $\mathfrak{R}^1_{ikl}$. $\mathfrak{m}$ heißt Anfangsunkt, $\mathfrak{s}_{rl}(\mathfrak{m})$ Endpunkt er Strecke $(\mathfrak{m}, \mathfrak{s}_{rl}(\mathfrak{m}))$. uf diese Weise sind 6 erschiedene Streckenomplexe definiert, von enen je zwei, deren Inextripel im dritten Eleent übereinstimmen, urch Vertauschung der lemente aller Nachlgerpaare auseinander ervorgehen.

In den Fig. 1 bis 3 ind Teilgraphen solcher treckenkomplexe, und war der Komplexe $\mathfrak{M}^1_{123}$, $\mathfrak{M}^1_{312}$, $\mathfrak{M}^1_{231}$ geeben; ihre Eckpunkte tellen Minima des Moduls mit der Basis (1,1,1), $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$), $(\vartheta_1^2, \vartheta_2^2, \vartheta_3^2)$ ar, wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 die Vurzeln der Gleichung $^3 - 7\,\vartheta + 2 = 0$ sind, $_1 = -2{,}7785$, $\vartheta_2 = -2{,}4893$, $\vartheta_3 = +0{,}2892$. ede Strecke $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ist it einem nach dem ndpunkt $\mathfrak{n}$ weisenden feil versehen. Die beifügte Ziffer gibt an, mit welchem seiner Nachfolger der Punkt $\mathfrak{m}$ urch $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ verbunden wird. Die Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ sind Grundeinheiten der rdnung von $\mathfrak{R}$. Die Konstruktion dieser Graphen in der Ebene erfolgte urch Aneinanderlegen von Fundamentalbereichen, wie noch erörtert werden ird.

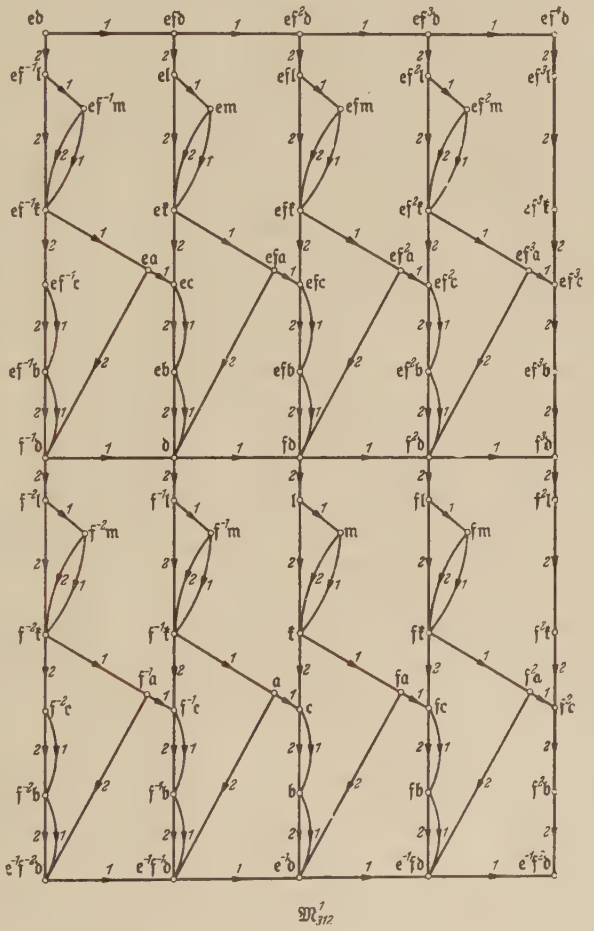


Fig. 2.

Die in den Figuren gleichbezeichneten Eckpunkte entsprechen Minima, die bis aufs Vorzeichen miteinander übereinstimmen. Ein Minimum des Komplexes $\mathfrak{M}^1_{123}$, dessen 3. Koordinate also positiv, dessen 2. Koordinate aber z. B. negativ ist, kann in $\mathfrak{M}^1_{312}$ nicht enthalten sein. In $\mathfrak{M}^1_{312}$ ist aber $-\mathfrak{m}$ enthalten.

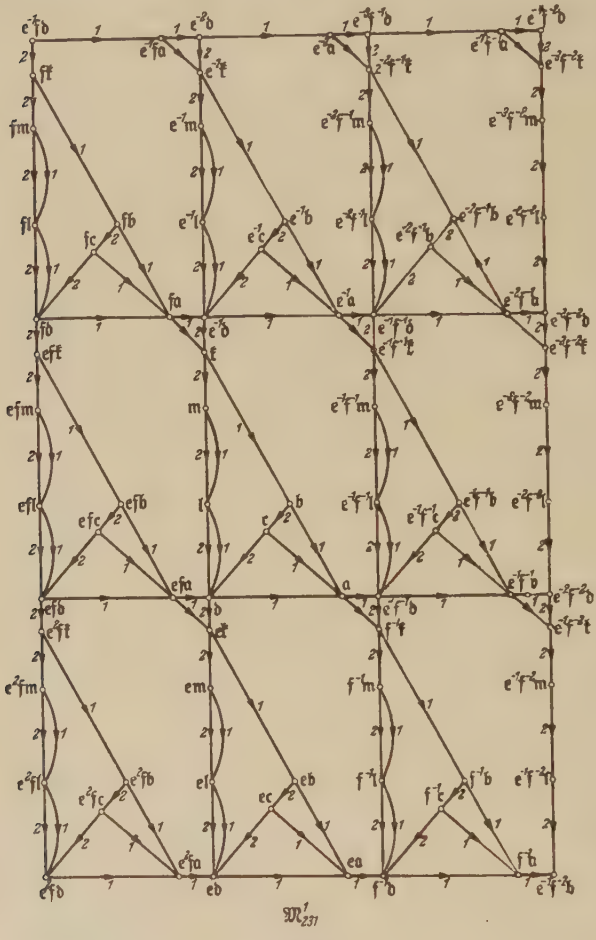


Fig. 3.

Wende ich auf die Indizes eines $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ eine Permutation P an („permutiere ich $\mathfrak{M}^1_{ikl}$"), so wird $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ abgebildet auf einen Komplex $\mathfrak{M}^1_{i_1 k_1 l_1} = P\mathfrak{M}^1_{ikl}$. Wenn wir zeigen, daß der Komplex $P\mathfrak{M}^1_{123}$ aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ topologisch ermittelt werden kann, so ist die gleiche topologische Konstruktion offenbar auf einen beliebigen der Streckenkomplexe $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ anwendbar und liefert den Streckenkomplex $P\mathfrak{M}_{ikl}$. Es genügt somit zu beweisen, daß die Komplexe $\mathfrak{M}^1_{213}$ und $\mathfrak{M}^1_{312}$ topologisch aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ bestimmt werden können; denn die Permutationen (1,2), (1,2,3) erzeugen die symmetrische Gruppe S_3.

Die topologische Bestimmung von $\mathfrak{M}^1_{213}$ aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ ist uns schon bekannt: sie beruht auf Vertauschung der Elemente aller Nachfolgerpaare im Komplex $\mathfrak{M}^1_{123}$.

Ehe wir aber an die Konstruktion von $\mathfrak{M}^1_{312}$ gehen können, sind eine Reihe von Vorbereitungen notwendig.

Wir wollen dazu in die Bezeichnungsweise von H übergehen. Wir schreiben also $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}^+}$ für $\mathfrak{M}^1_{123}$, $Q_1(\mathfrak{m})$ für $Q_{13}(\mathfrak{m})$, $Q_2(\mathfrak{m})$ für $Q_{23}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{s}_{13}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{s}_{23}(\mathfrak{m})$.

Der 2-Nachfolger von $\mathfrak{m}_1$ wird mit $\mathfrak{m}_{12}$, allgemein der i_k-Nachfolger eines lementes $\mathfrak{m}_{i_1 \dots i_{k-1}}$ mit $\mathfrak{m}_{i_1 \dots i_k}$ bezeichnet. Die Gesamtheit der Gitterunkte, die mit einem Minimum $\mathfrak{m}_{i_1 \dots i_k}$ gleich sind, heißt $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$, die olge $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_{11}, \dots \mathfrak{K}_1(\mathfrak{m})$, die Folge $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{22}, \dots \mathfrak{K}_2(\mathfrak{m})$ (*H*, S. 384).

Das in der Folge $\mathfrak{K}_r(\mathfrak{m})$ $(r = 1, 2)$ einem Element $\mathfrak{l}$ vorangehende Element eiße „$\mathfrak{l}$. Diese Bezeichnung hat nur dann einen Sinn, wenn die Kette $\mathfrak{K}_r(\mathfrak{m})$ orgegeben ist. Es kann nämlich mehrere Ketten geben, die dasselbe Element $\mathfrak{l}$ thalten. Im folgenden ergibt sich meist von selbst, welche Kette gerade emeint ist, so daß sie nicht in jedem Fall genannt zu werden braucht.

Erweitern wir den Komplex $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$, indem wir jede Strecke hinzufügen, e ein Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$ mit einem seiner Nachfolger verbindet, so erhalten ir den Streckenkomplex $\mathfrak{K}^1(\mathfrak{m})$. Durch eine entsprechende Erweiterung halten wir $\mathfrak{K}_1^1(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{K}_2^1(\mathfrak{m})$ aus $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{m})$.

Nach *H*, Satz 9 haben die Folgen $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{m}_1)$, $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{m}_2)$ mindestens ein Element emein; das erste Element, das die eine Folge mit der anderen gemein hat, t identisch mit dem ersten Element, das die zweite mit der ersten gemein at; dieses Element heißt $\mathfrak{m}_0$; danach gibt es in $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{K}+}$ geschlossene Teilomplexe, die aus den Elementen

$$\mathfrak{m},\ (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1),\ \mathfrak{m}_1,\ (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_{12}),\ \mathfrak{m}_{12},\ (\mathfrak{m}_{12}, \mathfrak{m}_{122}),\ \dots,\ ({}_2\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$$
$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2),\ \mathfrak{m}_2,\ (\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{21}),\ \mathfrak{m}_{21},\ (\mathfrak{m}_{21}, \mathfrak{m}_{211}),\ \dots,\ ({}_1\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0),\ \mathfrak{m}_0$$

estehen, und zwar zu jedem Element $\mathfrak{m}$ einen solchen Komplex. Die Fälle

a) $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$, b) $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_0 \quad \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$,

c) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_0 \quad \mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$, d) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$

nd, wie Fig. 1 zeigt, alle möglich. Wir können danach 4 Typen von Komexen (1) unterscheiden, von denen je ein Beispiel durch einen Graphen in g. 4 a bis d dargestellt wird.

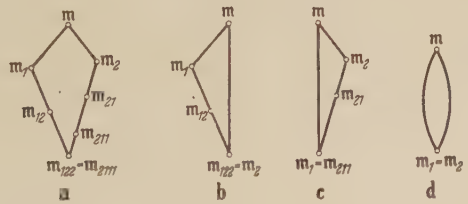


Fig. 4.

Definition. Der durch (1) definierte Komplex heiße der zu $\mathfrak{m}$ gehörige ementarkomplex, $\mathfrak{m}$ sein Hauptpunkt, $\mathfrak{m}_0$ sein Gegenpunkt.

1. Satz. *Der Streckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{K}+}$ kann so in die Ebene gelegt werden, ß seine Eckpunkte, seine Strecken und die von seinen Elementarkomplexen beenzten Gebiete die Ebene lückenlos und einfach überdecken.*

Fig. 1 bis 3 sind Beispiele solcher Abbildungen in die Ebene.

„Einen Streckenkomplex in die Ebene legen" heißt im folgenden: Eine Abbildung angeben, die jedem Eckpunkt P des Komplexes eineindeutig einen Punkt P^* der Euklidischen Ebene E zuordnet, jeder Strecke (P_1, P_2) des Komplexes einen offenen Jordanbogen in E, der die Punkte P_1^*, P_2^* als Begrenzungspunkte besitzt. Dabei darf kein Jordanbogen (P_1^*, P_2^*) den Bildpunkt P^* eines Eckpunktes enthalten, noch einen Punkt mit dem Bild einer von (P_1, P_2) verschiedenen Strecke gemein haben.

Hierzu ist folgendes zu bemerken: Betrachten wir zwei Strecken $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2)$ des $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}^+}$ mit $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ (wie in H, Einleitung) als gleich, so läßt sich der Komplex vermutlich sogar geradlinig in die Ebene legen: Für das Bild einer Strecke (P_1, P_2) kann *stets* die offene Verbindungsstrecke der Punkte P_1^*, P_2^* genommen werden. Nun stellt sich aber bei dem Studium der permutierten Komplexe heraus, daß die Elementarkomplexe vom Typus der Fig. 4d gegenüber den anderen keine Sonderrolle spielen. Ferner ist bei Zulassung von Jordanbögen die Konstruktion eines Graphen eine viel einfachere.

§ 2.

Kombinatorische Vorbereitungen für die Konstruktion des Graphen.

Wir betrachten jetzt Teilkomplexe von allgemeinerem Typ als die Elementarkomplexe. $\mathfrak{g}$ gehöre zu $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{a})$. $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}$ seien $\neq \mathfrak{a}$. Die Folgen $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{p})$ sollen ein Element gemein haben. Sei $\mathfrak{l}$ in beiden Folgen das erste Element dieser Eigenschaft. (Dieses existiert wegen H, Hilfssatz 6.) Die Mengen $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{p}) - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g}) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l}$ sollen paarweise elementefremd sein. Dann gibt es einen geschlossenen Komplex, der aus den Elementen der Mengen $\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{g}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l}$, also aus den Elementen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{a},\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1),\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),\ \mathfrak{g},\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2),\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \\ &(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2),\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{p}, \mathfrak{p}),\ \mathfrak{p},\ (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1),\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{l}, \mathfrak{l}),\ \mathfrak{l} \end{aligned}$$

besteht. Der so definierte Komplex heiße $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, $\mathfrak{a}$ der *Hauptpunkt* des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$. Seine Eckpunkte sind paarweise verschieden. Wir nennen die Elemente

$$(3_1) \qquad \mathfrak{a},\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1),\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \qquad (\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{g}))$$

die *erste Seite* des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, die Elemente

$$(3_2) \qquad \mathfrak{a},\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2),\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \qquad (\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{p}))$$

die *zweite*,

$$(3_3) \qquad \mathfrak{g},\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2),\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \text{ und } \mathfrak{l} \text{ im Falle } \mathfrak{l} \neq \mathfrak{g} \quad (\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{g}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l}),$$

die *dritte*,

$$(3_4) \qquad \mathfrak{p},\ (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1),\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \text{ und } \mathfrak{l} \text{ im Falle } \mathfrak{l} \neq \mathfrak{p} \quad (\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l})$$

ie *vierte*. Ist $g = l$, so besteht die 3. Seite nur aus einem Eckpunkt, ist $= l$, so gilt das gleiche für die 4. Seite. Ist $g = p = l$, so bestehen 3. und . Seite aus demselben Eckpunkt.

In Fig. 5 a bis d sind Beispiele von Graphen geeigneter $Z(a, g, p)$ iedergegeben. Im Falle a) ist $l \neq g$, $l \neq p$. im Falle b) $l \neq g$, $l = p$, im alle c) $l = g$, $l \neq p$, im Falle d) $l = g$, $l = p$. Diese Fälle entsprechen den n Fig. 4 dargestellten. Jeder Elementarkomplex ist ja ein $Z(a, g, p)$, in elchem $g = a_1$, $p = a_2$, $l = m_0$ gilt.

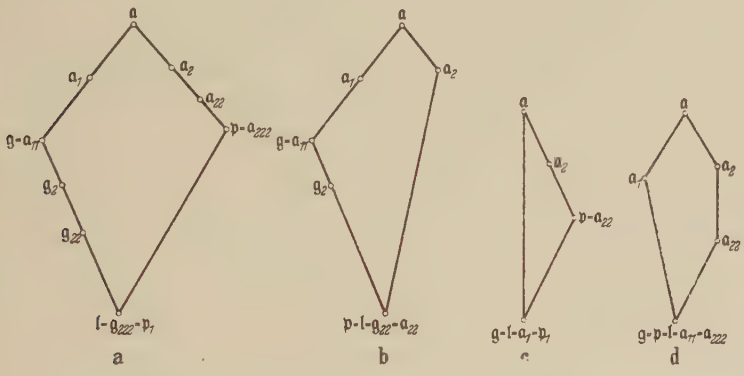


Fig. 5.

(A) Auch die Strecken des $Z(a, g, p)$ sind paarweise verschieden.

Beweis. Jeder seiner Eckpunkte (mit Ausnahme von a) ist in Z nfangspunkt höchstens *einer* Strecke; und a_1 ist $\neq a_2$ nach Voraussetzung.

(B) Die Eckpunkte der 1. und 2. Seite des $Z(a, g, p)$ gehören zu $\mathfrak{R}(a)$, aber nicht zu $\mathfrak{R}(g)$ oder $\mathfrak{R}(p)$. (Die entsprechende Behauptung gilt für die Strecken.)

Beweis. Ein Element m der 1. Seite (insbesondere $m = a$) gehört (g) nicht an. Denn wir haben $m \neq g$ und $\mathfrak{R}(g) \subset \mathfrak{R}(m)$, die dritte Kordinate aller Elemente von $\mathfrak{R}(g)$ ist also nach H, Hilfssatz 7 größer als e von m.

a gehört auch $\mathfrak{R}(p)$ nicht an, denn es gilt $p \neq a$ und $\mathfrak{R}(p) \subset \mathfrak{R}(a)$. ei $a_1 \neq g$, also Element der 1. Seite. Wäre a_1 Element von $\mathfrak{R}(p)$. so müßte nach H, Satz 18 Element der 4. Seite des Z sein, im Widerspruch dazu, aß die Eckpunkte von $Z(a, g, p)$ paarweise verschieden sind. Also gehört a_1 cht zu $\mathfrak{R}(p)$. Den gleichen Schluß wenden wir nun auf alle eventuellen eiteren Elemente der 1. Seite an.

Der Beweis für die Elemente der 2. Seite verläuft entsprechend.

Die Menge aller Elemente von $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$, die weder zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ noch zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ gehören, nennen wir im folgenden $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$; die Menge aller Elemente von $\mathfrak{R}^1(\mathfrak{a})$, die weder zu $\mathfrak{R}^1(\mathfrak{g})$ noch zu $\mathfrak{R}^1(\mathfrak{p})$ gehören, heiße $\mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$.

(C) $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ enthält nur endlich viele Elemente.

Beweis. Die Elemente von $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ seien mit $\mathfrak{d} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ bezeichnet. $\mathfrak{a}$ ist wegen $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ ein $\mathfrak{d}$ (Benutzung von *H*, Hilfssatz 6).

Nach *H*, Satz 15 liegen alle von $\mathfrak{a}$ verschiedenen Elemente $\mathfrak{d}$ in den endlich vielen Quadern

$$(4) \qquad Q_1(\mathfrak{a}),\ Q_1(\mathfrak{a}_1),\ \ldots,\ Q_1({}_1\mathfrak{g});\quad Q_2(\mathfrak{a}),\ Q_2(\mathfrak{a}_2),\ Q_2(\mathfrak{a}_{22}),\ \ldots,\ Q_2({}_2\mathfrak{p}).$$

Sei $\mathfrak{r}_k(\mathfrak{m}) = (\varrho_{k1}(\mathfrak{m}),\ \varrho_{k2}(\mathfrak{m}),\ \varrho_{k3}(\mathfrak{m}))$ (vgl. S. 512). Sei $\mathfrak{g} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Aus $0 < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}) \leqq \varrho_{11}(\mathfrak{g})$ (*H*, Hilfssatz 7) folgt, daß der Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}), \quad |x_2| < |\gamma_2|, \quad x_3 > 0$$

in $Q_1(\mathfrak{g})$ enthalten ist.

Ebenso folgt für $\mathfrak{p} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, daß der Quader

$$|x_1| < |\pi_1|, \quad |x_2| < \varrho_{22}({}_2\mathfrak{p}), \quad x_3 > 0$$

in $Q_2(\mathfrak{p})$ enthalten ist.

Da alle $\mathfrak{d}$ in (4) liegen, folgen aus *H*, Hilfssatz 7 die Ungleichungen

$$|\delta_1| < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}), \quad |\delta_2| < \varrho_{22}({}_2\mathfrak{p}).$$

Mit Rücksicht auf *H*, Hilfssatz 9 gilt also

$$|\delta_1| > |\pi_1|, \quad |\delta_2| > |\gamma_2|.$$

Insgesamt haben wir

$$|\pi_1| < |\delta_1| < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}), \quad |\gamma_2| < |\delta_2| < \varrho_{22}({}_2\mathfrak{p}), \quad \delta_3 > 0.$$

Die $\mathfrak{d}$ liegen also in einem Bereich, dessen Projektion auf die x_1x_2-Achse endlich ist. Gäbe es unendlich viele $\mathfrak{d}$, so hätten ihre Projektionen einen Häufungspunkt; es wären also unter ihnen zwei, $\mathfrak{d}' = (\delta_1', \delta_2', \delta_3')$ und $\mathfrak{d}'' = (\delta_1'', \delta_2'', \delta_3'')$, mit

$$|\delta_1'' - \delta_1'| < |\pi_1|, \qquad |\delta_2'' - \delta_2'| < |\gamma_2|.$$

Wir denken uns die zwei so geordnet, daß $\delta_3'' > \delta_3'$ ist. Für die Differenz $\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'$ gälten dann die Ungleichungen

$$|\delta_1'' - \delta_1'| < |\pi_1| < |\delta_1''|, \qquad |\delta_2'' - \delta_2'| < |\gamma_2| < |\delta_2''|, \qquad 0 < \delta_3'' - \delta_3' < \delta_3'';$$

das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{d}''$ Minimum ist. Damit ist (C) bewiesen.

Wir nehmen jetzt irgendein Element $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$ der 1. oder 2. Seite des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ (sofern vorhanden). Von den Strecken $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1')$, $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_2')$ ist nur eine in $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ enthalten. Liegt $\mathfrak{a}'$ auf der 1. Seite, so ist es die Strecke $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1')$, liegt $\mathfrak{a}'$ auf der 2. Seite, die Strecke $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_2')$. Sei etwa die Strecke

$\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_k)$ in $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ *nicht* enthalten. Wir bilden die Folge $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ bis zu dem rsten von $\mathfrak{a}'$ verschiedenen Eckpunkt $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, der mit einem Eckpunkt von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ gleich ist. Dieser Eckpunkt existiert wegen (B), (C), *H*, Satz 18. s gilt:

(D) Existiert ein Element $\mathfrak{a}'$, das mit $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ derselben Seite des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ angehört, so existiert auch ein $\mathfrak{a}'$, das diese Eigenschaft *nicht* hat.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}'$ ein Element, welches auf der gleichen Seite liegt wie $(\mathfrak{a}')$. Wir bestimmen in $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ das erste Element $\mathfrak{q}^{**}$, welches der 3. oder . Seite angehört. $\mathfrak{q}^{**}$ existiert wegen (B), (C), *H*, Satz 18. In $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ gibt s ein $\mathfrak{q}^{**}$ voraufgehendes Element, welches mit $\mathfrak{a}'$ auf der gleichen Seite liegt, ämlich $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$. Sei $\mathfrak{q}^*$ unter den $\mathfrak{q}^{**}$ voraufgehenden Elementen der $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ as *letzte* mit dieser Eigenschaft. Dann gilt $\mathfrak{q}(\mathfrak{q}^*) = \mathfrak{q}^{**}$, womit (D) bewiesen t. Es folgt

Die Teilung (Zerlegung) des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$.

$\mathfrak{a}', \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ mögen nicht auf der gleichen Seite des Z liegen. Wir erweitern Z urch Hinzufügen der Elemente der Menge $\mathfrak{R}_k^1(\mathfrak{a}') - \mathfrak{R}_k^1(\mathfrak{q}(\mathfrak{a}'))) - \mathfrak{a}'$, also er Elemente

$$W(\mathfrak{a}'): \quad (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_k),\ \mathfrak{a}'_k,\ (\mathfrak{a}'_k, \mathfrak{a}'_{kk}),\ \ldots,\ (_k\mathfrak{q}(\mathfrak{a}'), \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')).$$

Der aus den Elementen von Z und W bestehende Komplex heiße Φ_1.

(E) Die Elemente des Φ_1 sind paarweise verschieden.

Beweis. Daß die Eckpunkte von W paarweise verschieden sind, folgt us *H*, Hilfssatz 6. $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_k)$ ist in Z nicht enthalten, wie oben schon bemerkt urde. Ist bereits $\mathfrak{a}'_k = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, so sind wir fertig. Ist $\mathfrak{a}'_k \neq \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, so ist $\mathfrak{a}'_k$ ach Konstruktion in Z nicht enthalten, also auch nicht $(\mathfrak{a}'_k, \mathfrak{a}'_{kk})$. So önnen wir weiterschließen.

Aus der Konstruktion von Φ_1 und aus (E) folgt nun, daß Φ_1 zwei Komlexe Z_1, Z_2 vom Typus des Z enthält derart, daß jedes Element von Φ_1 n wenigstens einem der Z_i $(i = 1, 2)$ enthalten ist. Um das zu zeigen, definieren wir im Falle

$k = 1$: α) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 1. Seite des Z liegt,

$$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}'), \quad \mathfrak{p}^1 = \mathfrak{a}',$$
$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p};$$

β) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 3. Seite des Z liegt,

$$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p}^1 = \mathfrak{a}',$$
$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}'), \quad \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p};$$

γ) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 4. Seite des Z liegt, ebenso wie im Fall β).

Ferner definieren wir im Falle

$k = 2$: α) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 2. Seite des Z liegt,

$$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{p}^1 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}'),$$
$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p};$$

β) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 4. Seite des Z liegt,

$$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{p}^1 = \mathfrak{p},$$
$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}');$$

γ) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 3. Seite des Z liegt, ebenso wie im Fall β).

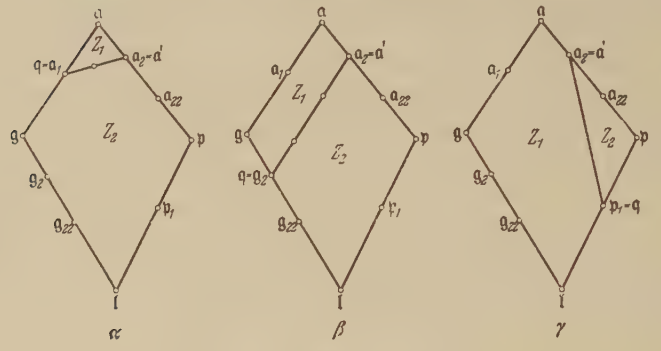


Fig. 6.

In Fig. 6 sind Graphen des Φ_1 gezeichnet, und zwar für jeden der unter $k = 1$ angeführten Fälle. Die Elemente $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$ wurden hierbei als untereinander verschieden angenommen. Den folgenden Überlegungen (bis S. 523) liegt die gleiche Annahme zugrunde; sie sind jedoch auf alle (S. 516) zugelassenen Fälle übertragbar und gewinnen dabei noch erheblich an Einfachheit.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2)$ in jedem der 6 Fälle die entsprechenden Bedingungen erfüllen, die S. 516 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ auferlegt wurden: Es gilt $\mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^i \neq \mathfrak{a}^i$. Die Folgen $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g}^i), \mathfrak{R}_1(\mathfrak{p}^i)$ haben ein Element, $\mathfrak{l}_i$, gemein. Die Mengen $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{a}^i) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{g}^i)$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{a}^i) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{p}^i) - \mathfrak{a}^i$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g}^i) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{l}^i)$, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{p}^i) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{l}^i) + \mathfrak{l}^i$ sind nach (E) paarweise elementefremd. Damit definiert jedes Tripel $(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^i)$ einen Komplex $Z(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^i) = Z_i$. Es gilt

(F) Alle Elemente von Z_1, Z_2 sind in Φ_1 enthalten. Jedes Element von Φ_1 gehört mindestens einem der Z_1, Z_2 an.

(G) Ein beliebiges Element der 1. oder 2. Seite des Z gehört entweder zur 1. oder 2. Seite des Z_1 oder zur 1. oder 2. Seite des Z_2.

(H) W gehört der 1. oder 2. Seite des Z_2 an.

In Fig. 6 trägt jedes von einem Z_i begrenzte Gebiet dessen Namen. Wir wollen im folgenden sagen, Z sei in die Komplexe Z_1, Z_2 *zerlegt*. $\mathfrak{a}'$ *vermittelt* die Zerlegung. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Element $\mathfrak{a}'$ eine Zerlegung vermittele, ist, daß $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ nicht auf der gleichen Seite des Z liegen.

(I) Ist Z unzerlegbar, so ist Z Elementarkomplex.

Beweis. Enthält die 1. oder 2. Seite des Z ein von $\mathfrak{a}$ verschiedenes lement $\mathfrak{m}$, so ist Z zerlegbar. Das ist klar, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}(\mathfrak{m})$ nicht auf der leichen Seite liegen. Im anderen Falle existiert nach (D) ein von $\mathfrak{a}$ verschiedenes Element $\mathfrak{n}$ der 1. oder 2. Seite, welches mit $\mathfrak{q}(\mathfrak{n})$ *nicht* auf der leichen Seite liegt. Setzen wir $\mathfrak{a}' = \mathfrak{n}$, so wird durch dieses Element eine eilung des Z vermittelt. Im Falle der Unzerlegbarkeit von Z folgt also, aß seine 1. und 2. Seite nur den Eckpunkt $\mathfrak{a}$ enthalten. Somit gilt $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{g}$, $_2 = \mathfrak{p}$, Z ist Elementarkomplex.

Sei Φ_1' die Menge aller Elemente, die zu Φ_1, aber nicht zur 3. oder Seite des Z gehören.

(K) Die Eckpunkte von Φ_1' gehören zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$. (Die entsprechende Behauptung gilt für die Strecken von Φ_1'.)

Beweis. $\mathfrak{a}'$ gehört wegen (B) zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$. $\mathfrak{a}_k'$ gehört jedenfalls zu $(\mathfrak{a})$. Sei $\mathfrak{a}_k' \neq \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$. Wäre es Element von $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ oder $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$, so müßte es ach H, Satz 18 mit einem der Elemente der 3. oder 4. Seite des Z identisch ein, also $\mathfrak{a}_k' = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ (Widerspruch). Den gleichen Schluß können wir sukzessiv uf alle Eckpunkte von W anwenden.

Wir schreiben $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}^1, \mathfrak{g}^1, \mathfrak{p}^1) = \mathfrak{E}_1$, $\quad \mathfrak{E}(\mathfrak{a}^2, \mathfrak{g}^2, \mathfrak{p}^2) = \mathfrak{E}_2$.

(L) $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2$ ist leer.

Beweis (nur für $k = 1$): Wir haben $\mathfrak{E}_2 \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{a}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1)$; $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1)$ t leer, woraus die Behauptung folgt.

(M) $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}$.

Beweis: Im Falle α) haben wir $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1)$, also $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1)$, sonst $(\mathfrak{g}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1)$, also

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1).$$

Wir haben stets $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1)$, also

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1).$$

omit gilt: $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ sind leer. Das gibt mit $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ die ehauptung.

(N) $\mathfrak{E}_2 \subseteq \mathfrak{E}$.

Beweis (für $k = 1$): Im Falle α) gilt $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{p})$, so aß (N) schon bewiesen ist.

Im Falle β), γ) gilt $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{p})$, also

) $\mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ ist leer.

Es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß $\mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ leer ist. gehört zu $\mathfrak{E}_2$, aber nach (B) nicht zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$. Gäbe es überhaupt ein Element on $\mathfrak{E}_2$, das zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ gehört, so gäbe es also eine abbrechende Folge

$$\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}_{k_1}^2, \mathfrak{a}_{k_1 k_2}^2, \ldots, \mathfrak{n},$$

in der alle dem Element $\mathfrak{n}$ vorangehenden Elemente zu $\mathfrak{E}_2$, nicht zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{n}$ aber zu $\mathfrak{E}_2$ *und* $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ gehörte. Wegen (5) gehört keines der dem Element $\mathfrak{n}$ vorangehenden Elemente zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$. Alle diese Elemente gehören also zu $\mathfrak{E}$. Folglich muß nach *H*, Satz 18, $\mathfrak{n}$

im Falle β) mit einem der Elemente

$$\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{g}_{22},\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{g}^2,$$

im Falle γ) mit einem Element der Menge

$$\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{g}_{22},\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{l}$$

identisch sein.

Fall β). In der Menge

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ {}_1\mathfrak{g},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{g}^2 \tag{6}$$

muß ein erstes Element $\mathfrak{m}$ existieren, welches zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{a}^2)$ gehört, denn $\mathfrak{n}$ ist in (6) enthalten. $\mathfrak{n}$ ist jedenfalls Element von $\mathfrak{R}(\mathfrak{m})$. Da $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{R}(\mathfrak{a}^2)$ nicht angehört, muß $\mathfrak{m}$ nach *H*, Satz 17 einer der Ketten $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}^2)$, $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}^2)$ angehören.

Die Kette $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}^2)$ läßt sich in die Mengen

$$\mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a}_1^2,\ \mathfrak{a}_{11}^2,\ \ldots,\ {}_1\mathfrak{g}^2, \tag{7}$$

$$\mathfrak{g}^2,\ \mathfrak{g}_1^2,\ \mathfrak{g}_{11}^2,\ \ldots \tag{8}$$

zerlegen. Die Elemente (7) und (6) sind nach (E) paarweise verschieden. Den Elementen (8) kann $\mathfrak{m}$ nicht angehören, da aus $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^2)$ ($\mathfrak{n} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{m})$) auch $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^2)$ folgte.

Die Kette $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}^2)$ läßt sich in die Mengen

$$\mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a}_2^2,\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{p}^2, \tag{7'}$$

$$\mathfrak{p}^2,\ \mathfrak{p}_2^2,\ \mathfrak{p}_{22}^2,\ \ldots \tag{8'}$$

zerlegen. Die Elemente von (7') und (6) sind nach (E) paarweise verschieden. Den Elementen (8') kann $\mathfrak{m}$ nicht angehören, da dann $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^2)$ folgte.

Der Fall γ) ist ganz entsprechend zu erledigen. Die Ketten $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}^2)$, $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}^2)$ werden ähnlich aufgeteilt wie unter Fall β). Der Menge (6) entspricht die Menge

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ {}_1\mathfrak{g},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{l}.$$

(O) $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$.

Beweis (für $k = 1$). Die Menge $\mathfrak{E}$ enthält nach (K) bestimmt die Eckpunkte von Φ_1'. Enthält sie keine weiteren, so schließen wir folgendermaßen: Die Eckpunkte von Φ_1' sind nach (G), (H) in der Menge der Eckpunkte der 1. und 2. Seiten von Z_1 und Z_2 enthalten. Wegen (B), angewendet auf $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$, gilt also $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$.

Enthält $\mathfrak{E}$ noch andere Eckpunkte als Φ_1', so sei $\mathfrak{m}$ ein solches Element. Es gibt dann eine abbrechende Folge von Nachfolgern

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_{k_1},\ \mathfrak{a}_{k_1 k_2},\ \ldots,\ \mathfrak{m}. \tag{9}$$

ı dieser Folge sei

0) $\mathfrak{n}$ das letzte Element, welches Φ_1^1 angehört.

Dieses existiert, da $\mathfrak{a}$ zu Φ_1', $\mathfrak{m}$ nicht zu Φ_1' gehört.

1. Liegt $\mathfrak{n}$ auf der 1. oder 2. Seite des Z_1, so ist $\mathfrak{m}$ Element von $\mathfrak{E}_1$. $\mathfrak{n}$ gehört nach (B) zu $\mathfrak{E}_1$. Wäre $\mathfrak{m}$ nicht Element von $\mathfrak{E}_1$, so müßte nter den auf $\mathfrak{n}$ folgenden Elementen der Folge (9) bis $\mathfrak{m}$ einschließlich ach H, Satz 18 ein Element existieren, das der 3. oder 4. Seite von Z_1 ngehört. Das führt zu einem Widerspruch, denn im Falle

α) gehören die Eckpunkte der 3., 4. Seite von Z_1 zu Φ_1' (Widerspruch mit (10));

β) gehören die Eckpunkte der 4. Seite von Z_1 zu Φ_1' (Widerspruch mit (10)),
die Eckpunkte der 3. Seite von Z_1 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ (Widerspruch mit $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}$);

γ) gehören die Eckpunkte der 4. Seite zu Φ_1' oder $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ (Widerspruch mit (10) bzw. $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}$),
die Eckpunkte der 3. Seite zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ (Widerspruch mit $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}$).

2. Liegt $\mathfrak{n}$ auf der 1. oder 2. Seite von Z_2, so ist $\mathfrak{m}$ Element von $\mathfrak{E}_2$. Der Beweis verläuft entsprechend dem unter 1. gegebenen. Es gehören n Falle

α), β) die Eckpunkte der 3. Seite von Z_2 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$,
der 4. Seite von Z_2 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$;

γ) die Eckpunkte der 3. und 4. Seite von Z_2 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$.

Aus (L) bis (O) folgt

(P) Die Mengen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ sind elementefremd und es gilt $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$.

Man zeigt auf Grund von (P) mühelos, daß auch für die durch die trecken $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{E}_2$ zu $\mathfrak{E}_1^1 = \mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}^1, \mathfrak{g}^1, \mathfrak{p}^1)$ bzw. $\mathfrak{E}_2^1 = \mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}^2, \mathfrak{g}^2, \mathfrak{p}^2)$ weiterten Komplexe $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ die Aussagen

(L′) $\mathfrak{E}_1^1, \mathfrak{E}_2^1$ sind elementefremd.

(P′) $\mathfrak{E}^1 = \mathfrak{E}_1^1 + \mathfrak{E}_2^1$

elten.

Wir werden nun ebenso, wie wir aus Z mit Hilfe von W zwei Komplexe $_1, Z_2$ erhalten haben, diese Komplexe, wenn möglich, weiter zerlegen. Wir hreiben $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0$, $Z = Z_0$, $Z_1 = Z_{01}$, $Z_2 = Z_{02}$, $W = W_0$ usw. ir definieren eine Folge $\mathfrak{F}_n$ von Mengen durch eine Induktionsvorschrift:

$$\mathfrak{F}_0 = \{Z_0\}, \quad \mathfrak{F}_1 = \{Z_{01}, Z_{02}\}.$$

Enthält $\mathfrak{F}_n$ die Komplexe

$$Z_{i_1 \dots i_k} = Z(\mathfrak{a}^{i_1 \cdots i_k}, \mathfrak{g}^{i_1 \cdots i_k}, \mathfrak{p}^{i_1 \cdots i_k}),$$

und ist unter diesen irgendeiner, $Z_{l_1 \dots l_m}$, der einer Teilung fähig ist, so wählen wir in ihm ein Element der 1. bzw. 2. Seite, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}^{l_1 \cdots l_m 2}$, welches eine Zerlegung vermittelt, und bestimmen die Kette $\mathfrak{K}_h(\mathfrak{a}')$ ($h = 2$ bzw. 1) bis zu dem ersten Element $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, welches mit einem Eckpunkt von $Z_{l_1 \dots l_m}$ identisch ist. Mit Hilfe des Weges

$W_{l_1 \dots l_m}$: $\qquad (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_h), \mathfrak{a}'_h, (\mathfrak{a}'_h, \mathfrak{a}'_{hh}), \dots, (_h\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$

zerlegen wir jetzt $Z_{l_1 \dots l_m}$ in zwei Komplexe so, wie wir es oben mit Z getan haben. Der Komplex mit dem Hauptpunkt $\mathfrak{a}^{l_1 \cdots l_m}$ erhält die Bezeichnung $Z_{l_1 \dots l_m 1}$, der mit dem Hauptpunkt $\mathfrak{a}^{l_1 \cdots l_m 2}$ die Bezeichnung $Z_{l_1 \dots l_m 2}$. Indem wir den Komplex $Z_{l_1 \dots l_m}$ aus $\mathfrak{F}_n$ entfernen und dafür die beiden Komplexe $Z_{l_1 \dots l_m 1}$, $Z_{l_1 \dots l_m 2}$ hinzufügen, erhalten wir die Menge $\mathfrak{F}_{n+1}$.

Die Konstruktion einer $\mathfrak{F}_{n+1}$ ist auf mannigfache Art durchführbar. Erstens können mehrere in $\mathfrak{F}_n$ enthaltene Komplexe teilungsfähig sein, ferner können in jedem solchen Komplex mehrere Elemente existieren, die für die Wahl von $\mathfrak{a}'$ in Frage kommen. Wir setzen aber fest, daß an der einmal getroffenen Wahl nichts mehr geändert werden darf, so daß die Folge $\mathfrak{F}_n$ dann eindeutig definiert ist.

Wir werden unten beweisen, daß die Folge $\mathfrak{F}_n$ abbrechen muß, weil in einem bestimmten $\mathfrak{F}_{n_0}$ kein teilungsfähiger Komplex mehr enthalten ist. Es ist von Wichtigkeit, daß diese Endmenge für jede Folge $\mathfrak{F}_n$ dieselbe ist, gleich, welche Komplexe und welches Element $\mathfrak{a}'$ wir bei jeder einzelnen Teilung verwenden.

Wir definieren neben $\mathfrak{F}_n$ eine Folge Φ_n von Mengen, welche aus *Eckpunkten* und *Strecken* bestehen. Die Menge Φ_n enthält dieselben Elemente, welche die Komplexe der Menge $\mathfrak{F}_n$ insgesamt enthalten, aber, wie sich herausstellen wird, jedes nur einmal, während in den Komplexen von $\mathfrak{F}_1$ z. B. die Elemente von W_0 insgesamt zweimal vorkommen. Die Konstruktion der Φ_n bildet den kombinatorischen Inhalt der geometrischen Konstruktion des Graphen in der Ebene, so daß die Eigenschaft der Φ_n, kein Element zweimal zu enthalten, der Forderung entspricht, daß jedes Element des abzubildenden Streckenkomplexes nur ein Bild in der Ebene hat.

Φ_0 besteht aus den Elementen von Z_0. Ist Φ_n ($n \geqq 0$) gegeben, so entstehe Φ_{n+1}, indem wir die Elemente des Weges $W_{l_1 \dots l_m}$ zu Φ_n hinzufügen. Hierbei ist $W_{l_1 \dots l_m}$ jener Weg, der zur Konstruktion von $\mathfrak{F}_{n+1}$ verwendet wurde. Kommt ein Element dieses Weges in Φ_n bereits t-mal vor, so ist es in Φ_{n+1} $(t+1)$-fach zu zählen.

Wir schreiben im folgenden $\mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}^{i_1 \dots i_k}, \mathfrak{g}^{i_1 \dots i_k}, \mathfrak{p}^{i_1 \dots i_k}) = \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k}$.

Sei Φ'_n die Menge aller Elemente, die der 1. und 2. Seite der Komplexe on $\mathfrak{F}_n$ angehören (t-mal vorkommende t-mal gezählt).

(Q) Die Elemente von Φ'_n gehören sämtlich zu $\mathfrak{E}^1_0$.

Beweis. Liegt das Element $\mathfrak{s}$ von Φ'_n etwa in $Z_{i_1 \dots i_k}$ von $\mathfrak{F}_n$, so gilt egen (B) $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k}$. Aus (P′) folgt nun

$$\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{k-1}} \subset \dots \subset \mathfrak{E}^1_0,$$

daß (Q) bewiesen ist.

(R) Jedes Element von Φ'_n hat die Vielfachheit 1.

Beweis. Man zeigt leicht, daß es in $\mathfrak{F}_n$ keine zwei Komplexe $Z_{i_1 \dots i_k}$, $_{g_1 \dots g_h}$ mit $h \geqq k$ gibt, für welche $(i_1 \dots i_k)$ und $(g_1 \dots g_k)$ elementweise eich wären.

Sei nun $\mathfrak{s}$ Eckpunkt oder Strecke von Φ'_n, $\mathfrak{s}$ gehöre der 1. oder 2. Seite es $Z_{i_1 \dots i_k}$ in $\mathfrak{F}_n$ an. Gäbe es in $\mathfrak{F}_n$ einen Komplex $Z_{l_1 \dots l_m}$, dessen Indexolge $(l_1 \dots l_m)$ von $(i_1 \dots i_k)$ verschieden ist, und dessen 1. oder 2. Seite benfalls $\mathfrak{s}$ enthielte, so könnten wir folgendermaßen schließen: $\mathfrak{s}$ gehört egen (B) zu $\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k}$ und $\mathfrak{E}^1_{l_1 \dots l_m}$. Nach der anfangs gemachten Beerkung gibt es in beiden Indexmengen eine verschiedene p-te Ziffer. Sei p ie kleinste Zahl mit $i_p \neq l_p$. Wegen (P′) gilt dann

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k} \subset \dots \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} i_p},$$

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} l_p \dots l_m} \subset \dots \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} l_p},$$

gehört also zu $\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} 1}$ und $\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} 2}$, was wegen (L') nicht möglich ist.

Aus (Q) und (R) folgt, daß insbesondere die Hauptpunkte der in $\mathfrak{F}_n$ nthaltenen Komplexe sämtlich untereinander verschieden sind und $\mathfrak{E}^1_0$ anehören. Da $\mathfrak{E}^1_0$ nach (C) nur endlich viele Eckpunkte enthält, andererseits $\mathfrak{F}_n$ us $(n+1)$ Komplexen $Z_{i_1 \dots i_k}$ besteht, muß es ein $\mathfrak{F}_{n_0}$ geben, welches keinen eilungsfähigen Komplex mehr enthält, also nach (I) nur Elementaromplexe. Es gilt

(S) $\mathfrak{F}_{n_0}$ besteht genau aus allen Elementarkomplexen, deren Hauptpunkte $\mathfrak{E}^1_0$ angehören.

Wir beweisen nämlich:

Zu jedem Eckpunkt $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{E}^1_0$ gibt es einen Index n_1 derart, daß $\mathfrak{s}$ jedem Φ'_n mit $n \geqq n_1$ angehört.

Wenn es überhaupt ein Φ'_{n_1} gibt, dem $\mathfrak{s}$ angehört, so folgt alles weitere us (G).

Ist $\mathfrak{s}$ Eckpunkt von $\mathfrak{E}^1_0$, so gehört er nach (P′) entweder $\mathfrak{E}^1_{0\,1}$ oder $\mathfrak{E}^1_{0\,2}$ an, agen wir $\mathfrak{E}^1_{0\,i_1}$. Liegt $\mathfrak{s}$ nicht auf der 1. oder 2. Seite des $Z_{0\,i_1}$, so ist $Z_{0\,i_1}$

nach (I) zerlegbar. Da $\mathfrak{F}_{n_0}$ nur unzerlegbare Komplexe enthält, muß es einen maximalen Index $n^1 > 1$ geben, für welchen $Z_{0\,i_1}$ in $\mathfrak{F}_{n^1}$ enthalten ist. Nach (P') gehört nun $\mathfrak{s}$ entweder zu $\mathfrak{E}^1_{0\,i_1\,1}$ oder $\mathfrak{E}_{0\,i_1\,2}$, sagen wir zu $\mathfrak{E}^1_{0\,i_1\,i_2}$. Liegt $\mathfrak{s}$ nicht auf der 1. oder 2. Seite des $Z_{0\,i_1\,i_2}$, so ist $Z_{0\,i_1\,i_2}$ zerlegbar. Es muß wiederum ein maximaler Index $n^2 > n^1$ existieren, für welchen $Z_{0\,i_1\,i_2}$ in $\mathfrak{F}_{n^2}$ liegt; so schließen wir weiter. Da nur endlich viele $\mathfrak{F}_n$ existieren, muß wegen $1 < n^1 < n^2 < \ldots$ einmal der Fall eintreten, wo $\mathfrak{s}$ auf der 1. oder 2. Seite eines $Z_{i_1 \ldots i_k}$ liegt. Damit ist (S) bewiesen.

Die Menge Ψ_0 bestehe aus den Elementen der 3. und 4. Seite des Z_0. Dann gilt:

(T) Φ_n entsteht durch Hinzufügen der Elemente Ψ_0 zu Φ'_n.

Beweis: Für $n = 0$ gilt die Behauptung. Sie gelte für ein $n \geqq 0$. Die Menge Φ'_{n+1} ist wegen (G), (H) die um $W_{l_1 \ldots l_m}$ vermehrte Menge Φ'_n. Daraus folgt die Behauptung für $(n + 1)$.

(U) Φ_{n_0} enthält die Elemente von Ψ_0 und die Elemente von $\mathfrak{E}^1_0$, jedes mit der Vielfachheit 1.

Beweis. Die Elemente von Φ'_{n_0} haben die Vielfachheit 1 nach (R), die Elemente von Ψ_0 sind paarweise verschieden nach den Voraussetzungen über Z. Φ'_{n_0} besteht wegen (S) aus den Elementen von $\mathfrak{E}^1_0$. Ψ_0 und $\mathfrak{E}^1_0$ sind elementefremd. Also folgt mit (Q), (T) die Behauptung.

§ 3.

Die Konstruktion des Graphen.

Wir legen zunächst einen Fundamentalbereich von $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}^+}$ in die Ebene. Nach H, Satz 21, 22 (vgl. auch Einleitung, S. 375) existiert in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}^+}$ ein Element $\mathfrak{t}$ mit der Eigenschaft: $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{t})$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{t})$ haben bis auf $\mathfrak{t}$ kein Element gemein. Ist $\mathfrak{e}\mathfrak{t}$ das erste in $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{t})$ enthaltene Element, das aus $\mathfrak{t}$ durch Multiplikation mit einer Einheit $\mathfrak{e}$ hervorgeht, $\mathfrak{f}\mathfrak{y}$ das erste Element von $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{t})$, welche aus einem Element $\mathfrak{y}$ der Menge

$$\mathfrak{t},\ \mathfrak{t}_1,\ \ldots,\ _1(\mathfrak{e}\mathfrak{t})$$

durch Multiplikation mit einer Einheit $\mathfrak{f}$ hervorgeht, so bilden $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ ein System von Grundeinheiten der Ordnung von $\mathfrak{R}$ und die Menge $\mathfrak{E}^1(\mathfrak{t}, \mathfrak{e}\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\mathfrak{y})$ bildet einen Fundamentalbereich des $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}^+}$.

Um zu den gewohnten Bezeichnungen überzugehen, schreiben wir auch $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{t} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{y} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{y}$. Bildelemente werden im Text mit einem * versehen.

Wir legen ein Rechteck in die Ebene, dessen Eckpunkte die Bilder von $\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{l}, \mathfrak{p}$ (in dieser Reihenfolge) darstellen sollen. Die Eckpunkte der 1. Seite

es $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ tragen wir, mit $\mathfrak{a}_1$ beginnend, auf der Seite $\mathfrak{a}^* \mathfrak{g}^*$ des Rechtecks n, die Eckpunkte der 2. Seite des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{a}_2$ beginnend, auf der Seite $^* \mathfrak{p}^*$ des Rechtecks. Der durch $\overrightarrow{\mathfrak{a}^* \mathfrak{g}^*} = \overrightarrow{\mathfrak{t}^* (\mathfrak{e}\mathfrak{t})^*}$ in der Ebene gegebene ektor werde $\mathfrak{v}_\mathfrak{e}$ benannt, der durch $\overrightarrow{\mathfrak{y}^* (\mathfrak{f}\mathfrak{y})^*}$ gegebene Vektor $\mathfrak{v}_\mathfrak{f}$. Die noch icht eingetragenen Eckpunkte des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, welche jedenfalls alle einem ereits eingetragenen Eckpunkt äquivalent sind, ordnen wir auf den übrigen eiten des Rechtecks so an, daß das Bild eines $\mathfrak{e}\mathfrak{x}$ aus dem von $\mathfrak{x}$ durch ddition von $\mathfrak{v}_\mathfrak{e}$ hervorgeht, entsprechend das Bild eines $\mathfrak{f}\mathfrak{x}$ durch Addition on $\mathfrak{v}_\mathfrak{f}$, das Bild eines $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{x}$ durch Addition von $\mathfrak{v}_\mathfrak{e} + \mathfrak{v}_\mathfrak{f}$ (vgl. Fig. 7). Den trecken $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ des Z werden die offenen Verbindungsstrecken der Bilder von $, \mathfrak{n}$ zugeordnet.

Die Elemente des Z nennen wir Φ_0. Wir teilen das von dem Rechteck egrenzte Gebiet G sukzessiv durch die Bilder der Wege $W_{l_1 \dots l_m}$ (§ 2) auf.

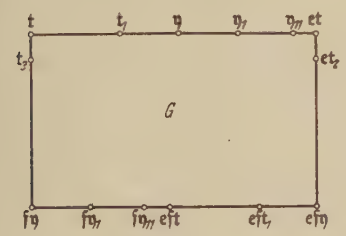


Fig. 7.

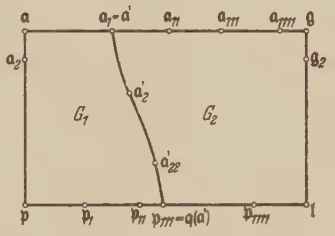


Fig. 8.

er Weg W_0, der eine Teilung von $Z = Z_0$ vermittelt, kann durch einen das lement $(\mathfrak{a}')^*$ mit dem Element $\mathfrak{q}^*$ verbindenden offenen Jordanbogen dar- estellt werden, der ganz in G liegt. Die Eckpunkte von W_0 werden der Reihe ach auf dem Jordanbogen abgetragen (Fig. 8), als erstes Element von $\mathfrak{a}'$ aus as Element $\mathfrak{a}'_k$, danach $\mathfrak{a}'_{k\,k}$ usw. In Fig. 8 ist $k = 2$. Die Strecken des W_0 erden auf die die Paare $(\mathfrak{a}')^*$, $(\mathfrak{a}'_k)^*$, $(\mathfrak{a}'_k)^*$, $(\mathfrak{a}'_{k\,k})^*$ usw. verbindenden offenen eilbögen abgebildet. Der von Z_0^* begrenzte abgeschlossene Bereich $\bar{G}$ wird ann zerlegt in das von Z_1^* begrenzte Gebiet G_1, das von Z_2^* begrenzte Gebiet G_2 nd die Elemente von Φ_1^*. Die Gebiete G_1, G_2 werden also von den Bild- ementen von $\mathfrak{F}_1$ begrenzt. Da die Begrenzungen von G_1, G_2 Jordanbögen nd, können diese Gebiete in der gleichen Weise, wie eben G, weiter zerlegt erden usf. Ist $\mathfrak{F}_n$ die durch die entsprechenden kombinatorischen Teilungen her- orgegangene Komplexmenge, so gilt: Der von Z_0^* begrenzte abgeschlossene ereich $\bar{G}$ wird zerlegt in die Gebiete, welche die Bilder der Komplexe von $\mathfrak{F}_n$ egrenzen, und die Elemente von Φ_n^*. Nach § 2 ist nach n_0 Schritten keine eilung mehr möglich. Wir haben alsdann einen Graphen Φ_{n_0} vor uns, in elchem nach (U) jedes Element des Φ_{n_0} genau ein Bild besitzt. Das von Z_0^*

begrenzte abgeschlossene Gebiet wird nach (S), (U) und Konstruktion des Graphen einfach bedeckt von dem Graphen des Φ_{n_0} und von den Gebieten, welche von den Bildern der Elementarkomplexe mit einem Element von $\mathfrak{E}_0^1$ als Hauptpunkt begrenzt werden. Um nun für den ganzen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}^+}^1$ einen Graphen der im Satz 1 erwähnten Eigenschaften zu erhalten, haben wir nur den Graphen des $\mathfrak{E}_0^1$ (Teilgraphen des Φ_{n_0}) als Fundamentalbereich um die Vektoren $a\mathfrak{v}_\mathfrak{e} + b\mathfrak{v}_\mathfrak{f}$ zu verschieben ($a, b = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Ist nun $\mathfrak{f}$ ein beliebiges Element des $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}^+}^1$ und $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}^a \mathfrak{f}^b \mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{E}_0^1$ gehört, so weisen wir $\mathfrak{f}$ dasjenige Element der erweiterten Graphen als Bild zu, das aus dem Bild von $\mathfrak{p}$ vermöge Addition mit dem Vektor $a\mathfrak{v}_\mathfrak{e} + b\mathfrak{v}_\mathfrak{f}$ hervorgeht[2]). Wegen der oben hergeleiteten Eigenschaften des Φ_{n_0} erhalten wir damit für $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}^+}^1$ einen Graphen der gewünschten Art.

§ 4.

Komplexpermutationen.

Wegen Satz 1 gehört jede in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}^+}^1$ enthaltene Strecke genau zwei Elementarkomplexen an.

Wir werden davon in diesem Paragraphen häufig Gebrauch machen.

Seien ε_{ik} diejenigen der Zahlen ± 1, für welche $\varepsilon_{ik}\varrho_{ik}(\mathfrak{m}) > 0$.

Bezeichnen wir den zu $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}^+}^1$ gehörigen Elementarkomplex mit $E(\mathfrak{m})$, so gilt

2. Satz. $\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ *ist der Hauptpunkt desjenigen Elementarkomplexes, der mit* $E(\mathfrak{m})$ *die Strecke* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$ *gemein hat.*

$\varepsilon_{23}\mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$ *ist der Hauptpunkt desjenigen Elementarkomplexes, der mit* $E(\mathfrak{m})$ *die Strecke* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2)$ *gemein hat.*

$\mathfrak{r}_3(\mathfrak{m})$ *ist der Gegenpunkt* $\mathfrak{m}_0$ *von* $E(\mathfrak{m})$.

Beweis. Die dritte Behauptung wurde schon in *H*, Satz 9 bewiesen.

Die zweite Behauptung geht aus der ersten durch Permutation der Indizes 1, 2 hervor.

Zum Beweise der ersten Behauptung genügt es nach der eingangs gemachten Bemerkung zu beweisen, daß $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$ in $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ enthalten ist.

Wir setzen

$$\mathfrak{m} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3),\ (\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),\ (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0 = (\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

Das Minimum $\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ liegt nach Definition im Quader

$$|x_1| < |\varrho_{11}|, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < |\varrho_{13}|.$$

Es gilt

$$|\mu_2| < |\sigma_2|. \tag{11}$$

[2]) Unter $\mathfrak{e}^a\mathfrak{f}^b(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ wird $(\mathfrak{e}^a\mathfrak{f}^b\mathfrak{m}, \mathfrak{e}^a\mathfrak{f}^b\mathfrak{n})$ verstanden.

ndernfalls wären die Ungleichungen

$$|\sigma_1| < \varrho_{11}, \quad |\sigma_2| \leqq |\mu_2|, \quad |\sigma_3| < |\varrho_{13}| < \mu_3$$

füllt, d. h. $Q_1(\mathfrak{m})$ enthielte einen niedrigeren Gitterpunkt als $\mathfrak{m}$ (Widerspruch).

Aus einer ähnlichen Überlegung (vgl. H, Hilfssatz 4) folgt

2) $$|\mu_1| < \varrho_{11},$$

ndlich nach Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$

3) $$|\mu_2| > |\varrho_{12}|.$$

Aus H, Hilfssatz 8 entnehmen wir, daß die Folge

4) $$(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2, \ (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{21}, \ (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{211}, \ \ldots$$

as Element $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ enthält und daß alle eventuellen, dem Element $_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ in dieser Folge vorangehenden Elemente $\mathfrak{l}$ in dem Bereich

5) $$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |\varrho_{12}| < |x_2| < |\sigma_2|, \quad x_3 > 0$$

egen, daß ferner

6) $$\mathfrak{r}_1(\mathfrak{l}) = \pm \mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$$

lt und $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ selbst der niedrigste Gitterpunkt im Quader

7) $$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |x_2| < |\varrho_{12}|, \quad x_3 > 0$$

t. Die Aussagen (15), (17) werden wir nicht vollständig verwenden; diese ngleichungen sollen auch zur besseren Veranschaulichung der Lage der aglichen Gitterpunkte dienen.

Sei von den Elementen

$$\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})), \quad (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2, \quad (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{21}, \quad \ldots, \quad (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$$

$= (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ das letzte, für welches

8) $$|\zeta_2| > |\mu_2|$$

t, $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ das darauffolgende. $\mathfrak{z}$ existiert, denn es gilt wegen (11), 3), (17)

$$|\sigma_2| > |\mu_2| > |\tau_2|.$$

existiert wegen $|\mu_2| > |\tau_2|$.

$\mathfrak{x}$ ist wegen (16), (17) der niedrigste Gitterpunkt in

$$|x_1| < |\varrho_{11}|, \quad |x_2| < |\zeta_2|, \quad x_3 > 0.$$

uch $\mathfrak{m}$ liegt wegen (12), (18) in diesem Quader. Wäre $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{m}$ verschieden, gälte also $\xi_3 < \mu_3$. Ferner gälte $|\xi_2| < |\mu_2|$ nach Definition von $\mathfrak{x}$. Da in (15) oder (17) liegt, hätten wir also mit Rücksicht auf (18)

$$|\xi_1| < |\varrho_{11}|, \quad |\xi_2| < |\mu_2|, \quad 0 < \xi_3 < \mu_3,$$

Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$. Also ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{m}$.

$\mathfrak{m}$ ist daher mit einem der Elemente

$$(19) \qquad (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2,\ (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{21},\ \ldots,\ (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$$

identisch; da aber $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ in (17) liegt, folgt mit Rücksicht auf (13) $\mathfrak{m} \neq (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$. Somit ist auch $\mathfrak{m}_1$ Element der Menge (19), d. h. die Strecke $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$ ist in $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ enthalten.

3. Satz. $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m})$, *der 1-Nachfolger im Komplex* $\mathfrak{M}^1_{312}$, *ist*

im Falle $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$ *identisch mit* $\mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$,

im Falle $\mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$ *(bis aufs Vorzeichen) das vorletzte der Elemente*

$$\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{21}, \mathfrak{m}_{211}, \ldots, \mathfrak{m}_0.$$

$\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$, *der 2-Nachfolger im Komplex* $\mathfrak{M}^1_{312}$, *ist (bis aufs Vorzeichen) der Hauptpunkt desjenigen Elementarkreises, der mit* $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ *eine Strecke mit* $\mathfrak{m}$ *als Endpunkt gemein hat.*

Mit Hilfe von Satz 3 und Satz 2 kann der Komplex $\mathfrak{M}^1_{321}$ leicht aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ ermittelt werden. Die gleiche Abbildung auf $\mathfrak{M}^1_{321}$ angewendet, ergibt den Komplex $\mathfrak{M}^1_{231}$. Die nochmalige Anwendung führt zum Ausgangskomplex $\mathfrak{M}^1_{123}$ zurück.

Beweis des Satzes 3. Zunächst der Beweis der Aussage über $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

I. $\mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$. Das vorletzte der Elemente $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{21}, \ldots, \mathfrak{m}_0$ heiße $\mathfrak{t} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Aus H, Hilfssatz 8 folgt: $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{r}_3(\mathfrak{m})$ hat von allen Gitterpunkten des Bereiches

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad |x_2| < |\tau_2|, \quad x_3 > 0$$

die kleinste Distanz von der x_1x_2-Ebene. In dem Quader

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad |x_2| < |\tau_2|, \quad |x_3| < \varrho_{33}$$

liegt also kein von Null verschiedener Gitterpunkt. Da nun $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m})$ nach Definition unter den Gitterpunkten des Bereiches

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < \varrho_{33}$$

die kleinste Distanz von der x_1x_3-Ebene hat und nach H, Hilfssatz 8 $\mathfrak{t}$ oder $-\mathfrak{t}$ in diesem Bereich liegt, folgt $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m}) = \pm\mathfrak{t}(\mathfrak{m})$.

II. $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$. Dann liegt im Quader

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad |x_2| < \varrho_{22}, \quad |x_3| < \varrho_{33}$$

ein von Null verschiedener Gitterpunkt. Da nun $\mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$ in

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < |\mu_3| < \varrho_{33}$$

egt, folgt $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$.

Es folgt der Beweis der Aussage über $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$. Ist $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$ (bis aufs orzeichen) durch die Angaben des Satzes 3 eindeutig bestimmt?

$E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ enthält nach Satz 2 die Strecke $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$. Da $\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ on $\mathfrak{m}$ verschieden ist, enthält $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ auch eine Strecke mit $\mathfrak{m}$ als *ndpunkt*, und zwar genau eine. Somit ist $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$ eindeutig bestimmt.

Sei ε diejenige der Zahlen ± 1, für welche $\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$ eine positive dritte oordinate hat Wir brauchen dann nur noch zu zeigen, daß $E(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))$ it $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ eine Strecke $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ gemein hat.

Der im Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < \mu_3$$

r x_1x_2-Ebene nächstgelegene Gitterpunkt ist $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Insbesondere haben wir also

0) $$|\sigma_1| < \varrho_{11}, \quad |\sigma_3| < \mu_3.$$

er Quader $|x_1| < \varrho_{11}$, $|x_2| < |\mu_2|$, $|x_3| < \mu_3$ ist (abgesehen vom Null- nkt) gitterpunktfrei, und zwar nach Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$. Also gilt

1) $$|\mu_2| < |\sigma_2|.$$

Nach Definition von $\mathfrak{f}_{12}(\mathfrak{m})$ ist sogar

2) der Quader $|x_1| < \varrho_{11}$, $|x_2| < |\sigma_2|$, $|x_3| < \mu_3$ (abgesehen vom Nullpunkt) gitterpunktfrei.

Wir notieren ferner die trivialen Ungleichungen

3) $$|\varrho_{12}| < \sigma_2; \quad |\mu_1| < \varrho_{11}; \quad |\varrho_{13}| < \mu_3.$$

e erste folgt aus der Definiton von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ unter Berücksichtigung von (21). zweite und dritte aus der Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ allein.

Sei $|\sigma_3| < |\varrho_{13}|$; aus (22) und (23. 3) folgt, daß der Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |x_2| < \sigma_2, \quad |x_3| < |\varrho_{13}|$$

auf den Nullpunkt keinen Gitterpunkt enthält. Mit Rücksicht auf (20. 1) d unsere Voraussetzung folgt also

$$\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})) = \mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}).$$

s (21), (22), (23. 2) folgt

$$(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2 = \mathfrak{m}.$$

Nach Satz 2 haben $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ und $E(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))$ die Strecke $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ $(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2) = (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}), \mathfrak{m})$ gemein; damit sind wir im Falle $|\sigma_3| < |\varrho_{13}$ fertig.

Sei $|\sigma_3| > |\varrho_{13}|$. Es folgt aus (20. 2) und (22), daß der Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |x_2| < |\sigma_2|, \quad |x_3| < |\sigma_3|$$

bis auf den Nullpunkt keinen Gitterpunkt enthält. Wegen (23. 1) und unserer Voraussetzung folgt also

$$\mathfrak{r}_1(\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}).$$

Aus (22) folgt

$$(\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))_1 = \mathfrak{m};$$

$E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ und $E(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))$ haben nach Satz 2 die Strecke $(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$, $(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))_1) = (\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}), \mathfrak{m})$ gemein.

(Eingegangen am 11. Dezember 1938.)

bstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie*).

Von

P. Lorenzen in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

inleitung 533
1. Idealsysteme 535
2. Totale Idealsysteme, Endlichartigkeit 540
3. Vollständige Halbgruppen 544
4. Idealbrüche 546
5. Total abgeschlossene Halbgruppen 548
teraturverzeichnis 552

Einleitung.

Diese Arbeit gibt eine Verallgemeinerung und neue Herleitung der wesentlichen Sätze der *multiplikativen* Idealtheorie, wie sie von Dedekind, Kronecker, oether, van der Waerden, Artin, Prüfer und hauptsächlich Krull entwickelt (vgl. Krull [4], § 1, 5, 6). In einigen Fällen führt sie darüber hinaus zu uen Resultaten.

Wir übertragen zunächst die Theorie von den Integritätsbereichen auf *albgruppen*[1]). (Eine Menge heißt Halbgruppe, wenn eine kommutative d assoziative Multiplikation definiert ist, für die die Kürzungsregel gilt: s $ac = bc$ folgt $a = b$.) Die meisten Definitionen der multiplikativen ealtheorie lassen sich ohne weiteres auch in Halbgruppen einführen, so vor em die Idealdefinition. Nur darf man dabei nicht an die klassische Dedeidsche Definition anknüpfen, man muß vielmehr von einer von Prüfer [1] ammenden Verallgemeinerung des Dedekindschen Idealbegriffs ausgehen.

Der Einführung der Grundbegriffe sind § 1 und 2 gewidmet. Dabei ziehen sich die Untersuchungen von § 1 im engen Anschluß an Prüfer f Ideale mit endlicher Basis, während der § 2 diese Untersuchungen auf liebige Ideale ausdehnt. Es stellt sich heraus, daß viele Sätze über Dedeidsche Ideale ausschließlich auf der folgenden Eigenschaft beruhen: Ist $= (a_1, a_2, \ldots)$ ein Ideal, $a \in \mathfrak{a}$, so gibt es endlich viele Elemente a_{r_i}, $= 1, \ldots, n$ mit $a \in (a_{r_1}, \ldots, a_{r_n})$. Alle Idealsysteme mit dieser Eigenschaft rden *endlichartig* genannt.

*) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät Universität Göttingen als Dissertation (D 7) angenommen.

[1]) Vgl. hierzu: Arnold [1], Clifford [1].

Die Verallgemeinerung der multiplikativen Idealtheorie bekommt ihren Sinn aber erst dadurch, daß sich auch die Bewertungstheorie[2]) übertragen läßt, und man so zu neuen Zusammenhängen zwischen Idealtheorie und Bewertungstheorie geführt wird (§ 3 und § 4).

Die beiden Fundamentalsätze der Bewertungstheorie sind:

1. Jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ist Durchschnitt seiner Bewertungsoberringe $\mathfrak{B}_\tau$,

$$\mathfrak{J} = \bigcap_\tau \mathfrak{B}_\tau.$$

2. Die zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Bewertungen entsprechen umkehrbar eindeutig den Primidealen eines — allein durch $\mathfrak{J}$ bestimmten — Kroneckerschen Funktionalringes.

Der Ausgangspunkt unserer Verallgemeinerung ist die einfache Bemerkung, daß ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ dadurch charakterisiert ist, daß es in $\mathfrak{J}$ ein Idealsystem gibt (das a-Idealsystem, vgl. Prüfer [1] und Krull [5]), dessen endliche Ideale eine Halbgruppe $\mathfrak{h}$ bilden, und daß sich die zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Bewertungen auffassen lassen als zu $\mathfrak{h}$ gehörige „Bewertungen".

Von hier aus lassen sich für beliebige Halbgruppen $\mathfrak{g}$ und beliebige Idealsysteme die Begriffe: „ganz abgeschlossen", „a-Ideale" und „Bewertungen" definieren. Im weiteren Aufbau wird gegenüber der bisherigen Theorie eine wesentliche Vereinfachung dadurch erzielt, daß der Funktionalring von 2. durch die Halbgruppe $\mathfrak{h}$ der endlichen „a-Ideale" ersetzt wird, wobei allerdings noch die formal gebildeten Quotienten $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{a} \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$) mit hinzuzunehmen sind. Die so entstehende Halbgruppe $\mathfrak{h}^*$ ist dadurch ausgezeichnet, daß je zwei Elemente einen größten gemeinsamen Teiler besitzen. Die Fundamentalsätze 1. und 2. ergeben sich jetzt leicht, da sie für $\mathfrak{h}^*$ unmittelbar zu verifizieren sind, nachdem in $\mathfrak{h}^*$ ein geeignetes Idealsystem eingeführt ist. Wesentlich für die Beweise ist dabei vor allem, daß das in $\mathfrak{h}^*$ benutzte Idealsystem endlichartig ist.

Schließt man von $\mathfrak{h}^*$ auf die gegebene Halbgruppe $\mathfrak{g}$ zurück, so folgt, daß das b-Idealsystem (für Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ in Krull [5] eingeführt: $\mathfrak{a}_b = \bigcap_\tau \mathfrak{a}\,\mathfrak{B}_\tau$) ebenfalls endlichartig ist. Hieraus ergibt sich die *völlige Identität des a-Idealsystems mit dem b-Idealsystem* (Satz 15), die bisher nur für die endlichen Ideale in Integritätsbereichen bekannt war (vgl. Krull [5]).

§ 5 beschäftigt sich mit *total abgeschlossenen* Halbgruppen. (Diejenigen Integritätsbereiche, deren von Null verschiedene Elemente eine total abge-

[2]) Wir meinen hier die allgemeine Bewertungstheorie kommutativer Integritätsbereiche im Sinne von Krull [3], [4], [5], [6].

schlossene Halbgruppe bilden, heißen in Krull [6] „vollständig ganz abgeschlossen", in van der Waerden [1] „ganz abgeschlossen".) Krull [6] hat folgende Vermutungen ausgesprochen:

a) Jeder vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereich ist spezielle Hauptordnung [3]).

b) Jeder vollständig ganz abgeschlossene primäre Integritätsbereich ist Bewertungsring.

Untersucht man diese Vermutungen in Halbgruppen, so zeigt ein Gegenbeispiel, daß b) dort jedenfalls falsch ist, a) dagegen kann — unter einer schwachen Endlichkeitsvoraussetzung — für beliebige total abgeschlossene Halbgruppen bewiesen werden.

Hier bleiben also noch Fragen offen, wobei ich besonders auf die Schwierigkeit hinweisen möchte, daß der Begriff „spezielle Hauptordnung" für Halbgruppen abhängig vom Idealsystem sein könnte. Unter einer starken Endlichkeitsvoraussetzung — nämlich für die endlichen diskreten Hauptordnungen — zeige ich, daß diese Abhängigkeit nicht besteht.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor Krull, sowie Herrn Professor Hasse meinen herzlichsten Dank aussprechen für viele wertvolle Ratschläge und Anregungen.

§ 1.

Idealsysteme.

Wir wollen eine Menge $\mathfrak{g}$, für deren Elemente $a, b, c, \ldots$ eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, eine *Halbgruppe* nennen, wenn

1. aus $ac = bc$ stets $a = b$ folgt,
2. $\mathfrak{g}$ ein Einselement 1 enthält.

Zu jeder Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gibt es eindeutig die Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus den Quotienten $\frac{a}{b}$ besteht. $\mathfrak{G}$ heißt die Quotientengruppe von $\mathfrak{g}$. So ist z. B. die Menge der von Null verschiedenen Elemente eines Integritätsbereiches eine Halbgruppe, und die von Null verschiedenen Elemente des Quotientenkörpers bilden die Quotientengruppe.

Viele Definitionen der Teilbarkeitstheorie in Integritätsbereiche lassen sich unmittelbar auf Halbgruppen übertragen. Von den Elementen von $\mathfrak{G}$ nennen wir die Elemente von $\mathfrak{g}$ die ganzen Elemente, b heißt ein Teiler von a, und a heißt Vielfaches von b, wenn $\frac{a}{b}$ ganz ist. Das Hauptideal (a) besteht aus allen Vielfachen von a. Ist eine Verwechslung ausgeschlossen, dann

[3]) D. h. ist Durchschnitt von Bewertungsringen, die zu Bewertungen mit reellen Zahlen gehören.

wird das Hauptideal (a) einfach mit a bezeichnet. Ein ganzes Element a heißt Einheit, wenn a^{-1} ganz ist.

Die Dedekindsche Definition der Ideale in Integritätsbereichen läßt sich natürlich nicht übertragen, da in Halbgruppen ja keine Addition erklärt zu sein braucht. Dagegen ist der Begriff der Idealsysteme, wie er von Prüfer und Krull aufgestellt worden ist, fast unmittelbar auch in Halbgruppen anzuwenden. Zur Formulierung der Definition wollen wir, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige Untermengen von $\mathfrak{G}$ sind, unter $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Menge der Elemente ab mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ und unter $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ die Menge der Elemente c mit $c\,\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ [4]) verstehen. Statt $(1) : \mathfrak{a}$ schreiben wir $\mathfrak{a}^{-1}$.

Definition 1. Es seien zu jeder endlichen oder zu jeder beliebigen Untermenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$, für die $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ [4]) ist, eine Untermenge $\mathfrak{a}_r$ von $\mathfrak{G}$ so definiert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_r$,
2. aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}_r$ folgt $\mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{b}_r$,
3. für ein Element a ist $a_r = (a)$,
4. $a\,\mathfrak{a}_r = (a\,\mathfrak{a})_r$.

$\mathfrak{a}_r$ heißt dann das *aus* $\mathfrak{a}$ *erzeugte r-Ideal*. Ist $\mathfrak{a}$ endlich, so heißt $\mathfrak{a}_r$ ein endliches r-Ideal [5]). Die Menge aller r-Ideale nennen wir das *r-Idealsystem*. Ist sogar für jede Untermenge $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ ein r-Ideal definiert, so nennen wir die Menge aller r-Ideale das *totale r-Idealsystem* [6]).

Die Summe zweier Ideale wird durch $\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$ [4]), das Produkt durch $\mathfrak{a}_r\,\mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r$ definiert. Diese Definitionen sind unabhängig von der Erzeugung der Ideale. Wegen 4. gilt das Distributivgesetz:

$$(\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r)\,\mathfrak{c}_r = \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r + \mathfrak{b}_r\,\mathfrak{c}_r.$$

In Integritätsbereichen liefert die Dedekindsche Idealdefinition ein totales Idealsystem, da ersichtlich die Bedingungen 1. bis 4. erfüllt sind. Das aus $\mathfrak{a}$ erzeugte Dedekindsche Ideal wollen wir mit $\mathfrak{a}_d$ bezeichnen.

---

[4]) $\subseteq$ bezeichnet das mengentheoretische Enthaltensein, 0 die leere Menge, $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

[5]) Prüfer [1] definiert nur endliche Ideale. In Krull [5] findet sich eine Definition, die im wesentlichen mit unserer Definition 1 übereinstimmt, formal aber abweicht.

[6]) Zieht man die Begriffe der Verbandstheorie heran (vgl. etwa Köthe [1]), so sieht man, daß die Forderungen 1. bis 3. besagen, daß die Ideale einen Verband bilden, der die Hauptideale enthält. $\mathfrak{a}_r$ ist dabei der größte gemeinsame Teiler der Hauptideale (a) mit $a \in \mathfrak{a}$. Würde man daher unter einem Idealsystem jeden Verband verstehen, der die Hauptideale enthält und der Bedingung 4 genügt, so wäre diese Definition nur unwesentlich umfassender. Es würde die zu gebrauchende Terminologie aber von der üblichen stark abweichen, weswegen ich die gegebene Definition vorgezogen habe.

Für beliebige Halbgruppen konstruieren wir jetzt zwei wichtige Idealsysteme. Wir setzen [7]):

$$\mathfrak{a}_s = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (a), \qquad \mathfrak{a}_v = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq (a)} (a).$$

Das aus einer Untermenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$) erzeugte s-Ideal soll also genau aus den Elementen b bestehen, von denen mindestens ein Teiler in $\mathfrak{a}$ liegt, d. h. $\mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}\,\mathfrak{g}$. Diese Definition genügt den Bedingungen 1. bis 4. Unsere Definition der v-Ideale stimmt mit der üblichen Definition [8]): $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ überein.

Aus 2. folgt ohne weiteres, daß für jedes r-Idealsystem stets

$$\mathfrak{a}_s \subseteq \mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{a}_v$$

gilt.

Prüfer [1] hat über Idealsysteme in Integritätsbereichen Untersuchungen angestellt, deren Resultate wir in unserer Zusammenstellung auf S. 543 mitverwandt haben. Zunächst entnehmen wir daraus:

Definition 2. Eine Halbgruppe heißt *r-abgeschlossen*, wenn $\mathfrak{c}_r : \mathfrak{c}_r = 1$ für jedes endliche r-Ideal $\mathfrak{c}_r$ gilt [9]).

Es ist bekannt, daß für Integritätsbereiche unsere Definition von „d-abgeschlossen" mit der üblichen Definition von „ganz abgeschlossen" übereinstimmt. Ein Integritätsbereich heißt ganz abgeschlossen, wenn jedes Element a des Quotientenkörpers, das einer Gleichung

$$a^n + b_1 a^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten b_γ genügt, selber ganz ist.

Die Bedeutung der r-Abgeschlossenheit liegt darin, daß in jeder r-abgeschlossenen Halbgruppe die folgende Konstruktion eines neuen Idealsystems möglich ist, die für d-Ideale schon in Prüfer [1] ausgeführt ist:

Definition 3. Ist $\mathfrak{a}$ eine endliche Untermenge von $\mathfrak{G}$, und ist $\mathfrak{g}$ r-abgeschlossen, so soll $\mathfrak{a}_{r_a}$ aus den Elementen a bestehen, für die es ein endliches r-Ideal $\mathfrak{c}_r$ gibt mit $a\,\mathfrak{c}_r \subseteq \mathfrak{a}_r\,\mathfrak{c}_r$.

Die Mengen $\mathfrak{a}_{r_a}$ bilden dann ein Idealsystem, das System der r_a-Ideale.

Die r_a-Ideale haben nun die Eigenschaft, eine *Halbgruppe* zu bilden [10]), d. h. für beliebige endliche r_a-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ folgt aus $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Wir sagen dafür kurz: in $\mathfrak{g}$ gilt der *r_a-Halbgruppensatz*. Aus $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ folgt dann wegen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ stets $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$.

Da $\mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{a}_{r_a} \subseteq \mathfrak{a}_v$ gilt, erhalten wir in v-abgeschlossenen Halbgruppen $\mathfrak{a}_{v_a} = \mathfrak{a}_v$. In einer v-abgeschlossenen Halbgruppe bilden also die endlichen

---

[7]) $\bigcup$ bezeichnet die Vereinigungsmenge, $\bigcap$ den Durchschnitt.

[8]) Vgl. Prüfer [1], van der Waerden [1], Krull [4], S. 43.

[9]) Die Abgeschlossenheit heißt in Prüfer [1]: Eigenschaft Δ.

[10]) In Prüfer [1]: Eigenschaft Γ. Der Beweis kann wörtlich übernommen werden.

v-Ideale eine Halbgruppe: es gilt der v-Halbgruppensatz. Aber sogar noch mehr! Ist $\mathfrak{a}$ ein endliches v-Ideal, so ist $\mathfrak{a}^{-1}$ v-Ideal, braucht aber nicht endlich zu sein (siehe unten S. 551). Jedoch gilt stets $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = 1$; denn

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = 1 : \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = (1 : \mathfrak{a}^{-1}) : \mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{a} = 1.$$

Nennen wir ein r-Ideal $\mathfrak{a}$, für das $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})_r = 1$ ist, *r-umkehrbar*, und eine Halbgruppe, in der jedes endliche r-Ideal r-umkehrbar ist, eine *r-Multiplikationshalbgruppe*, so haben wir:

Satz 1. *Jede v-abgeschlossene Halbgruppe ist v-Multiplikationshalbgruppe*

Aus Satz 1 folgt für beliebiges r-Idealsystem:

Satz 2. *Eine Halbgruppe* $\mathfrak{g}$ *ist genau dann r-Multiplikationshalbgruppe wenn* $\mathfrak{g}$ *r-abgeschlossen ist, und jedes endliche r-Ideal v-Ideal ist*[11]).

Wir haben jetzt das s-Idealsystem zu untersuchen, das bei Prüfer noch nicht auftritt. Wir zeigen zunächst:

Das aus $\mathfrak{a}$ erzeugte s_a-Ideal besteht aus allen Elementen a, für die es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $a^n \in \mathfrak{a}_s''$.

Denn aus $a \in \mathfrak{a}_{s_a}$ folgt: $a\,(c_1, \ldots, c_n)_s \subseteq \mathfrak{a}_s\,(c_1, \ldots, c_n)_s$, wobei wir ohne Einschränkung n minimal gewählt denken können, also

$$a\,c_i \in \mathfrak{a}_s\,c_{\nu_i} \qquad i = 1, \ldots, n; \quad \nu_i = 1, \ldots, n$$

$$a^n\,c_1 \ldots c_n \in \mathfrak{a}_s''\,c_{\nu_1} \ldots c_{\nu_n},$$

$$a^n \in \mathfrak{a}_s'',$$

und umgekehrt folgt hieraus für das endliche s-Ideal

$$\mathfrak{c}_s = \mathfrak{a}_s''^{-1} + a\,\mathfrak{a}_s''^{-2} + \ldots + a^{n-1},$$

$$a\,\mathfrak{c}_s \subseteq \mathfrak{a}_s\,\mathfrak{c}_s.$$

Hierin ist insbesondere enthalten, daß eine Halbgruppe $\mathfrak{g}$ genau dann s-abgeschlossen ist, wenn jedes Element a der Quotientengruppe $\mathfrak{G}$, von dem eine Potenz a^n ganz ist, selber ganz ist.

Ersichtlich ist die s-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{g}$, die genaue Bedingung dafür, daß überhaupt ein Idealsystem in $\mathfrak{g}$ existiert, für das der Halbgruppensatz gilt. (Denn gilt der r-Halbgruppensatz, so folgt für endliches $\mathfrak{c}$ aus $a\,\mathfrak{c}_s \subseteq \mathfrak{c}_s$ wegen $a\,\mathfrak{c}_r \subseteq \mathfrak{c}_r$ sofort $a \in \mathfrak{g}$, d. h. $\mathfrak{c}_s : \mathfrak{c}_s = 1$.)

Auf eine äußerst wichtige Klasse von Halbgruppen werden wir geführt, wenn wir nach der Gültigkeit des s-Halbgruppensatzes fragen. Gilt in $\mathfrak{g}$ der s-Halbgruppensatz, so muß für jedes $a \in \mathfrak{G}$ wegen

$$(1, a)_s \subseteq (a, a^{-1})_s\,(1, a)_s$$

---

[11]) Mit anderem Beweis findet sich dieser Satz für d-Ideale schon in Prüfer [1], wo Satz 1 noch offengeblieben war. Vgl. auch Dribin [1].

stets $1 \in (a, a^{-1})_s$ gelten, d. h. in $\mathfrak{g}$ ist von zwei Elementen stets eines durch das andere teilbar. Die Halbgruppen mit dieser Eigenschaft wollen wir *linear* nennen. Die von Null verschiedenen Elemente eines Integritätsbereiches bilden genau dann eine lineare Halbgruppe, wenn der Integritätsbereich ein Bewertungsring [12]) ist.

In linearen Halbgruppen ist nun jedes endliche s-Ideal sogar Hauptideal.

Wenn in einer Halbgruppe $\mathfrak{g}$ jedes endliche r-Ideal Hauptideal ist, so wollen wir $\mathfrak{g}$ *r-vollständig* [13]) nennen. Die linearen Halbgruppen sind also s-vollständig, der Ring der ganzen algebraischen Zahlen z. B. d-vollständig und ein Polynomring in mehreren Variablen stets v-vollständig. Bemerken wir noch, daß auch jede s_a-Multiplikationshalbgruppe linear ist: aus $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})_{s_a} = 1$ folgt nämlich $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})_s = 1$, also erst recht der s-Halbgruppensatz.

Zusammen mit den Prüferschen Resultaten [14]) haben wir damit eine völlige Übersicht über die folgenden vier Eigenschaften einer Halbgruppe $\mathfrak{g}$ bezüglich der verschiedenen Idealsysteme erhalten:

1. $\mathfrak{g}$ ist vollständig (jedes endliche Ideal ist Hauptideal).
2. $\mathfrak{g}$ ist Multiplikationshalbgruppe (jedes endliche Ideal ist umkehrbar).
3. In $\mathfrak{g}$ gilt der Halbgruppensatz (die endlichen Ideale bilden eine Halbgruppe).
4. $\mathfrak{g}$ ist abgeschlossen (für jedes endliche Ideal $\mathfrak{c}$ gilt $\mathfrak{c} : \mathfrak{c} = 1$).

Wir stellen die Resultate graphisch zusammen:

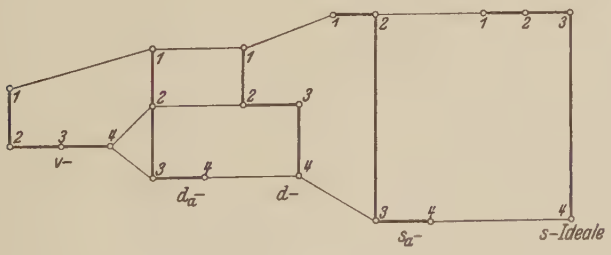


Fig. 1.

Sind zwei Eigenschaften durch eine Linie miteinander verbunden, so ist die tieferliegende eine Folge der höherliegenden und nicht umgekehrt. Bei waagerechter Verbindung sind die Eigenschaften gleichwertig.

Im nächsten Paragraphen werden wir eine entsprechende Tabelle für Eigenschaften *aller* Ideale, nicht nur der endlichen, aufstellen.

---

[12]) Vgl. Krull [3] und [4], S. 40.
[13]) In Prüfer [1]: Eigenschaft **A**.
[14]) Vgl. die Zusammenstellung in Prüfer [1].

§ 2.

Totale Idealsysteme, Endlichartigkeit.

Genau wie wir in jeder Halbgruppe das System der s- und v-Ideale konstruiert haben, können wir auch, wenn ein System von endlichen r-Idealen gegeben ist, totale Idealsysteme konstruieren, deren endliche Ideale mit den r-Idealen übereinstimmen. Wir bezeichnen dazu mit $\mathfrak{e}$ stets Mengen aus endlich vielen Elementen von $\mathfrak{G}$. Ist dann $\mathfrak{a}$ eine beliebige Untermenge von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$, so setzen wir

$$\mathfrak{a}_{r_s} = \bigcup_{\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{e}_r, \qquad \mathfrak{a}_{r_v} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{e}_r} \mathfrak{e}_r.$$

Nach dieser Definition ist z. B. für beliebige Untermengen $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ stets

$$\mathfrak{a}_{s_s} = \mathfrak{a}_s, \qquad \mathfrak{a}_{d_s} = \mathfrak{a}_d.$$

Wir können also sagen, daß das totale s_s- bzw. d_s-System identisch mit dem totalen s- bzw. d-System ist. Ebenso ist das totale v_v-System identisch mit dem v-System.

An neuen Idealsystemen erhalten wir das s_v-, d_v- und v_s-System, von denen vor allem das letzte für uns wichtig ist. Wir nennen das v_s-System kürzer das *t-System* [15]).

Von dem r_a-System waren bisher nur die endlichen Ideale definiert. Wir bilden daher das $(r_a)_s$-System und nennen dieses kürzer das *totale r_a-System* [16]).

Alle r_s-Systeme, speziell also das s-, s_a-, d-, d_a- und t-System haben folgende Eigenschaft:

Enthält das aus $\mathfrak{a}$ erzeugte r_s-Ideal ein Element a, so gibt es endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathfrak{a}$, so daß a schon in dem aus $a_1, \ldots, a_n$ erzeugten r_s-Ideal liegt.

Wir wollen die r_s-Systeme wegen dieser Eigenschaft als *endlichartig* bezeichnen. Umgekehrt ist auch jedes endlichartige Idealsystem ein r_s-System.

Wenden wir uns zunächst zur Untersuchung beliebiger endlichartiger Idealsysteme, so stoßen wir vor allem auf drei Sätze, die diese Idealsysteme vor den übrigen auszeichnen.

Satz 3. *Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines endlichartigen Idealsystems umkehrbar, so ist $\mathfrak{a}$ endlich* [17]).

Denn aus $1 \in \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1}$ folgt die Existenz von endlich vielen Elementen $a_1, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{a}$ mit $1 \in (a_1, \ldots, a_n)\,\mathfrak{a}^{-1}$, also $\mathfrak{a} \subseteq (a_1, \ldots, a_n)$, d. h. $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

---

[15]) Die t-Ideale finden sich schon in Arnold [1].

[16]) Unsere Definition stimmt für die d_a-Ideale mit der in Krull [5] gegebenen überein.

[17]) Vgl. Krull [2].

Ebenso ist natürlich dann auch $\mathfrak{a}^{-1}$ endlich. Ist daher eine Halbgruppe Multiplikationshalbgruppe bezüglich eines endlichartigen Idealsystems, so bilden die endlichen Ideale sogar eine Gruppe, wir sagen hierfür: es gilt der *Gruppensatz*[18]). Dagegen gibt es v-Multiplikationshalbgruppen, in denen der v-Gruppensatz nicht gilt, wie ein Beispiel auf S. 551 zeigt.

Satz 4. *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a} \subset 1$ *eines endlichartigen Idealsystems gibt es ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *mit* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$.

(Ein Ideal $\mathfrak{p}$ heißt bekanntlich *Primideal*, wenn aus $a \notin \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p}$ stets $ab \notin \mathfrak{p}$ folgt.)

Der Beweis dieses Satzes läßt sich wörtlich aus dem Beweis des entsprechenden Satzes für d-Ideale in Integritätsbereichen entnehmen. Wegen der Endlichartigkeit kann nämlich durch Wohlordnung ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$ konstruiert werden; dieses muß dann nach bekannter Schlußweise prim sein (vgl. Krull [1]).

Aus einem etwas weiter als Satz 4 gehenden Satze aus Krull [1] oder auch direkt aus Satz 4 durch Übergang zu einer Quotientenhalbgruppe (vgl. § 3) folgt für die minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ (das sind diejenigen, die kein Primideal $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$ enthalten):

Ein minimales s-Primideal ist auch minimales Primideal für jedes endlichartige Idealsystem.

Schließlich ergibt der Beweis des folgenden bekannten Satzes über d-Ideale[19]) unmittelbar für beliebige r-Idealsysteme:

Satz 5. *Es ist genau dann jedes* r_s*-Ideal endlich, wenn es unter beliebig vielen r-Idealen* $\mathfrak{a}$*, die alle zwischen zwei festen Hauptidealen* a, b *liegen,* $a \subseteq \mathfrak{a} \subseteq b$*, stets ein maximales gibt (r-Maximalbedingung).*

Während in die Definition der Begriffe: Vollständigkeit, Gruppensatz, Halbgruppensatz und Abgeschlossenheit stets nur die *endlichen* Ideale eingehen, wollen wir jetzt die entsprechenden Definitionen für ein totales Idealsystem, also unter Berücksichtigung *aller* Ideale, aufstellen.

Definition 4. $\mathfrak{g}$ sei eine Halbgruppe, und es sei das totale r-Idealsystem in $\mathfrak{g}$ definiert.

1. $\mathfrak{g}$ heißt *total r-vollständig*, wenn jedes r-Ideal Hauptideal ist.

2. In $\mathfrak{g}$ gilt der *totale r-Gruppensatz*, wenn alle r-Ideale eine Gruppe bilden.

3. In $\mathfrak{g}$ gilt der *totale r-Halbgruppensatz*, wenn alle r-Ideale eine Halbgruppe bilden.

4. $\mathfrak{g}$ heißt *total r-abgeschlossen*, wenn für jedes r-Ideal $\mathfrak{c}$ gilt: $\mathfrak{c} : \mathfrak{c} = 1$.

---

[18]) In Prüfer [1]: Eigenschaft B.

[19]) Vgl. etwa van der Waerden [2].

Satz 6. $\mathfrak{g}$ *ist genau dann total r-abgeschlossen, wenn jedes von* $\mathfrak{g}$ *„fast abhängige" Element ganz ist, d. h. jedes* $a \in \mathfrak{G}$, *für das ein* $c \in \mathfrak{G}$ *existiert, so daß* ca^n *ganz ist für alle* $n = 1, 2, \ldots$.

Die Voraussetzung über a besagt nämlich nichts anderes, als $(a, a^2, \ldots)^{-1} \neq 0$. Ist daher $\mathfrak{g}$ total r-abgeschlossen, so folgt aus

$$a\,(a, a^2, \ldots)_r \subseteq (a, a^2, \ldots)_r$$

sofort $a \in \mathfrak{g}$. Umgekehrt folgt aus der Existenz eines r-Ideals $\mathfrak{c}$ mit $a\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}$ sukzessive

$$a^2\mathfrak{c} \subseteq a\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c},$$

$$a^3\mathfrak{c} \subseteq a\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c},$$

also auch

$$(a, a^2, \ldots)_r\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c},$$

$$(a, a^2, \ldots)_r\,\mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1} \subseteq 1,$$

und wegen $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1} \neq 0$ somit

$$(a, a^2, \ldots)^{-1} \neq 0.$$

Hierdurch ist gezeigt, daß die Definition der totalen r-Abgeschlossenheit in Wahrheit unabhängig vom Idealsystem ist, was man auch direkt sehen kann. Wir sprechen daher einfach von der *totalen Abgeschlossenheit* einer Halbgruppe.

Über den totalen v-Gruppensatz gilt der bekannte van der Waerden-Artin-Krullsche Satz [20]:

In $\mathfrak{g}$ gilt genau dann der totale v-Gruppensatz, wenn $\mathfrak{g}$ total abgeschlossen ist.

Dieser Satz läßt sich mit derselben Formel wie Satz 1 beweisen.

Mit Satz 3 und Satz 6 folgt hieraus sofort:

Satz 7. *In* $\mathfrak{g}$ *gilt genau dann der totale t-Gruppensatz, wenn* $\mathfrak{g}$ *total abgeschlossen ist und der v-Maximalbedingung genügt.*

Wie für d-Ideale, so gilt auch für jedes endlichartige Idealsystem, daß der totale Gruppensatz gleichwertig mit dem sogenannten Z. P. I. [21] ist.

Z. P. I. Jedes ganze Ideal läßt sich eindeutig als Produkt von Primidealen darstellen.

Ebenso ist die totale Vollständigkeit für ein endlichartiges Idealsystem gleichwertig mit dem

Z. P. H. [22]. Jedes ganze Ideal läßt sich eindeutig als Produkt von Primhauptidealen darstellen.

Über den Z. P. I. gilt für jedes endlichartige Idealsystem [19]:

---

[20]) Vgl. van der Waerden [2], § 103, Krull [6].

[21]) Zerlegungssatz in Primideale, vgl. etwa Krull [4], S. 4.

[22]) Zerlegungssatz in Primhauptideale, vgl. Hasse [1].

Satz 8. *In* $\mathfrak{g}$ *gilt der totale Gruppensatz genau dann, wenn* $\mathfrak{g}$
1. *total abgeschlossen ist,*
2. *der v-Maximalbedingung genügt,*
3. *jedes Primideal minimal ist.*

Daß die drei Bedingungen notwendig sind, ist trivial; sind sie aber erfüllt, so folgt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ des Systems aus $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} \subset 1$ die Existenz eines Primideals: $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$. $\mathfrak{p}$ ist als minimales Primideal t-Ideal, wegen der v-Maximalbedingung also sogar v-Ideal, so daß $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})_v \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$ entsteht, was der totalen Abgeschlossenheit widerspricht. Somit ist für jedes Ideal $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} = 1$.

Die Verallgemeinerung eines Kriteriums für die totale d-Vollständigkeit [23]) liefert für beliebiges endlichartiges Idealsystem den

Satz 9. $\mathfrak{g}$ *ist genau dann total vollständig, wenn jedem ganzen Element* a *eine nichtnegative ganze rationale Zahl* $|a|$ *so zugeordnet werden kann, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Ist $b \notin (a)$, *so enthält* (a, b) *ein Element* c *mit* $|c| < |a|$.

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist leicht zu sehen, denn ist $a = p_1\, p_2 \ldots p_n$ die Primelementzerlegung von a, so setzen wir $|a| = n$. Die Bedingung ist aber auch hinreichend, denn es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal und a ein Element von $\mathfrak{a}$ mit kleinstmöglichem $|a|$. Wäre dann $(a) \subset \mathfrak{a}$, so gäbe es ein $b \in \mathfrak{a}$ mit $b \notin (a)$, also ein $c \in (a, b) \subseteq \mathfrak{a}$ mit $|c| < |a|$. Demnach ist $(a) = \mathfrak{a}$.

Wir wollen die Ergebnisse dieser Untersuchung der totalen Idealsysteme wieder graphisch zusammenstellen.

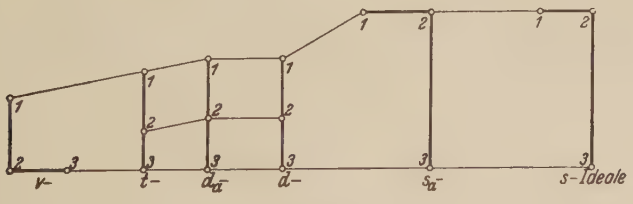


Fig. 2.

Dabei bedeutet:
1. $\mathfrak{g}$ ist total vollständig,
2. in $\mathfrak{g}$ gilt der totale Gruppensatz,
3. $\mathfrak{g}$ ist total abgeschlossen.

[23]) Vgl. Hasse [1], Krull [4], S. 38. Die total t-vollständigen Halbgruppen sind genau die Halbgruppen mit Z. P. E. (Zerlegungssatz in Primelemente: Jedes ganze Element läßt sich eindeutig als Produkt von Primelementen darstellen). Satz 9 und Beweis ist einfacher als die bisherigen Beweise, da nur die totale Vollständigkeit gezeigt zu wreden braucht.

§ 3.

Vollständige Halbgruppen.

Im § 4 werden wir zeigen, wie der Idealbegriff dazu dienen kann, viele Fragen über Halbgruppen auf die Untersuchung der folgenden sehr speziellen Klasse von Halbgruppen zurückzuführen:

Definition 5. Eine Halbgruppe heißt *vollständig*, wenn je zwei Elemente a, b einen größten gemeinsamen Teiler $a \vee b$ besitzen [24]).

Die vollständigen Halbgruppen sind also diejenigen Halbgruppen, die nach unserer früheren Definition v-vollständig sind. Zur Untersuchung werden wir vor allem die t-Ideale heranziehen, die jetzt dadurch charakterisiert werden können, daß sie mit je zwei Elementen auch deren größten gemeinsamen Teiler enthalten.

Außerdem müssen wir noch den Begriff der Quotientenringe eines Integritätsbereiches auf Halbgruppen übertragen. Sei dazu $\mathfrak{g}$ eine beliebige Halbgruppe, S eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, dann soll $\mathfrak{g}_S$ die Halbgruppe aller Quotienten $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathfrak{g},\ b \in S)$ sein. $\mathfrak{g}_S$ heißt eine *Quotientenhalbgruppe* von $\mathfrak{g}$ (vgl. Grell [1]).

Die Nichteinheiten von g_S, die gleichzeitig in $\mathfrak{g}$ liegen, bilden ein s-Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$. Bezeichnen wir dann mit $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ die Quotientenhalbgruppe der Elemente $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathfrak{g},\ b \in \mathfrak{g},\ b \notin \mathfrak{p})$ so wird $\mathfrak{g}_\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_S$. Die Quotientenhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den *s-Primidealen* von $\mathfrak{g}$ [25]).

Ist nun $\mathfrak{g}$ vollständig [26]), so auch jede Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_S$, denn sind s, s' Elemente von S, so liegt mit $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}$ auch

$$\frac{a}{s} \vee \frac{a'}{s'} = \frac{s'a \vee sa'}{ss'}$$

---

[24]) Die Quotientengruppe einer vollständigen Halbgruppe heißt in Prüfer [1] eine multiplikativ-vollständige Menge. Die ersten Untersuchungen über vollständige Halbgruppen stammen von Dedekind [1], [2]. Dedekind entwickelt dabei den Verbandsbegriff.

[25]) Ist z.B. $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung eines endlich-algebraischen Zahlkörpers, $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit der Primidealzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$, so ist der Quotientenring $\mathfrak{o}_\mathfrak{a}$ aller Elemente $\frac{a}{b}$ (a, b ganz, b prim zu a) gleich dem Quotientenring nach dem s-Primideal

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_n.$$

[26]) Für die folgenden Untersuchungen vgl. Krull [5]. Unsere Sätze sind eine abstrakte Fassung der dortigen Sätze über Multiplikations- und Hauptidealringe. Satz 11 ist neu.

in $\mathfrak{g}_S$ und liefert gleichzeitig den größten gemeinsamen Teiler von $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}$ bezüglich der Teilbarkeit in $\mathfrak{g}_S$.

Umgekehrt ist aber auch jede Oberhalbgruppe $\bar{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{g}$ (natürlich $\mathfrak{g} \subseteq \bar{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{G}$), die mit zwei Elementen a, b auch $a \vee b$ enthält, eine Quotientenhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, denn für jedes Element a von $\mathfrak{G}$ gilt $a = \frac{a(1 \vee a)^{-1}}{(1 \vee a)^{-1}}$, wobei $a(1 \vee a)^{-1}$ und $(1 \vee a)^{-1}$ Elemente von $\mathfrak{g}$ sind. Ist $a \in \bar{\mathfrak{g}}$, so folgt $1 \vee a \in \bar{\mathfrak{g}}$ und damit $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_S$, wenn S aus den Einheiten von $\bar{\mathfrak{g}}$ besteht, die in $\mathfrak{g}$ liegen.

Die wichtigsten Quotientenhalbgruppen sind die Quotientenhalbgruppen $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$, bei denen $\mathfrak{p}$ ein t-Primideal von $\mathfrak{g}$ ist, denn es gilt:

Satz 10. *Jede Quotientenhalbgruppe* $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ *nach einem t-Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist linear.*

Jede Nichteinheit von $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ läßt sich nämlich als Quotient $\frac{p}{s}$ $(p \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p})$ darstellen, und sind $\frac{p}{s}$, $\frac{p'}{s'}$ zwei Nichteinheiten, so ist auch

$$\frac{p}{s} \vee \frac{p'}{s'} = \frac{s' p \vee s p'}{s s'}$$

Nichteinheit, da $s' p \vee s p' \in \mathfrak{p}$.

Für jedes $a \in \mathfrak{G}$ folgt also aus

$$\frac{1}{1 \vee a} \vee \frac{1}{1 \vee a^{-1}} = 1,$$

daß $\frac{1}{1 \vee a}$ oder $\frac{1}{1 \vee a^{-1}}$ Einheit von $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ ist, d. h. $a \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Satz 11. *Es sei* N *eine Menge von t-Primidealen von* $\mathfrak{g}$ *derart, daß jede Nichteinheit von* $\mathfrak{g}$ *in mindestens einem* $\mathfrak{p} \in N$ *liegt, dann ist* $\mathfrak{g}$ *Durchschnitt der linearen Oberhalbgruppen* $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} \in N)$

$$\mathfrak{g} = \bigcap_N \mathfrak{g}_\mathfrak{p}.$$

Denn ist $a \notin \mathfrak{g}$, so ist $(1 \vee a)^{-1}$ Nichteinheit von $\mathfrak{g}$. Also gibt es ein $\mathfrak{p} \in N$ mit $(1 \vee a)^{-1} \in \mathfrak{p}$, und hieraus folgt $a \notin \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Satz 12. *Enthält* N *alle maximalen t-Primideale, so gilt für alle t-Ideale* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{g}$ *die Durchschnittsdarstellung* $\mathfrak{a} = \bigcap_N \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Denn ist $a \notin \mathfrak{a}$, so ist $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$. Es gibt also ein $\mathfrak{p} \in N$ mit $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{p}$, woraus wieder $a \notin \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ folgt.

Diese Sätze gestatten zunächst für vollständige Halbgruppen Fragen über die linearen Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ in rein idealtheoretische Fragen zu verwandeln. Diese Reduktion auch für allgemeinere Halbgruppen durchzuführen, ist das Ziel von § 4.

§ 4.

Idealbrüche.

Die Konstruktion der vollständigen Halbgruppe, auf die die Struktur-
untersuchung allgemeinerer Halbgruppen zurückgeführt werden soll, ist
z. B. für total abgeschlossene Halbgruppen $\mathfrak{g}$ leicht geschehen, denn dann
bilden ja die sämtlichen ganzen v-Ideale von $\mathfrak{g}$ ihrerseits eine vollständige
Halbgruppe. Ebenso, wenn $\mathfrak{g}$ eine Multiplikationshalbgruppe bezüglich
irgendeines Idealsystems ist, d. h. also wenn jedes endliche Ideal umkehrbar
ist, so bilden die ganzen Ideale der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, wobei $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ endliche Ideale
sind, eine vollständige Halbgruppe. Gehört nämlich noch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ dazu, so auch
der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$; denn dieser ist:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})^{-1}.$$

Aber wir brauchen von unserer Halbgruppe, in der etwa das System der
r-Ideale gegeben sei, nur vorauszusetzen, daß sie r-abgeschlossen ist, um auf
eine vollständige Halbgruppe zu kommen. Denn ist $\mathfrak{g}$ r-abgeschlossen, so
bilden die endlichen r_a-Ideale eine Halbgruppe; wir können also deren Quo-
tientengruppe bilden. Diese besteht aus den „*Idealbrüchen*“ $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wobei $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$
endliche r_a-Ideale sind. Wir definieren dann für zwei Idealbrüche $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$
wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Es wird dadurch die Relation $\subseteq$ fortgesetzt in die Quotienten-
gruppe.

Betrachten wir nun alle Idealbrüche $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq 1$. Diese bilden eine Halb-
gruppe $\mathfrak{h}$, und zwar eine vollständige Halbgruppe. Der größte gemeinsame
Teiler von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ und $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$ ist natürlich durch $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ gegeben. Ist $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq 1$, so
nennen wir $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ einen „*ganzen Idealbruch*“. Die vollständige Halbgruppe der
ganzen Idealbrüche ersetzt uns den Kroneckerschen Funktionalring, wie er
in Prüfer [1] konstruiert worden ist[27]). Das wichtige Ergebnis, das Krull [5]
über den Funktionalring beweist, läßt sich auf $\mathfrak{h}$ übertragen. Es handelt
sich dabei um die linearen Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ einerseits, $\mathfrak{h}$ andererseits.
Ist $\mathfrak{L}$ eine lineare Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$, so bilden die Elemente a von $\mathfrak{G}$,
deren Hauptideal (a) in $\mathfrak{L}$ liegt, ersichtlich eine ebenfalls lineare Oberhalb-
gruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{g}$. Enthält $\mathfrak{L}$ mit endlich vielen Elementen auch deren größten
gemeinsamen Teiler, so hat $\mathfrak{B}$ noch folgende Eigenschaft:

$\mathfrak{B}$ enthält mit endlich vielen Elementen $a_1, \ldots, a_n$ auch das r-Ideal
$(a_1, \ldots, a_n)_r$.

---

[27]) Man überzeugt sich leicht, daß für einen d-abgeschlossenen Integritätsbereich die Halbgruppe der ganzen Hauptideale des Kroneckerschen Funktionalringes (vgl. Krull [5]) isomorph zur Halbgruppe der ganzen d_a-Idealbrüche ist.

Nennen wir Halbgruppen mit dieser Eigenschaft r-Halbgruppen, so können wir unser Ergebnis kurz so fassen:

Jede lineare t-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$ liefert eine lineare r-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{g}$.

Dieser Satz läßt sich nun umkehren. Ist nämlich eine lineare r-Oberhalbgruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{g}$ gegeben, so zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{B}$ auch r_a-Oberhalbgruppe ist. Dazu sei $d \in (a_1, \ldots, a_n)_{r_a}$, $a_\nu \in \mathfrak{B}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, d. h. es gibt ein endliches r-Ideal $\mathfrak{c} = (c_1, \ldots, c_m)_r$, so daß $d\,\mathfrak{c} \subseteq (a_1, \ldots, a_n)_r \mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{B}$ linear ist, gibt es unter den Elementen $c_1, \ldots, c_m$ eines — etwa c_1 —, so daß $c_1^{-1} c_\nu \in \mathfrak{B}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$. Dann folgt wegen

$$d\,(1, c_1^{-1} c_2, \ldots, c_1^{-1} c_m)_r \subseteq (a_1, \ldots, a_n)_r\,(1, c_1^{-1} c_2, \ldots, c_1^{-1} c_m)_r,$$

daß d in einem endlichen r-Ideal liegt, das aus lauter Elementen von $\mathfrak{B}$ erzeugt wird, also muß d in $\mathfrak{B}$ liegen. $\mathfrak{B}$ ist somit lineare r_a-Oberhalbgruppe, woraus weiter folgt, daß für jedes endliche r_a-Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)_{r_a}$ stets $\mathfrak{a}$ in dem aus $a_1, \ldots, a_n$ erzeugten s-Ideal von $\mathfrak{B}$ enthalten ist. $\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ ist also Hauptideal in $\mathfrak{B}$. Wir definieren jetzt eine lineare Oberhalbgruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{h}$ durch $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{L}$, wenn

$$\mathfrak{a}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{L}$ ist dann eine lineare t-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$ und enthält ein Hauptideal (a) genau dann, wenn a in $\mathfrak{B}$ liegt. Insgesamt erhalten wir unter Berücksichtigung von § 3:

Satz 13. *Die linearen r-Oberhalbgruppen einer r-abgeschlossenen Halbgruppe entsprechen umkehrbar eindeutig den linearen t-Oberhalbgruppen der Halbgruppe* $\mathfrak{h}$ *der ganzen Idealbrüche und damit den t-Primidealen von* $\mathfrak{h}$.

Als Folgerung dieses Satzes ergibt sich sofort:

Satz 14. *Jede r-abgeschlossene Halbgruppe ist Durchschnitt von linearen r-Oberhalbgruppen.*

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des bekannten Fundamentalsatzes der Bewertungstheorie aus Krull [3]:

Jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich ist Durchschnitt von Bewertungsringen.

Denn die linearen d-Oberhalbgruppen eines Integritätsbereiches sind ja offensichtlich gerade die Bewertungsoberringe.

Unsere Methode gestattet aber auch sofort ein in Krull [5] aufgeworfenes Problem zu lösen. Wir definieren dazu nach Krull das *totale* r_b*-Idealsystem* einer r-abgeschlossenen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ folgendermaßen:

Ist $\mathfrak{a}$ eine beliebige Untermenge von $\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{a}^{-1} \neq 0)$, so sei $\mathfrak{a}_{r_b} = \bigcap \mathfrak{a}\mathfrak{B}$, wobei $\mathfrak{B}$ alle linearen r-Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ durchläuft.

Berücksichtigen wir jetzt den Zusammenhang der linearen r-Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ mit den linearen t-Oberhalbgruppen von $\mathfrak{h}$, so ergibt sich mit Satz 12, daß ein Element c von $\mathfrak{G}$ genau dann in $\mathfrak{a}_{r_b}$ liegt, wenn das Hauptideal (c) in dem t-Ideal von $\mathfrak{h}$ liegt, das aus den Hauptidealen (a) mit $a \in \mathfrak{a}$ erzeugt wird. Wegen der Endlichartigkeit der t-Ideale gibt es dann aber endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{a}$, so daß (c) schon in dem aus $(a_1), \ldots, (a_n)$ erzeugten t-Ideal liegt. Das heißt aber $c \in (a_1, \ldots, a_n)_{r_a}$. Erinnern wir uns an die Definition des totalen r_a-Idealsystems (S. 540), so erhalten wir also für jedes $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a}_{r_b} = \mathfrak{a}_{r_a}.$$

Satz 15. *Das totale r_b-System ist identisch mit dem totalen r_a-System.*

Für Integritätsbereiche war in Krull [5] bewiesen, daß für endliche Ideale stets $\mathfrak{a}_{d_b} = \mathfrak{a}_{d_a}$ ist. Satz 15 war dort für die d_b-Ideale als Vermutung ausgesprochen.

In Satz 15 ist insbesondere folgendes enthalten:

Gilt in $\mathfrak{g}$ der r-Halbgruppensatz, so folgt eine Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{g} = \bigcap_\tau \mathfrak{B}_\tau$, wobei $\mathfrak{B}_\tau$ alle linearen r-Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ durchläuft, und auch für jedes r_s-Ideal $\mathfrak{a}$ gilt dann $\mathfrak{a} = \bigcap_\tau \mathfrak{a}\mathfrak{B}_\tau$. Ist umgekehrt eine Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{g} = \bigcap_\tau \mathfrak{B}_\tau$ mit beliebigen linearen Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ gegeben, und setzen wir für eine beliebige Untermenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{a}^{-1} \neq 0)$:

$$\mathfrak{a}_w = \bigcap_\tau \mathfrak{a}\mathfrak{B}_\tau,$$

so gilt der w-Halbgruppensatz, und alle $\mathfrak{B}_\tau$ sind w-Oberhalbgruppen. Krull [5] hat an einem Beispiel gezeigt, daß im allgemeinen aber nicht mehr $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a}_{w_s}$ gilt; diese Beziehung können wir jedoch erschließen, wenn $\mathfrak{B}_\tau$ *alle* w-Oberhalbgruppen durchläuft.

§ 5.

Total abgeschlossene Halbgruppen.

In der Bewertungstheorie [28]) werden diejenigen Integritätsbereiche, die Durchschnitt von Bewertungsringen sind (das sind also die ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche), Hauptordnungen genannt. Für beliebige Halbgruppen und Idealsysteme definieren wir entsprechend:

Eine Halbgruppe heißt *r-Hauptordnung*, wenn sie Durchschnitt von linearen r-Halbgruppen ist.

Satz 14 läßt sich dann so formulieren:

Eine Halbgruppe ist genau dann r-Hauptordnung, wenn sie r-abgeschlossen ist.

[28]) Für alle bewertungstheoretischen Definitionen vgl. Krull [4], § 5.

Unter den Hauptordnungen lassen sich nun leicht besonders wichtige Typen aussondern, zunächst die endlichen Hauptordnungen:

Eine r-Hauptordnung heißt *endlich*, wenn eine Durchschnittsdarstellung durch lineare r-Oberhalbgruppen möglich ist, bei der jedes ganze Element nur in höchstens endlich vielen der linearen r-Oberhalbgruppen Nichteinheit ist.

Eine andere Einteilungsmöglichkeit der Hauptordnungen ergibt sich, wenn wir auf den Typ der linearen Halbgruppen achten, die zur Durchschnittsdarstellung nötig sind. Es genügt nämlich bei vielen wichtigen Integritätsbereichen bekanntlich Bewertungen durch reelle Zahlen heranzuziehen, man spricht von speziellen Bewertungen. Der Bewertungsring einer speziellen Bewertung ist dadurch charakterisiert, daß er total abgeschlossen ist. Wir definieren allgemein:

Eine lineare Halbgruppe heißt *speziell*, wenn sie total abgeschlossen ist. Eine Halbgruppe, die Durchschnitt von speziellen linearen r-Halbgruppen ist, heißt *spezielle r-Hauptordnung*.

Krull [6] hat nun folgende Vermutung ausgesprochen: Jeder total abgeschlossene Integritätsbereich ist spezielle Hauptordnung.

Dieser Satz scheint, wenn er überhaupt richtig ist, sehr tief zu liegen. Es ist dagegen leicht, folgenden Spezialfall zu beweisen:

Jede total abgeschlossene endliche Hauptordnung ist speziell.

Unser Beweis, der für beliebige endliche r-Hauptordnungen gilt, stützt sich auf einen Hilfssatz, zu dessen Formulierung wir folgende Definition voranschicken:

$\mathfrak{B}$ sei eine lineare Halbgruppe: $a \in \mathfrak{B}$, $b \in \mathfrak{B}$. Sind dann alle Potenzen $a, a^2, a^3, \ldots$ Teiler von b, so heißt b von höherer Stufe als a. Ist $a \notin \mathfrak{B}$, so heißt a von höchster Stufe gebrochen, falls es kein Element von höherer Stufe als a^{-1} gibt. Unser Hilfssatz lautet dann:

$\mathfrak{g}$ sei eine endliche Hauptordnung: $\mathfrak{g} = \bigcap_\tau \mathfrak{B}_\tau$. Ein Element a, das in keinem $\mathfrak{B}_\tau$ von höchster Stufe gebrochen ist, ist fast abhängig von $\mathfrak{g}$ (siehe Satz 6).

Beweis. a ist nur in endlich vielen $\mathfrak{B}_\tau$ gebrochen, etwa in $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, r)$. Nach Voraussetzung gibt es in jedem $\mathfrak{B}_\nu$ ein Element b_ν, so daß b_ν von höherer Stufe in $\mathfrak{B}_\nu$ als a^{-1} ist, ohne Einschränkung seien diese b_ν ganz. Dann ist aber $b_1 \ldots b_r a^n$ ganz für alle $n = 1, 2, \ldots$.

Ist demnach $\mathfrak{g}$ eine total abgeschlossene endliche Hauptordnung, so ist jedes gebrochene Element a in mindestens einem $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\tau$ von höchster Stufe gebrochen. $\mathfrak{B}$ hat dann also ein minimales s-Primideal $\mathfrak{p}$, und a ist auch in der speziellen linearen Halbgruppe $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ gebrochen, womit bewiesen ist, daß $\mathfrak{g}$ eine endliche spezielle Hauptordnung ist.

Es ist vielleicht von Interesse, ein Beispiel dafür anzugeben, daß der Hilfssatz für unendliche Hauptordnungen falsch ist. Dazu sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Elemente

$$\alpha = \{a_1\omega + b_1, a_2\omega + b_2, \ldots\},$$

wobei ω ein Symbol ist, und a_ν, b_ν beliebige ganze rationale Zahlen sind, die der Einschränkung genügen sollen, daß nur endlich viele $a_\nu \neq 0$ sind. Ist ein weiteres Element $\alpha' = \{a_1'\omega + b_1', \ldots\}$, so soll $\alpha\alpha'$ das Element $\{(a_1 + a_1')\omega + b_1 + b_1', \ldots\}$ bedeuten. Ferner werde gesetzt: $a\omega + b \geqq 0$, wenn $a > 0$ ist, oder wenn $a = 0$ und $b \geqq 0$ ist. Es sei dann $\mathfrak{g}$ die Halbgruppe der Elemente α, für die $a_\nu\omega + b_\nu \geqq 0$ für alle ν ist; $\mathfrak{g}$ ist ersichtlich eine unendliche Hauptordnung. Jedes ν liefert eine lineare Oberhalbgruppe $\mathfrak{B}_\nu$ der Elemente, für die $a_\nu\omega + b_\nu \geqq 0$ ist. Das Element $\{-1, -1, -1, \ldots\}$ ist in keinem dieser $\mathfrak{B}_\nu$ von höchster Stufe gebrochen, dennoch ist es nicht fast abhängig. Ob dieses Beispiel aber auch den allgemeinen Satz, daß jede total abgeschlossene Hauptordnung speziell ist, widerlegen kann, ist damit *nicht* entschieden.

Man wird natürlich zur Untersuchung der total abgeschlossenen Halbgruppen $\mathfrak{g}$ versuchen müssen, die Tatsache, daß jedes v-Ideal umkehrbar ist, auszunutzen. Sei dazu $\mathfrak{h}$ die Halbgruppe der ganzen v-Ideale von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ ist total v-vollständig.

Wäre also jede total v-vollständige Halbgruppe spezielle t-Hauptordnung, so überhaupt jede total abgeschlossene Halbgruppe.

Dieses — nach Satz 11 rein idealtheoretische — Problem kann ich aber nicht lösen.

Eine weitere Vermutung von Krull [6] besagt, daß jeder total abgeschlossene primäre Integritätsbereich ein spezieller Bewertungsring ist. Da ein primärer Integritätsbereich $\mathfrak{I}$ (Quotientenkörper $\mathfrak{K}$) dadurch charakterisiert ist, daß es keinen Quotientenring $\mathfrak{I}_S$ mit $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_S \subset \mathfrak{K}$ gibt, so werden wir eine beliebige Halbgruppe $\mathfrak{g}$ (Quotientengruppe $\mathfrak{G}$) primär nennen, falls es keine Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_S$ mit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_S \subset \mathfrak{G}$ gibt. Eine primäre Halbgruppe enthält also genau ein s-Primideal, das Primideal $\mathfrak{p}$ aller Nichteinheiten. Da $\mathfrak{p}$ minimal ist, ist $\mathfrak{p}$ auch das einzige t-Primideal. Daß die Vermutung von Krull nun jedenfalls nicht auf beliebige primäre Halbgruppen übertragen werden darf, ist an einem einfachen Beispiel zu sehen:

$\mathfrak{G}$ sei die Menge der Elemente

$$\alpha = \{a + a'\vartheta,\ a - a'\vartheta\},$$

wobei a, a' beliebige ganzrationale Zahlen sind, und ϑ eine feste reelle Irrationalzahl bedeutet. Ist $\beta = \{b + b'\vartheta,\ b - b'\vartheta\}$ ein weiteres Element von $\mathfrak{G}$, so sei

$$\alpha\beta = \{a + b + (a' + b')\,\vartheta,\ a + b - (a' + b')\,\vartheta\}.$$

$\mathfrak{G}$ ist dann eine Gruppe, und es sei $\mathfrak{g}$ die Halbgruppe der Elemente α mit

$$a + a' \vartheta \geqq 0, \quad a - a' \vartheta \geqq 0.$$

$\mathfrak{g}$ ist als spezielle Hauptordnung total abgeschlossen, aber nicht linear, denn

$$\{\vartheta, -\vartheta\} \notin \mathfrak{g}, \quad \{-\vartheta, \vartheta\} \notin \mathfrak{g}.$$

Ist nun α eine Nichteinheit von $\mathfrak{g}$, so ist

$$a + a' \vartheta > 0, \quad a - a' \vartheta > 0,$$

und daher gibt es für jedes $\beta \in \mathfrak{G}$ einen Exponenten n derart, daß $\beta\alpha^n \in \mathfrak{g}$ ist, d. h. $\mathfrak{g}$ ist primär.

$\mathfrak{g}$ liefert zugleich ein Beispiel einer v-Multiplikationshalbgruppe (da $\mathfrak{g}$ sogar total abgeschlossen ist), in der der v-Gruppensatz nicht gilt (da $\mathfrak{g}$ sonst als primäre Halbgruppe linear wäre, siehe unten).

Ist eine total abgeschlossene Halbgruppe primär, so braucht also die Halbgruppe der ganzen v-Ideale durchaus nicht primär zu sein. Um dies zu verdeutlichen, sei jetzt $\mathfrak{g}$ eine beliebige total abgeschlossene Halbgruppe und $\mathfrak{h}$ die Halbgruppe der ganzen v-Ideale.

π sei ein t-Primideal von $\mathfrak{h}$. Die Elemente a von $\mathfrak{G}$ mit $(a) \in \pi$ bilden dann zunächst ein s-Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{p}$ ist aber sogar t-Primideal von $\mathfrak{g}$. π kann nur aus solchen v-Idealen $\mathfrak{c}_v$ bestehen mit $\mathfrak{c}_v \subseteq \mathfrak{p}$. Denn aus $c \in \mathfrak{c}_v \in \pi$ folgt $(c) \in \pi$, d. h. $c \in \mathfrak{p}$. π^* sei das s-Primideal aller $\mathfrak{c}_v \subseteq \mathfrak{p}$. π^* ist genau dann t-Ideal, wenn aus $\mathfrak{c}_v \subseteq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{c}'_v \subseteq \mathfrak{p}$ auch $\mathfrak{c}_v + \mathfrak{c}'_v \subseteq \mathfrak{p}$ folgt. Da $\mathfrak{p}$ kein v-Ideal zu sein braucht, wird π^* also im allgemeinen auch kein t-Ideal sein.

Wir zeigen jetzt, daß die Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ genau aus den Elementen besteht, deren Hauptideal in der Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{h}_{\pi^*}$ liegt. Ist nämlich $(c) \in \mathfrak{h}_{\pi^*}$, d. h. $(c) = \frac{\mathfrak{a}_v}{\mathfrak{b}_v}$ mit $\mathfrak{b}_v \notin \pi^*$, so ist also $\mathfrak{b}_v \subsetneq \mathfrak{p}$. Es gibt ein Element $b \in \mathfrak{b}_v$, $b \notin \mathfrak{p}$. Da cb ganz ist, folgt also $c \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$. Aus $c \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ folgt natürlich sofort $(c) \in \mathfrak{h}_{\pi^*}$. $\mathfrak{h}_\pi$ wird dagegen im allgemeinen mehr Hauptideale als $\mathfrak{h}_{\pi^*}$ enthalten können.

Für primäre Halbgruppen ergibt sich hieraus:

Eine total abgeschlossene primäre Halbgruppe $\mathfrak{g}$ ist genau dann linear, wenn für zwei beliebige v-Ideale $\mathfrak{c}_v \subset 1$, $\mathfrak{c}'_v \subset 1$ stets $\mathfrak{c}_v + \mathfrak{c}'_v \subset 1$ gilt.

Denn dann ist in der Halbgruppe $\mathfrak{h}$ der ganzen v-Ideale von $\mathfrak{g}$ das Ideal π^* aller Nichteinheiten ein t-Ideal und $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\pi^*}$ also linear.

Viel einfacher werden die Verhältnisse, falls wir von unserer Halbgruppe statt des totalen v-Gruppensatzes den *Gruppensatz* für irgendein Idealsystem (etwa r-Idealsystem) voraussetzen. In $\mathfrak{g}$ soll also jedes endliche r-Ideal $\mathfrak{a}$ umkehrbar sein, und $\mathfrak{a}^{-1}$ soll wieder ein endliches r-Ideal sein. Wir betrachten dann die vollständige Halbgruppe $\mathfrak{h}$ der endlichen ganzen r-Ideale, und dieselben Überlegungen wie oben ergeben diesmal:

Die t-Primideale von $\mathfrak{h}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den r_s-Primidealen von $\mathfrak{g}$.

Die linearen r-Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ sind genau die Quotientenhalbgruppen $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ nach den r_s-Primidealen $\mathfrak{p}$.

Für Integritätsbereiche und d-Ideale findet sich der Satz (mit anderem Beweis) in Krull [5].

Zum Schluß behandeln wir den noch einfacheren Fall, daß in $\mathfrak{g}$ der totale t-Gruppensatz gilt. Dann ist nämlich die Halbgruppe $\mathfrak{h}$ der ganzen t-Ideale total t-vollständig. Demnach läßt sich in $\mathfrak{h}$ jedes Element eindeutig in ein Produkt von Primelementen zerlegen, und die linearen t-Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ sind alle diskret, d. h. die Halbgruppe der Hauptideale ist isomorph zur Additionshalbgruppe der nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen.

$\mathfrak{g}$ wird also Durchschnitt von diskret linearen t-Oberhalbgruppen $\mathfrak{B}_\tau$, wobei jedes ganze Element höchstens in endlich vielen $\mathfrak{B}_\tau$ Nichteinheit ist. Wir nennen $\mathfrak{g}$ deshalb eine endliche diskrete t-Hauptordnung.

Nun ist, wie leicht zu sehen, jede endliche diskrete Hauptordnung $\mathfrak{g}$ (z. B. eine endliche diskrete s-Hauptordnung) total abgeschlossen und erfüllt die v-Maximalbedingung. Nach Satz 7 gilt also in $\mathfrak{g}$ der totale t-Gruppensatz, und $\mathfrak{g}$ ist auch endliche diskrete t-Hauptordnung. Der Begriff „endliche diskrete Hauptordnung" ist somit *unabhängig* vom Idealsystem, und die Quotientenhalbgruppen nach den minimalen Primidealen sind genau die linearen t-Oberhalbgruppen.

Literaturverzeichnis.

J. Arnold.

[1] Ideale in kommutativen Halbgruppen, Rec. Math. Soc. Math. Moscou **36** (1929).

A. H. Clifford.

[1] Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups, Ann. of Math. II. s. **39** (1938).

R. Dedekind.

[1] Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinschaftlichen Teiler, Ges. Werke XXVIII, Bd. 2.

[2] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Ges. Werke XXX, Bd. 2.

D. M. Dribin.

[1] Prüfer ideals in commutative rings, Duke Math. J. **4** (1938).

H. Grell.

[1] Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, Math. Annalen **97** (1927).

H. Hasse.

[1] Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen, J. reine angew. Math. **159** (1928).

G. Köthe.
[1] Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie, Jahresber. d. Deutsch. Math. **47** (1937).

W. Krull.
[1] Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen **101** (1929).
[2] Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale, Math. Zeitschr. **31** (1930).
[3] Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine angew. Math. **167** (1931).
[4] Idealtheorie, Erg. d. Math. Bd. 4, Berlin 1935.
[5] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, Beitrag I, Math. Zeitschr. **41** (1936).
[6] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, Beitrag II, Math. Zeitschr. **41** (1936).

E. Noether.
[1] Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1927).

H. Prüfer.
[1] Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften von Körpern, J. reine angew. Math. **168** (1932).

B. L. v. d. Waerden.
[1] Moderne Algebra II, Grundl. Math. Wiss. in Einzeldarst. **34** (1931).

(Eingegangen am 15. März 1939.)

Über die asymptotische Darstellung der summatorischen Funktion von Dirichletreihen mit positiven Koeffizienten.

Von

Alfred Kienast in Küsnacht-Zürich.

Unter dem obigen Titel hatte ich hier vor kurzem eine Arbeit veröffentlicht [1]), in deren Besprechung A. E. Ingham [2]) auf eine Lücke in der Beweisführung hinweist. Es ist leicht sie zu ergänzen, was ich hier ausführe. Dies bedingt eine Vervollständigung des Satzes wie folgt:

Satz 1. *Es sei*

(i) $f(s) = \sum_1^\infty a_n n^{-s}$ *konvergent für* $1 < \sigma$, a_n *reell und* $a_n \geqq 0$;

(ii) $f(s) = (s-1)^{-1-\varrho}\{b_0 + b_1(s-1) + b_2(s-1)^2 + \ldots\}$, $0 \leqq \varrho \leqq 1$, *und die Klammer eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius größer als Null ist, also wegen* (i) b_ν *reell,* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$;

(iii) $f(s)$ *sei für* $0 < \alpha_1 \leqq \sigma \leqq 1$, $0 \leqq |t| \leqq T$ *mit Ausnahme von* $s = 1$ *regulär und*

$$|f(s)| \leqq c_1 t^b \lg^\tau t, \quad 0 \leqq b \leqq \tfrac{3}{2}, \qquad 0 \leqq \tau,$$

für $0 < t_0 \leqq t$; *also ist*

$$\Phi(s) = [f(s) - b_0 s (s-1)^{-1-\varrho} - (b_1 - b_0) s (s-1)^{-\varrho}] s^{-1}$$

stetig für $1 \leqq \sigma$, $|t| \leqq T$.

Definiert man noch

$$\psi(x) = \sum_1^x a_n,$$

$$H(u) = \psi(e^u) e^{-u} u^{-\varrho}, \quad u \gtrless 0,$$

dann ist

$$(1) \qquad H(\omega) = b_0 \Gamma^{-1}(\varrho+1) - (b_0 - b_1)\Gamma^{-1}(\varrho)\omega^{-1} + \omega^{-\varrho}(2\pi)^{-1} S_n + \theta \Gamma^{-1}(\varrho - n)(r\omega)^{-n-1} + \omega^{-1} R,$$

$$\omega^{-\varrho}(2\pi)^{-1} S_n = \sum_{\nu=2}^{n} (b_0 - b_1 + \ldots (-1)^\nu b_\nu)(-1)^\nu \Gamma^{-1}(\varrho + 1 - \nu)\omega^{-\nu}$$

$$|R| \leqq c_2 \omega T^{-\frac{1}{2}} + c_3 \omega^{-1-\varrho} T^{-\frac{1}{2}} \log^\tau T + e^{-\omega(1-\alpha)}\{c_4 T^b \log^\tau T + c_5 T^{1-\varrho}\}$$

$$|\theta| < d \ (\textit{Konstante für } \omega_0 < \omega);$$

[1]) Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 115—126.

[2]) Zentralblatt für Math. **18** (1938), S. 355.

c_1 *und die nachfolgenden* c *bedeuten positive Konstanten, die unabhängig von den Variabeln in den betreffenden Relationen bestimmbar sind und* $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq 1$.

Spezialisiert man diesen Satz für Funktionen, für die das in Voraussetzung (iii) auftretende Gebiet links von $\sigma = 1$ eingeschränkt ist, durch die Beziehung [3])

$$\alpha_1 = 1 - k\,(\log T)^{-\gamma},$$

k eine Konstante, $\frac{4}{5} < \gamma < 1$, $0 < t_0 < T$, so erhält man unverändert den Satz 2 (Math. Zeitschr. **44**, 117), also für $H(\omega)$ *die im Sinne von Poincaré asymptotische Reihe*

$$(2) \qquad H(\omega) = \sum_{\nu=0}^{n} (b_0 - b_1 + \ldots (-1)^{\nu} b_{\nu})\,(-1)^{\nu}\,\omega^{-\nu}\,\Gamma^{-1}(\varrho + 1 - \nu) + \theta\,\Gamma^{-1}(\varrho - n)\,(r\omega)^{-n-1},$$

$$1 - \alpha_1 < r < 1.$$

Das Restglied R ist hier nur dann zu berücksichtigen, wenn $\varrho = 0, 1$. Dann sind die Terme dieser asymptotischen Reihe Null mit Ausnahme des ersten (für $\varrho = 0$) und des ersten und zweiten für $\varrho = 1$.

Die erwähnte Lücke findet sich auf S. 121 in der Abschätzung des reellen Teiles des Integrals

$$J_5 = i \int_{\alpha}^{1} \Phi(\sigma)\,[1 + i(\sigma - 1)\,T^{-1}]\,e^{-\omega(1-\sigma)}\,d\sigma.$$

Setzt man für $\alpha \leqq \sigma \leqq 1$, die Voraussetzungen berücksichtigend,

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= (\sigma - 1)^{-\varrho}\,\Phi^*(\sigma) = e^{-i\pi\varrho}\,(1 - \sigma)^{-\varrho}\,\Phi^*(\sigma) \\ &= [\cos \pi\varrho - i \sin \pi\varrho]\,\Psi(\sigma) \\ &= \Phi_1(\sigma) - i\,\Phi_2(\sigma), \end{aligned}$$

wo Φ^* im erwähnten Konvergenzkreise eindeutig ist, so findet man

$$\begin{aligned} R(J_5) &= \int_{\alpha}^{1} \{\Phi_2 - (\sigma - 1)\,T^{-1}\,\Phi_1\}\,e^{-\omega(1-\sigma)}\,d\sigma \\ &= J_{51} - J_{52}. \end{aligned}$$

Für J_{52} gilt die Abschätzung, wie sie in Math. Zeitschr. **44**, 121 (8) für den dortigen $R(J_5)$ angegeben ist, nämlich

$$|J_{52}| \leqq c_{22}\,T^{-1}\,\omega^{-2}.$$

---

[3]) E. C. Titchmarsh, Quart. J. Math. Oxf. ser. 9 (1938), S. 97—108.

Somit ist

$$J_{51} = \int_{\alpha}^{1} \Phi_2 e^{-\omega(1-\sigma)} d\sigma$$

die Ergänzung, die noch zu ermitteln ist.

Man findet, wenn für $\sigma^{-1} = [1 - (1 - \sigma)]^{-1}$ die Reihe nach Potenzen von $1 - \sigma$ benutzt wird, was zulässig ist, da unter dem Integralzeichen $0 < 1 - \sigma < 1$ und wenn gesetzt wird

$$\gamma_\nu = b_0 - b_1 + - \ldots (-1)^\nu b_\nu$$

$$\Phi_2(\sigma) = -(1-\sigma)^{1-\varrho} \sin \pi \varrho \{\gamma_2 + \gamma_3 (1 - \sigma) + \gamma_4 (1-\sigma)^2 + \ldots\}.$$

Was die letztere Reihe anbelangt, setze man in Voraussetzung (ii) Satz 1 $s = 1 + u$, also

$$f(1+u) = u^{-1-\varrho} g(u),$$

dann ist

$$(1-u)^{-1} g(-u) = \sum_0^\infty \gamma_\nu u^\nu$$

eine Reihe mit reellen Koeffizienten und von Null verschiedenem Konvergenzradius (der nicht größer als 1 ist). Somit gibt es zwei positive Konstanten M, r derart, daß

$$|\gamma_\nu| < M r^{-\nu}$$

und man wähle α_1, $r < 1$ so, daß $1 - \alpha_1 < r$, was möglich ist. Somit

$$J_{51} = \sin \pi \varrho \sum_{\nu=2}^{\infty} \gamma_\nu \int_{\alpha}^{1} e^{-\omega(1-\sigma)} (1-\sigma)^{\nu-1-\varrho} d(1-\sigma)$$

$$= -\sin \pi \varrho \sum_{\nu=2}^{n} \gamma_\nu \omega^{-\nu+\varrho} \int_0^{\omega(1-\alpha)} e^{-u} u^{\nu-1-\varrho} du - V_n.$$

Hier ist $n \geqq 2$ eine beliebige, aber feste ganze Zahl, während $a = \omega(1-\alpha)$ nachher ins Unendliche wachsen soll. Man führt daher für das Integral ein: $\int_0^a = \int_0^\infty - \int_a^\infty$. Das gibt zunächst die abbrechende Reihe

$$\tfrac{1}{2} S_n = -\sin \pi \varrho \sum_{\nu=2}^{n} \gamma_\nu \omega^{-\nu+\varrho} \Gamma(\nu - \varrho)$$

$$= \pi \sum_{\nu=2}^{n} (-1)_\nu \gamma_\nu \omega^{-\nu+\varrho} \Gamma^{-1}(\varrho + 1 - \nu)$$

und dann das Restglied

$$W_n = \sin \pi \varrho \sum_{\nu=2}^{n} \gamma_\nu \omega^{-\nu+\varrho} \int_a^\infty e^{-u} u^{\nu-1-\varrho} du,$$

so daß

$$2 J_{51} = S_n + 2 W_n - 2 V_n.$$

Es bleibt übrig, W_n und V_n abzuschätzen. In W_n bedarf man einer Abschätzung des Integrals

$$D_m = \int_a^\infty e^{-u} u^m \, du,$$

wo m fest ist und später $a = \omega(1-\alpha) \to \infty$. Wenn $u > m$ ist, ist der Integrand eine abnehmende Funktion mit positiven Werten. Folglich

$$D_m \leqq e^{-a} a^{m+2} \int_a^\infty u^{-2} \, du \leqq e^{-a} a^{m+1} \quad \text{für} \quad a > m+2.$$

So ergibt sich

$$|W_n| \leqq \{ \sum_{\nu=2}^{n} |\gamma_\nu| (1-\alpha)^{\nu-2} \} e^{-\omega(1-\alpha)} (1-\alpha)^{2-\varrho} \leqq M_1 (1-\alpha)^{2-\varrho} e^{-\omega(1-\alpha)},$$

M_1 von n, ω, α unabhängig, da $0 < 1-\alpha \leqq 1-\alpha_1$ im Konvergenzkreis der Reihe liegt. Für V_n erhält man

$$|V_n| \leqq |\sin \pi \varrho| \sum_{n+1}^{\infty} |\gamma_\nu| \int_1^\alpha \dots$$

$$\leqq |\sin \pi \varrho| M \int_1^\alpha \frac{[r^{-1}(1-\sigma)]^{n+1}}{1 - r^{-1}(1-\sigma)} e^{-\omega(1-\sigma)} (1-\sigma)^{-1-\varrho} \, d(1-\sigma)$$

$$\leqq |\sin \pi \varrho| M r^{-n-1} [1 - r^{-1}(1-\alpha_1)]^{-1} \int_1^\infty e^{-\omega(1-\sigma)} (1-\sigma)^{n-\varrho} d(1-\sigma).$$

Diese Abschätzung ist genügend; denn für $\varrho = 0, 1$ ist $J_{51} = 0$. Zusammengenommen ist

$$2 J_{51} = S_n + \theta \, 2\pi \omega^\varrho \Gamma^{-1}(\varrho - n) (r\omega)^{-n-1} \tag{3}$$

und für alle $\omega_0 < \omega$ ist

$$|\theta| < (1+\delta) M [1 - r^{-1}(1-\alpha_1)]^{-1} = d, \qquad \delta > 0.$$

Dies ist der Bestandteil, der in Abschnitt II (Math. Zeitschr. **44**, 119–121) fehlt und dem dort für J (dort in Formel (4)) benutzten Ausdruck zuzufügen ist. Hierdurch werden die folgenden Erörterungen in Math. Zeitschr. **44** nicht beeinflußt, sondern es ist nur nötig, vorstehenden Ausdruck $2 J_{51}$ in den rechten Seiten der Ungleichungen (11) und (13), (Math. Zeitschr. **44**), richtig einzufügen; dann ergibt sich die oben angegebene Behauptung (1) des Satzes. Man hat dabei zu benutzen, daß die früher mit K bezeichnete Konstante den Wert hat

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} \right)^2 d y = 2\pi.$$

Infolge der angegebenen Lücke sind in Math. Zeitschr. **44**, Abschnitt V, die Restglieder der Spezialfälle, in denen ϱ von 0, 1 verschieden ist, zu berichtigen.

Mit der Bezeichnung

$$\zeta^{\varrho}(s) = \sum_{1}^{\infty} \alpha(\varrho, n)\, n^{-s}$$

ergibt sich als Spezialfall von (2) hier die Darstellung durch die asymptotische Reihe

$$\sum_{n=1}^{x} \alpha(\varrho, n) \sim \Gamma^{-1}(\varrho)\, x \log^{\varrho-1} x \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \log^{-\nu} x,$$

wo $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = (\varrho - 1)(\varrho\, \mathfrak{C}_0 - 1), \ldots, \mathfrak{C}_0$ die Eulersche Konstante ist.

Die im Spezialfall 3 (S. 125) bestimmte Konstante Ω bleibt durch vorstehende Ergänzung unbeeinflußt.

(Eingegangen am 22. Februar 1939.)

Über einen Satz zur Theorie der C-summierbaren Reihen*).

Von

Gerhard Lyra in Göttingen.

Im 19. Bande der Mathematischen Zeitschrift haben G. H. Hardy und J. E. Littlewood einen Satz über C-summierbare Reihen bewiesen [1]) und aus diesem einige bekannte Umkehrsätze von neuem gefolgert. In etwas anderer Formulierung lautet dieser

Satz von Hardy-Littlewood. *Seien r und p beide ganzzahlig und $\geqq 0$, ferner $r \leqq p+1$; dann ist für die C_p-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s notwendig und hinreichend, daß die Zahlenfolge $a_n^{(r)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ existiert, welche durch $a_n^{(r)} = a_n$ für $r = 0$ und $a_n^{(r)} = C_{p-r} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{a_\nu^{(r-1)}}{\nu+1}$ für $1 \leqq r \leqq p+1$ definiert wird, und daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)}$ C_{p-r}-summierbar zur Summe s ist.*

Gleichzeitig bewies K. Knopp den folgenden Grenzwertsatz [2]), welchen er ebenfalls zu neuen Beweisen einiger Tauberscher Sätze benutzte.

Satz von Knopp. *Seien r und p beide $\geqq 0$ und $r \geqq p$; dann ist für die C_{p+1}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s notwendig und hinreichend, daß*

$$\binom{r}{0} c_{n+p}^{(0)} + \binom{r+1}{1} c_{n+p-1}^{(1)} + \cdots + \binom{r+p}{p} c_n^{(p)} + \binom{n+p+r+1}{r+1} \sum_{\nu=n+p+1}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1} \to \binom{p+r+1}{r+1} s.$$

*) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg August-Universität zu Göttingen als Dissertation (D 7) angenommen.

[1]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series. Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 67—96.

[2]) K. Knopp, Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 97—113. — Der Satz 4 dieser Abhandlung von K. Knopp ist hier unter Benutzung der Reihe $\sum a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1}$ statt $\sum a_\nu \Big/ \binom{\nu-1}{r+1}$ formuliert.

Beide Sätze sind verschieden gerichtete, aber ungefähr gleich weit reichende Verallgemeinerungen des Reihensatzes, wonach für die C_1-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (mit den Teilsummen s_n) zur Summe s die Konvergenz von

$$s_n + (n+1)\left[\frac{a_{n+1}}{n+2} + \frac{a_{n+2}}{n+3} + \ldots\right] \to s$$

notwendig und hinreichend ist [3]). Im folgenden soll eine neue Verallgemeinerung dieses speziellen Reihensatzes gegeben werden. Dabei ergibt sich die Ausdehnung der Knoppschen C_{p+1}-Summierbarkeitsbedingung auf den Fall $r < p$ und zugleich ein einfacherer Beweis für das Hinreichen dieser Bedingung. Mit Hilfe der neuen Verallgemeinerung lassen sich die von Knopp und Hardy-Littlewood neu hergeleiteten Umkehrsätze ebenso einfach beweisen.

Zur einfacheren Formulierung des zu beweisenden Satzes soll der Begriff „r-fache Reste $r_n^{(r)}$ einer C_k-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$" erklärt werden: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ C_k-summierbar, dann soll $r_n^{(r)} = c_n$ für $r = 0$ und $r_n^{(r)} = C_k\text{-}\sum_{\nu=n}^{\infty} r_\nu^{(r-1)}$ für $r \geqq 1$ gesetzt werden, falls $r_n^{(r-1)}$ schon definiert und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(r-1)}$ C_k-summierbar ist. Diese $r_n^{(r)}$ brauchen für ein $r \geqq 2$ nicht zu existieren. Ist aber für ein $r \geqq 1$ die Folge der r-fachen Reste $r_n^{(r)}$ vorhanden, dann ist für jedes $\lambda = 0, 1, \ldots, r-1$ auch die Folge der Reste $r_n^{(\lambda)}$ vorhanden und $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(\lambda)}$ C_k-summierbar. Unter Verwendung dieses Begriffs [4]) lautet der zu beweisende

Satz I. *Seien r und p beide $\geqq 0$ und $r \leqq p+1$; dann ist für die C_p-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s notwendig und hinreichend, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r}{r}$ C_{p-r}-summierbar, die Folge der r-fachen Reste $r_n^{(r)}$ dieser C_{p-r}-summierbaren Reihe vorhanden und $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(r)}$ C_{p-r}-summierbar zur Summe s ist.*

---

[3]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 504.

[4]) Der hier vollzogene Übergang von den durch iterierte C_{p-r}-Summen gebildeten Größen $a_n^{(r)}$ zu den „r-fachen Resten $r_n^{(r)}$ der C_{p-r}-summierbaren Reihe $\Sigma a_n \Big/ \binom{n+r}{r}$" entspricht innerhalb der linearen Mittelbildungen dem Übergang von den Hölderschen zu den Cesàroschen Mittelbildungen.

Dieser Satz ist für $r = 0$ trivial und geht für $r = p = 1$ in den genannten speziellen Reihensatz über, da die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left[\frac{a_\nu}{\nu+1}+\frac{a_{\nu+1}}{\nu+2}+\ldots\right]=s_n+(n+1)\left[\frac{a_{n+1}}{n+2}+\frac{a_{n+2}}{n+3}+\ldots\right]$$

besteht.

Satz I soll aus dem folgenden Satz II erschlossen werden, der sich als äquivalent mit dem Satz I erweisen wird:

Satz II. *Seien r und p beide $\geqq 0$ und $r \leqq p+1$; dann ist für die C_{p+1}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s notwendig und hinreichend, daß* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ *C_{p-r}-summierbar und* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *C_p-summierbar zur Summe s ist, wo* $\alpha_n = \binom{n+r}{r} \cdot C_{p-r}\text{-}\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1}$ *gesetzt ist.*

Im folgenden seien alle (lateinischen und griechischen) Indizes nur ganzzahliger Werte fähig. Bei gegebenen Reihengliedern a_n und α_n werden die üblichen Abkürzungen gebraucht:
$s_n^{(-1)} = a_n$, $s_n^{(0)} = s_n$, $s_n^{(\lambda)} = s_0^{(\lambda-1)} + \ldots + s_n^{(\lambda-1)}$, $c_n^{(\lambda)} = s_n^{(\lambda)} \Big/ \binom{n+\lambda}{\lambda}$ und $\sigma_n^{(-1)} = \alpha_n$, $\sigma_n^{(0)} = \sigma_n$, $\sigma_n^{(\lambda)} = \sigma_0^{(\lambda-1)} + \ldots + \sigma_n^{(\lambda-1)}$, $\gamma_n^{(\lambda)} = \sigma_n^{(\lambda)} \Big/ \binom{n+\lambda}{\lambda}$ für $\lambda \geqq 0$. Daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ C_k-summierbar zur Summe s ist, d. h. $c_n^{(k)} \to s$ konvergiert, soll auch durch $C_k\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ausgedrückt werden. Unter C_{-1}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s soll verstanden werden, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ konvergiert und $n a_n \to 0$ strebt.

1. Beweis der Sätze I und II.

Es gelten die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Seien r und p beide $\geqq 0$, $r \leqq p+1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ C_{p+1}-summierbar. Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ *C_{p-r}-summierbar, die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(p+1)} \Big/ \binom{n+p+r+3}{p+r+3}$ *konvergent und*

$$C_{p-r}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\binom{n+r+1}{r+1}}=\frac{r+1}{p+r+3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n^{(p+1)}}{\binom{n+p+r+3}{p+r+3}}.$$

Setzt man $t_n^{(-1)} = a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ und $t_n^{(\lambda)} = t_0^{(\lambda-1)} + \ldots + t_n^{(\lambda-1)}$ für $\lambda \geqq 0$, dann wird der Zusammenhang zwischen den iterierten Summen $s_n^{(p-r-1)}$ und $t_n^{(p-r)}$ für alle r und p mit $0 \leqq r \leqq p$ durch die Formel vermittelt

$$(1) \qquad t_n^{(p-r)} = \sum_{\lambda=0}^{p-r} \left[(-1)^\lambda \binom{r}{\lambda} \frac{r+1}{p+1-\lambda} \binom{n+p-r+1}{p-r-\lambda} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{s_\nu^{(p-r-1)}}{\binom{p+1+\nu}{p+1-\lambda}} \right].$$

Diese Formel, aus welcher der Hilfssatz zunächst für $0 \leqq r \leqq p$ gefolgert werden soll, läßt sich durch den Schluß von p auf $p+1$ beweisen. (1) geht für $p = r$ in $t_n^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1}$ über, was mit der Definition von $t_n^{(0)}$ übereinstimmt. Aus dem Bestehen der Gleichung (1) für ein bestimmtes $p \geqq r$ folgt dann deren Gültigkeit für $p+1$ statt p durch Ausübung der Abelschen partiellen Summation auf den inneren Summenausdruck der rechten Seite von (1), nachfolgende Aufsummierung der Gleichung nach n zur Bildung von $t_n^{(p+1-r)} = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^{(p-r)}$ und einige Umformungen, welche den erhaltenen Ausdruck in die rechte Seite von (1) für $p+1$ statt p überführen. Dabei ist zu beachten, daß $\sum_{\lambda=0}^{p-r+1} (-1)^\lambda \binom{r}{\lambda} \binom{p-\lambda}{r-1}$ identisch in r und p verschwindet. Um die nötige Beziehung zwischen den iterierten Summen $s_n^{(p+1)}$ und $t_n^{(p-r)}$ zu bekommen, werde auf die innere Summe der rechten Seite von (1) die Abelsche part. Summation $(r+2)$-mal ausgeübt. Man erhält nach einfacher Rechnung

$$(2) \qquad \frac{t_n^{(p-r)}}{\binom{n+p-r}{p-r}} = \sum_{\lambda=0}^{p-r} \left[\frac{(-1)^\lambda \binom{r}{\lambda}}{p+r-\lambda+3} \frac{\binom{n+p-r+1}{p-r-\lambda}}{\binom{n+p-r}{p-r}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(r+1)\, s_\nu^{(p+1)}}{\binom{p+r+\nu+3}{p+r-\lambda+3}} \right]$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{p-r} \left[(-1)^\lambda \binom{r}{\lambda} \frac{\binom{n+p-r+1}{p-r-\lambda}}{\binom{n+p-r}{p-r}} \sum_{\mu=0}^{r+1} \frac{r+1}{p+\mu-\lambda+1} \frac{s_n^{(p-r+\mu)}}{\binom{p+\mu+n+2}{p+\mu-\lambda+1}} \right].$$

Es ist zu zeigen, daß die rechte Seite dieser Gleichung für $n \to +\infty$ gegen die behauptete C_{p-r}-Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(-1)}$ konvergiert.

Zunächst ist der zweite Summenausdruck eine Nullfolge; denn je nachdem $0 \leqq \mu \leqq r$ oder $\mu = r+1$ ist, gilt $s_n^{(p-r+\mu)} = o\,(n^{p+1})$ oder $= O\,(n^{p+1})$, so daß

$$\frac{\binom{n+p-r+1}{n-r-\lambda}}{\binom{n+p-r}{p-r}} \frac{s_n^{(p-r+\mu)}}{\binom{p+\mu+n+2}{p+\mu-\lambda+1}} = o\,(n^{-\mu}) \quad \text{oder} \quad = O\,(n^{-r-1}),$$

also jedenfalls $= o\,(1)$ ist.

Im ersten Summenausdruck ist jedes Glied mit Ausnahme des ersten (für $\lambda = 0$) eine Nullfolge; denn je nachdem $1 \leqq \lambda \leqq r$ oder $\lambda = r+1$ oder $r+2 \leqq \lambda \leqq p-r$ ist, gilt

$$\left| \frac{\binom{n+p-r+1}{p-\lambda-r}}{\binom{n+p-r}{p-r}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{s_\nu^{(p+1)}}{\binom{p+r+3+\nu}{p+r+3-\lambda}} \right| \leqq K(n+1)^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{\lambda-r-2}$$

$$= O(n^{-\lambda}) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{oder} \quad = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right) = o(n^{-r}) \quad \text{oder} \quad = O(n^{-r-1}),$$

also in jedem Falle $= o(1)$. Folglich besteht die asymptotische Gleichung

$$(3) \qquad t_n^{(p-r)} \Big/ \binom{n+p-r}{p-r}$$

$$= \left(1 + \frac{p-r}{n+1}\right) \frac{r+1}{p+r+3} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+p+r+3}{p+r+3} + o(1).$$

Da die unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+p+r+3}{p+r+3}$ konvergiert (weil deren Glieder $= O(\nu^{-r-2}) = O(\nu^{-2})$ sind), besitzt die rechte Seite der Gleichung (3) für $n \to \infty$ einen Grenzwert. Also ist $\lim_{n\to\infty} t_n^{(p-r)} \Big/ \binom{n+p-r}{p-r}$ vorhanden und

$$= \frac{r+1}{p+r+3} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+p+r+3}{p+r+3}.$$

Zum Beweis des Hilfssatzes für $r = p+1$ werde auf die Summe $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Big/ \binom{\nu+p+2}{p+2}$ die Abelsche part. Summation $(p+2)$-mal ausgeübt; dann erhält man die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Big/ \binom{\nu+p+2}{p+2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+2p+4}{2p+4}$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{p+1} \frac{(p+2)\, s_n^{(\mu)}}{p+2+\mu} \Big/ \binom{n+p+\mu+3}{p+\mu+2}.$$

Hieraus folgt wegen

$$s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+2p+4}{2p+4} = O(n^{-p-3}) = O(n^{-3}),$$

$$s_n^{(\mu)} \Big/ \binom{n+p+\mu+3}{p+\mu+3} = O(n^{-1-\mu}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $0 \leqq \mu \leqq p+1$ und $a_\nu \Big/ \binom{\nu+p+2}{p+2} = o\left(\frac{1}{\nu}\right)$ die C_{-1}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+p+2}{p+2}$ zur Summe $\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+2p+4}{2p+4}$, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Seien r und p beide $\geqq 0$, $r \leqq p+1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ C_{p-r}-summierbar. Setzt man*

$$\alpha_n = \binom{n+r}{r} \cdot C_{p-r} - \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu+r+1}{r+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann besteht zwischen den Cesàroschen Mittelwerten von $s_n = a_0 + \ldots + a_n$ und $\sigma_n = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ die Beziehung

$$(r+1)\, c_n^{(p+1)} + (p+1)\, \gamma_{n+1}^{(p)} = (r+p+2)\, \gamma_n^{(p+1)}.$$

Die Behauptung geht aus der allgemeineren, für alle $\lambda \geqq 0$ gültigen Beziehung

$$(4) \qquad (r+1)\, s_n^{(\lambda)} + (n+1)\, \sigma_{n+1}^{(\lambda-1)} = (r+1+\lambda)\, \sigma_n^{(\lambda)}$$

durch die Gleichsetzung $\lambda = p+1$ und nachfolgende Division mit $\binom{n+p+1}{p+1}$ hervor. (4) ist für $\lambda = 0$ richtig; denn aus der Definition von α_n folgt

$$\alpha_n = \frac{r+1}{n+r+1}\, a_n + \frac{n+1}{n+r+1}\, \alpha_{n+1}$$

oder $(r+1)\, a_n + (n+1)\, \alpha_{n+1} - n\alpha_n = (r+1)\, \alpha_n$, woraus durch Aufsummieren nach n die Gleichung $(r+1)\, s_n + (n+1)\, \alpha_{n+1} = (r+1)\, \sigma_n$ entspringt, welche mit (4) für $\lambda = 0$ übereinstimmt. Sei jetzt (4) für ein bestimmtes $\lambda \geqq 0$ bewiesen; schreibt man die Gleichung (4) unter Berücksichtigung der Identität $\sigma_{n+1}^{(\lambda-1)} = \sigma_{n+1}^{(\lambda)} - \sigma_n^{(\lambda)}$ in der Form $(r+1)\, s_n^{(\lambda)} + (n+1)\, \sigma_{n+1}^{(\lambda)} - n\sigma_n^{(\lambda)} = (r+2+\lambda)\, \sigma_n^{(\lambda+1)}$ und summiert dann nach n auf, so bekommt man $(r+1)\, s_n^{(\lambda+1)} + (n+1)\, \sigma_{n+1}^{(\lambda)} = (r+2+\lambda)\, \sigma_n^{(\lambda+1)}$. Das ist aber Gleichung (4) für $\lambda+1$ statt λ.

Hilfssatz 3. *Seien r und p beide $\geqq 0$, $r \leqq p+1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ C_{p+1}-summierbar, so daß (zufolge Hilfssatz 1) die Zahlen*

$$\alpha_n = \binom{n+r}{r} \cdot C_{p-r} - \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1}$$

vorhanden sind. Dann besteht zwischen den Cesàroschen Mittelwerten von $s_n = a_0 + \ldots + a_n$ und $\sigma_n = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ die weitere Beziehung

$$(r+1)\, c_n^{(p+1)} + (p+1)\, \gamma_{n+1}^{(p)} = (r+p+2) \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{n\nu}\, c_\nu^{(p+1)}$$

mit $T_{n\nu} = 0$ oder $= \frac{r+1}{r+2} \binom{n+r+p+2}{r+1} \Big/ \binom{\nu+r+p+3}{r+2}$, je nachdem $\nu <$

oder $\nu \geqq n$ ist. Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} T_{n\nu} c_\nu^{(p+1)}$ ist konvergent und die $T_{n\nu}$ bilden eine reguläre Matrix.

Die Behauptung folgt aus der Gleichung

$$(5)\quad (r+1)\, s_n^{(p+1)} + (n+1)\, \sigma_{n+1}^{(p)} = \frac{(r+1)(r+p+2)}{r+p+3} \binom{n+r+p+2}{r+p+2} \sum_{\nu=n}^{\infty} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+r+p+3}{r+p+3}$$

durch Division mit $\binom{n+p+1}{p+1}$. (5) geht für $n = 0$ in die Gleichung

$$(6)\quad (r+1)\, a_0 + (p+1)\, \alpha_0 + \alpha_1 = \frac{(r+1)(r+p+2)}{r+p+3} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+r+p+3}{r+p+3}$$

über, deren rechte Seite zufolge Hilfssatz 1 konvergent und $= (r+p+2)\, C_{p-r}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1} = (r+p+2)\, \alpha_0$ ist. Infolgedessen läßt sich (6) in der Gestalt schreiben $(r+1)\, a_0 + (p+1)\, \alpha_0 + \alpha_1 = (r+p+2)\, \alpha_0$ oder $\alpha_0 = a_0 + \alpha_1/(r+1)$, was offenbar zutrifft. Also ist (5) für $n = 0$ richtig. Aus der Gültigkeit der Gleichung (5) für ein bestimmtes $n \geqq 0$ folgt dann durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{n+r+p+3}{n+1}$ und nachfolgendes Hinüberschaffen des ersten Gliedes der Reihe auf die linke Seite die Gleichung

$$(r+1)\, s_n^{(p+1)} + (n+r+p+3)\, \sigma_{n+1}^{(p)} = \frac{(r+1)(r+p+2)}{r+p+3} \binom{n+r+p+3}{r+p+2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} s_\nu^{(p+1)} \Big/ \binom{\nu+p+r+3}{p+r+3}.$$

Macht man noch von der Beziehung (4) Gebrauch, dann wird die linke Seite dieser Gleichung

$$= (r+p+2)\,(\sigma_n^{(p+1)} + \sigma_{n+1}^{(p)}) = (r+p+2)\, \sigma_{n+1}^{(p+1)} = (r+1)\, s_{n+1}^{(p+1)} + (n+2)\, \sigma_{n+2}^{(p)}.$$

Somit hat man (5) für $n+1$ statt n erhalten.

Schließlich ist die Matrix $(T_{n\nu})$ regulär; denn es ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |T_{n\nu}| \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{n\nu} = \frac{r+1}{r+2} \binom{n+p+r+2}{r+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} 1 \Big/ \binom{\nu+p+r+3}{r+2}$$

$$= \frac{(r+1)(n+r+p+2)!}{(n+p+1)!} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} 1/(\varkappa+n+p+2)\ldots(\varkappa+n+p+r+3) = 1$$

und wegen $T_{n\nu} = 0$ für $n > \nu$ der $\lim_{n\to\infty} T_{n\nu} = 0$ für jedes $\nu \geqq 0$.

Aus den beiden letzten Hilfssätzen folgt der Satz II ohne weitere Rechnung; denn konvergiert $\gamma_n^{(p)} \to s$, so konvergiert (wegen der Permanenz des C-Verfahrens) erst recht $\gamma_n^{(p+1)} \to s$ und somit nach Hilfssatz 2 auch $c_n^{(p+1)} \to s$. Wenn umgekehrt $c_n^{(p+1)} \to s$ konvergiert, so konvergiert (wegen der Regularität der Matrix der $T_{n\nu}$) erst recht $\sum_{\nu=0}^{\infty} T_{n\nu} c_\nu^{(p+1)} \to s$ und somit nach Hilfssatz 3 auch $\gamma_n^{(p)} \to s$, w. z. b. w.

Für ein $r \geqq 0$ sei jetzt $\alpha_n = \binom{n+r}{r} \cdot C_k \text{-} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1}$ gesetzt, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ C_k-summierbar ist. Sind $r_n^{(\lambda+1)}$ die $(\lambda+1)$-fachen Reste der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$, falls diese C_k-summierbar ist, und $\varrho_n^{(\lambda)}$ die λ-fachen Reste derReihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Big/ \binom{n+r}{r}$, falls auch diese C_k-summierbar ist, dann folgt aus der Existenz eines der beiden Reste $r_n^{(\lambda+1)}$ und $\varrho_n^{(\lambda)}$, daß auch der andere vorhanden und $r_n^{(\lambda+1)} = \varrho_n^{(\lambda)}$ ist. Für $\lambda = 0$ folgt diese Bemerkung unmittelbar aus der Gleichung

$$r_n^{(1)} = C_k \text{-} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1} = \alpha_n \Big/ \binom{n+r}{r} = \varrho_n^{(0)}.$$

Angenommen, die Bemerkung treffe für ein bestimmtes $\lambda \geqq 0$ zu; dann folgt ihre Gültigkeit für $\lambda + 1$ statt λ aus der Gleichung

$$r_n^{(\lambda+2)} = C_k \text{-} \sum_{\nu=n}^{\infty} r_\nu^{(\lambda+1)} \equiv C_k \text{-} \sum_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu^{(\lambda)} = \varrho_n^{(\lambda+1)},$$

wenn man diese von links nach rechts oder von rechts nach links liest, je nachdem man die Existenz von $r_n^{(\lambda+2)}$ oder von $\varrho_n^{(\lambda+1)}$ voraussetzt. Die Bemerkung gilt somit für alle $\lambda \geqq 0$. Unter Berücksichtigung dieser Bemerkung, die insbesondere für $\lambda = r$ zutrifft, kann aus Satz II der Satz I durch den Schluß von r auf $r+1$ gefolgert werden.

Es genügt, den Satz I für ein $p = p' \geqq r$ zu beweisen. Denn für $p =$ ist entweder $r = 0$ und der Satz I trivial oder $r = 1$ und Satz I identisch mit Satz II. Sei also $p' \geqq 1$.

Satz I ist für $r = 0$ und beliebiges $p \geqq 0$ trivial. Angenommen, er treffe für ein bestimmtes r mit $0 \leqq r \leqq p'$ zu und für beliebiges $p \geqq 0$ mi

$p + 1 \geqq r$; dann ist zu beweisen, daß er auch für $r + 1$ statt r und $p = p'$ seine Gültigkeit behält.

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(r+1)}\, C_{p'-(r+1)}$-summierbar zur Summe s und $r_n^{(r+1)}$ die Folge der $(r+1)$-fachen Reste der $C_{p'-(r+1)}$-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$. Setzt man

$$\alpha_n = \binom{n+r}{r} \cdot C_{p'-(r+1)} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1},$$

dann sind zufolge der obigen Bemerkung die r-fachen Reste $\varrho_n^{(r)}$ der $C_{p'-(r+1)}$-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Big/ \binom{n+r}{r}$ vorhanden und $= r_n^{(r+1)}$. Daher (und wegen $p' - (r+1) = (p'-1) - r$) ist $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^{(r)}\, C_{(p'-1),-r}$ summierbar zur Summe s. Hieraus darf aber nach Satz I, der für das bestimmte r und insbesondere für $p = p' - 1$ vorausgesetzt war, geschlossen werden, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ $C_{p'-1}$-summierbar zur Summe s ist. Daraus geht nach Satz II hervor, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, C_{p'}$-summierbar zur Summe s ist, w. z. b. w.

Sei jetzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, C_{p'}$-summierbar zur Summe s vorausgesetzt. Nach Satz II ist dann

$$\alpha_n = \binom{n+r}{r} \cdot C_{(p'-1)-r} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1}$$

definiert und $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, C_{p'-1}$-summierbar zur Summe s. Aus demselben Grunde wie oben folgt daraus, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^{(r)}\, C_{(p'-1)-r}$-summierbar zur Summe s ist, wo $\varrho_n^{(r)}$ wieder die r-fachen Reste der $C_{(p'-1)-r}$-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Big/ \binom{n+r}{r}$ ist. Hieraus ergibt sich wieder nach der obigen Bemerkung, daß die $(r+1)$-fachen Reste $r_n^{(r+1)}$ der $C_{(p'-1)-r}$-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ vorhanden und $= \varrho_n^{(r)}$ sind. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(r+1)}\, C_{p'-(r+1)}$-summierbar zur Summe s. Damit ist der Beweis des Satzes I erbracht.

2. Einige Folgerungen.

Es folgt aber auch umgekehrt Satz II aus Satz I. Denn ist einerseits $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ C_{p+1}-summierbar, dann ist nach Satz I die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(r+1)}$ C_{p-r}-summierbar zur Summe s, wenn $r_n^{(r+1)}$ die $(r+1)$-fachen Reste der (nach Hilfssatz 1) C_{p-r}-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ bedeuten. Setzt man

$$\alpha_n = \binom{n+r}{r} \cdot C_{p-r} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1},$$

dann sind zufolge der obigen Bemerkung die r-fachen Reste $\varrho_n^{(r)}$ der C_{p-r}-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Big/ \binom{n+r}{r}$ vorhanden und $= r_n^{(r+1)}$. Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^{(r)}$ C_{p-r}-summierbar zur Summe s. Daraus geht nach Satz I hervor, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ C_p-summierbar zur Summe s ist. Ist andererseits $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ C_p-summierbar zur Summe s, dann ist nach Satz I die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^{(r)}$ C_{p-r}-summierbar zur Summe s. Es folgt wieder nach der obigen Bemerkung, daß die $(r+1)$-fachen Reste $r_n^{(r+1)}$ der C_{p-r}-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ vorhanden und $= \varrho_n^{(r)}$ sind. Mithin ist $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(r+1)}$ C_{p-r}-summierbar zur Summe s. Daraus folgt wieder nach Satz I, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ C_{p+1}-summierbar zur Summe s ist. Also sind die Sätze I und II äquivalent.

Satz II kann noch in einer anderen Form ausgesprochen werden; er ist nämlich identisch mit dem folgenden

Satz IIa. *Seien r und p beide $\geqq 0$ und $r \leqq p+1$. Dann ist für die C_{p+1}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s notwendig und hinreichend, daß*

$$\binom{r}{0} c_{n+p}^{(0)} + \binom{r+1}{1} c_{n+p-1}^{(1)} + \cdots + \binom{r+p}{p} c_n^{(p)}$$

$$+ \binom{n+p+r+1}{r+1} C_{p-r} \cdot \sum_{\nu=n+p+1}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1} \to \binom{p+r+1}{r+1} s.$$

Da Satz II m. a. W. besagt, daß für die C_{p+1}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s die Konvergenz von $\gamma_n^{(p)} \to s$ notwendig und hinreichend ist (wenn man mit $\gamma_n^{(p)}$ die p-ten Cesàroschen Mittelwerte der Teilsummen $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ bezeichnet), so ist die Identität der Sätze II und IIa offenbar bewiesen, sobald gezeigt ist, daß die Identität

$$\binom{r}{0} c_{n+p}^{(0)} + \binom{r+1}{1} c_{n+p-1}^{(1)} + \ldots + \binom{r+p}{p} c_n^{(p)} + \binom{n+p+r+1}{r+1} C_{p-r} \cdot \sum_{\nu=n+p+1}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1} = \binom{p+r+1}{r+1} \gamma_n^{(p)}$$

zu Recht besteht, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ C_{p-r}-summierbar ist. Diese Identität geht aus der allgemeineren, für alle $\mu \geqq 0$ gültigen Gleichung

$$(7) \quad \binom{r}{0} c_{n+\mu}^{(0)} + \binom{r+1}{1} c_{n+\mu-1}^{(1)} + \ldots + \binom{r+\mu}{\mu} c_n^{(\mu)} + \binom{n+\mu+r+1}{r+1} C_{p-r} \cdot \sum_{\nu=n+\mu+1}^{\infty} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1} = \binom{\mu+r+1}{r+1} \gamma_n^{(\mu)}$$

durch die Gleichsetzung $\mu = p$ hervor. Für $\mu = 0$ geht diese Gleichung in $s_n + \frac{n+1}{r+1} \alpha_{n+1} = \sigma_n$ über, was mit (4) für $\lambda = 0$ übereinstimmt. Sei Gleichung (7) für ein bestimmtes $\mu \geqq 0$ und alle $n \geqq 0$ bereits bewiesen; man ersetze in ihr n durch $n+1$ und addiere darauf diejenige Gleichung, welche aus der für alle $\lambda \geqq 0$ gültigen Beziehung (4) durch Einsetzung von $\lambda = \mu + 1$ und nachfolgende Multiplikation mit $\frac{n!\,(r+\mu+1)!}{(r+1)!\,(n+\lambda+1)!}$ hervorgeht, nämlich die Gleichung

$$\binom{r+\mu+1}{\mu+1} c_n^{(\mu+1)} = \binom{r+\mu+2}{r+1} \gamma_n^{(\mu+1)} - \binom{r+\mu+1}{r+1} \gamma_{n+1}^{(\mu)}.$$

Dann erhält man die zu beweisende Gleichung (7) für $\mu + 1$ statt μ. Damit ist die Identität der Sätze II und IIa erwiesen.

Die Sätze I und II sind nicht nur für alle diejenigen $r \geqq 0$ und $p \geqq 0$ bewiesen, für welche $r \leqq p$ ist, sondern auch noch für $r = p + 1$. In diesem Falle war unter der C_{p-r}-Summierbarkeit einer Reihe verstanden worden, daß diese Reihe konvergent und die Folge ihrer Glieder $= o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Erklärt man entsprechend die C_k-Summierbarkeit einer Reihe für beliebige negativ-

ganzzahlige Ordnung k, dann werden die Sätze I und II auch noch für $r = p+2$, $p+3$, ... und auch negatives p, d. h. für $r \geqq 0$ und beliebiges p ihre Gültigkeit behalten [5]). Um das Bestehen des Satzes II für alle $r \geqq p$ einzusehen, ist es jedoch nicht nötig, die $C_{-(r-p)}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1}$ zu beweisen, wenn die C_{p+1}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vorausgesetzt ist; denn in der Formulierung dieses Satzes II geht nur die C_{p-r}-Summe ein, welche für $r \geqq p$ jedenfalls mit der Cauchyschen Summe übereinstimmt und also durch diese ersetzt werden darf. Somit gelten die Sätze II und IIa auch ohne die Einschränkung $r \leqq p+1$.

Nachdem die Identität der Sätze II und IIa und deren Gültigkeit für beliebige $r \geqq 0$ und $p \geqq 0$ erwiesen ist, erkennt man die Identität des allgemeinen Grenzwertsatzes von Knopp mit Satz II für $r \geqq p$. Satz II stellt also in der Form IIa eine Verallgemeinerung des S. 559 angeführten Satzes von Knopp dar. Der hier angegebene Beweis des Satzes II ist im Falle $r \geqq p$ wesentlich einfacher als im Falle $r \leqq p$; denn für $r \geqq p$ tritt an Stelle des schwieriger zu beweisenden Hilfssatzes 1 nur die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+r+1}{r+1} = \frac{r+1}{r+p+3} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(p+1)} \Big/ \binom{n+p+r+3}{p+r+3},$$

welche durch $(p+2)$-malige Ausübung der Abelschen part. Summation auf die Teilsumme $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Big/ \binom{\nu+r+1}{r+1}$ und nachfolgenden Grenzübergang für $n \to +\infty$ erhalten wird. Der Beweis der Hilfssätze 2 und 3 bleibt offenbar ungeändert.

Satz II (bzw. IIa) geht für $r = p = 0$ (oder Satz I für $r = p = 1$) in den speziellen Grenzwertsatz über, wonach

$$s_n + (n+1)\left[\frac{a_{n+1}}{n+2} + \frac{a_{n+2}}{n+3} + \ldots\right] \to s$$

---

[5]) Für die „r-fachen Reste $r_n^{(r)}$ der C_p-summierbaren Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$" gilt offenbar die Beziehung $\binom{n+r}{r} \Delta^r r_n^{(r)} = a_n$; definiert man danach $r_n^{(r)}$ für negativ-ganzzahliges r durch $r_n^{(r)} = \binom{n-r}{-r} \Delta^{-r} a_n$ $(r \leqq 0)$, so gilt bei geeigneter Formulierung Satz I auch noch für $r < 0$.

eine notwendige und hinreichende Bedingung für die C_1-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist. In diesem Spezialfall wird der auf S. 564 geführte Beweis für das Hinreichen dieser Bedingung besonders einfach[6]): Setzt man

$$\sigma_n = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n \quad \text{und} \quad \alpha_n = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \ldots,$$

dann ist $a_n = (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ oder $a_n + (n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_n = \alpha_n$, woraus durch Aufsummieren nach n die behauptete Identität $s_n + (n+1)\alpha_{n+1} = \sigma_n$ hervorgeht. Schreibt man diese mittels $\alpha_{n+1} = \sigma_{n+1} - \sigma_n$ in der Gestalt $s_n + (n+1)\sigma_{n+1} - n\sigma_n = 2\sigma_n$ und summiert noch einmal nach n auf, so bekommt man $s_0 + \ldots + s_n + (n+1)\sigma_{n+1} = 2(\sigma_0 + \ldots + \sigma_n)$ oder

$$\frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1} + \sigma_{n+1} = 2\,\frac{\sigma_0 + \ldots + \sigma_n}{n+1},$$

woraus das Hinreichen der genannten Bedingung sofort abzulesen ist.

Ebenso kurz ist auch der Beweis für das Hinreichen der Knoppschen C_1-Summierbarkeitsbedingung[7])

$$s_n + \binom{n+r+1}{r+1}\left[\frac{a_{n+1}}{\binom{n+r+2}{r+1}} + \frac{a_{n+2}}{\binom{n+r+3}{r+1}} + \ldots\right] \to s,$$

welche aus Satz IIa für $p = 0$ erhalten wird. Der Beweis beruht auch hier wieder auf der Identität

$$s_n + \binom{n+r+1}{r+1}\left[\frac{a_{n+1}}{\binom{n+r+2}{r+1}} + \frac{a_{n+2}}{\binom{n+r+3}{r+1}} + \ldots\right] = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n,$$

wo

$$\alpha_n = \binom{n+r}{r}\left[\frac{a_n}{\binom{n+r+1}{r+1}} + \frac{a_{n+1}}{\binom{n+r+2}{r+1}} + \ldots\right]$$

gesetzt ist. Auch für das Hinreichen der ganz allgemeinen Knoppschen C_{p+1}-Summierbarkeitsbedingung (S. 559) ist der Beweis des Hilfssatzes 2 auf S. 564 ein neuer Beweis, der einfacher ist als derjenige von K. Knopp und einen von G. H. Hardy herrührenden Kunstgriff vermeidet.

Aus Satz I lassen sich die bekannten Umkehrsätze, welche das C-Verfahren betreffen, ganz entsprechend wie bei Knopp und Hardy-Littlewood herleiten. Z. B. soll hier der o-Umkehrsatz bewiesen werden, wonach aus der

---

[6]) Vgl. die Beweisführung in dem S. 559, Fußnote 2, genannten Lehrbuch von K. Knopp und G. H. Hardy, A theorem concerning summable series, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **20** (1921), S. 304—307.

[7]) K. Knopp, Über die Oszillationen einfach unbestimmter Reihen, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrgang **16** (1917), S. 45—50.

C_k-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Summe s und $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ die Konvergenz dieser Reihe zur selben Summe folgt. Zunächst folgt aus $C_k \text{-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ nach Satz I (für $r = p = k$), daß $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(k)} = s$ konvergiert, wo $r_n^{(k)}$ die k-fachen Reste der konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big/ \binom{n+k}{k}$ sind. Wegen $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist ferner

$$r_n^{(0)} = \frac{a_n}{\binom{n+k}{k}} = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad r_n^{(1)} = \sum_{\nu=n}^{\infty} o\left(\frac{1}{\nu^{k+1}}\right) = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \ldots,$$

$$r_n^{(k)} = \sum_{\nu=n}^{\infty} o\left(\frac{1}{\nu^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

mithin $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(k)}$ C_{-1}-summierbar zur Summe s. Daraus ergibt sich abermals nach Satz I (jetzt aber für $r = p + 1 = k$), daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ C_{k-1}-summierbar ist. Nach k-maliger Wiederholung desselben Schlusses folgt die Behauptung. Auch der $O_L \text{-} C_1 \to K$-Satz läßt sich aus Satz I von neuem folgern, doch ist der Beweis nicht einfacher als derjenige von G. H. Hardy aus dem Jahre 1921.

(Eingegangen am 31. März 1939.)

Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Während die Theorie der Limitierungs-Umkehrsätze (Tauberian theorems) für einfache Folgen schon sehr weit entwickelt ist, ist diejenige für Doppelfolgen bisher erst wenig behandelt worden. Es liegen aus früherer Zeit nur die beiden Arbeiten von H. Holzberger[1]) und C. M. Grisar[2]) vor, die den ältesten Satz dieser Art, den Tauberschen Satz für gewöhnliche Potenzreihen (also für das A-Verfahren), auf Doppel- und mehrfache Reihen übertragen. Die dabei auftretende Konvergenzbedingung ist demgemäß eine o-Bedingung. Die einzige mir bekannte Arbeit, die sich die Frage nach der Gültigkeit von O-Umkehrsätzen für das C_1-Verfahren stellt, ist die von F. de Franchis[3]). Die dort bewiesenen Sätze sind sehr spezieller Art und werden weiter unten als leichte Sonderfälle unseres Satzes 2 bewiesen[4]). Im folgenden sollen einige O-Umkehrsätze für das C_1- und das A-Verfahren bewiesen werden, um zur weiteren Untersuchung dieses Fragenkreises, insbesondere der dabei in Erscheinung tretenden Abweichungen gegen einfache Reihen anzuregen.

1. *Bezeichnungen.* Die Doppelreihen bezeichnen wir mit $\sum a_{\mu\nu}$ und lassen die Indizes von 0 an laufen. Denkt man sich die Glieder wie üblich als unendliche Matrix hingeschrieben, so bezeichne der erste Index die Zeilen, der zweite die Spalten. Die Teilsummen bezeichnen wir mit s_{mn}:

$$(1) \qquad s_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}, \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist umgekehrt die Folge (s_{mn}) zuerst vorgelegt, so sind durch (1) die Glieder a_{mn} einer Reihe $\sum a_{\mu\nu}$ definiert, deren Teilsummen die s_{mn} sind:

$$(2) \qquad a_{mn} = \Delta_{mn} s_{mn} = s_{mn} - s_{m-1\,n} - s_{m\,n-1} + s_{m-1\,n-1}.$$

---

[1]) H. Holzberger, Über das Verhalten von Potenzreihen mit zwei und drei Veränderlichen an der Konvergenzgrenze, Monatshefte f. Math. u. Phys. **25** (1914), S. 3—90.

[2]) C. M. Grisar, Über eine Verallgemeinerung des Tauberschen Satzes und seine Ausdehnung auf n-fache Reihen, Diss. München 1924.

[3]) F. de Franchis, Estensione alle serie doppie della teoria della sommabilità (C, 1) e applicazioni alle serie doppie di Fourier. Rend. Circ. mat. Palermo **59** (1935), S. 147 bis 164.

[4]) Schließlich ist noch eine Arbeit von B. E. Lawrence. The summability of double Fourier series, Proc. Lond. math. soc. (2) **40** (1935), S. 321—335, zu nennen, die sich aber etwas andere Ziele steckt; in ihr wird u. a. der Satz von Fatou, daß aus $a_n \to 0$ und der Regularität von $\sum a_n x^n$ in $x = 1$ die Konvergenz von $\sum a_n$ folgt, auf Doppelreihen übertragen.

In diesem Zusammenhang denken wir uns stets die s_{mn} und a_{mn}. Wir schreiben $\sum a_{\mu\nu} = s$ oder $s_{mn} \to s$ für $(m, n) \to \infty$ (d. h. genauer $\to (\infty, \infty)$), falls $|s_{mn} - s| < \varepsilon$ für alle $m > m_0(\varepsilon)$ und alle $n > n_0(\varepsilon)$ (Pringsheimscher Konvergenzbegriff).

Bekanntlich braucht eine konvergente Doppelfolge nicht beschränkt zu sein; wir werden sie aber im folgenden meist als beschränkt voraussetzen („condition of finitude").

Die Rolle des Kroneckerschen Ausdrucks $\delta_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + n a_n}{n+1}$ bei einfachen Reihen übernehmen bei Doppelreihen die drei Ausdrücke η_{mn}, η'_{mn} und δ_{mn}, die folgendermaßen erklärt sind:

Es sei t_{mn} die n-te Teilsumme der m-ten Zeile, also

$$t_{mn} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu}, \qquad (m \text{ fest}), \tag{3}$$

und t'_{mn} die m-te Teilsumme der n-ten Spalte, also

$$t'_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} a_{\mu n}, \qquad (n \text{ fest}). \tag{4}$$

Dann setzen wir

$$\eta_{mn} = \frac{t_{1n} + 2t_{2n} + \ldots + m t_{mn}}{m+1}, \tag{5}$$

$$\eta'_{mn} = \frac{t'_{m1} + 2t'_{m2} + \ldots + n t'_{mn}}{n+1}. \tag{6}$$

Schließlich sei

$$\delta_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} \mu\nu a_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Die Reihe $\sum a_{mn}$ heißt C_1-*summierbar*, die Folge s_{mn} C_1-*limitierbar* zum Werte s, wenn für $(m, n) \to \infty$

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} s_{\mu\nu} \to s \tag{8}$$

strebt; sie heißen *A-summierbar* bzw. *A-limitierbar*, wenn

$$f(x, y) = \sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = (1-x)(1-y) \sum s_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \to s \tag{9}$$

strebt, wenn x und y durch reelle Werte wachsend $\to 1$ gehen. Dabei wird *vorausgesetzt*, daß die hingeschriebenen Potenzreihen für die positiven $x < 1$ und $y < 1$ konvergieren. Nach Bedarf werden auch hier besondere Beschränktheitsbedingungen eingeführt.

Um die Konvergenzbedingungen bequem ausdrücken zu können, führen wir endlich noch die folgende *Schwankungsfunktion* ein:

Für ein $\varkappa > 1$ und ein $\lambda > 1$ sei im Falle reeller Folgen

$$\operatorname*{Max}_{\substack{m < \mu < \varkappa m \\ n < \nu \leqq \lambda n}} (s_{\mu\nu} - s_{mn}) = w_{mn}(\varkappa, \lambda) \tag{10}$$

und

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\, w_{m,n}(\varkappa,\lambda) = w(\varkappa,\lambda)\,^{5}). \tag{11}$$

Ersetzen wir hier $(s_{\mu\nu} - s_{mn})$ durch $|s_{\mu\nu} - s_{mn}|$, so seien die entsprechend gebildeten Funktionen mit

$$\omega_{mn}(\varkappa,\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \omega(\varkappa,\lambda) \tag{12}$$

bezeichnet. In diesem Falle darf die Folge (s_{mn}) auch komplex sein.

2. *Ein o-$C_1 \to K$-Satz.* Bei einfachen Reihen $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n besteht zwischen deren C_1-Mitteln $\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$, den s_n und dem oben erwähnten Kroneckerschen Ausdruck δ_n die Identität

$$\sigma_n = s_n - \delta_n. \tag{1}$$

Aus ihr liest man den einfachsten Umkehrsatz, einen o-$C_1 \to K$-Satz, ab: Aus der C_1-Limitierbarkeit einer Folge s_n zum Werte s folgt ihre Konvergenz zum gleichen Werte, wenn $\delta_n \to 0$ strebt (und nur in diesem Falle). Das Analogon hierzu für Doppelreihen ist der folgende

Satz 1. *Aus der C_1-Limitierbarkeit einer beschränkten Folge s_{mn} zum Werte s folgt ihre Konvergenz zum gleichen Werte, falls die durch* **1**, (5) *und* (6) *definierten Folgen gegen Null streben*:

$$\eta_{mn} \to 0 \quad \text{und} \quad \eta'_{mn} \to 0. \tag{2}$$

Dem Beweis schicken wir einige einfache Hilfssätze voraus.

2. 1. Hilfssätze.

(a) Eine beschränkte, gegen s konvergierende Folge s_{mn} ist auch C_1-limitierbar zum Werte s: Aus $s_{mn} \to s$, $s_{mn} = O(1)$ folgt $\sigma_{mn} \to s$ [6]). Das ist natürlich bekannt (vgl. [6]), [7]) und [8])).

(b) Ist $s_{mn} = O(1)$ und strebt $s_{mn} \to s$, so strebt auch die Doppelfolge

$$u_{mn} = \frac{\alpha_0 s_{0n} + \alpha_1 s_{1n} + \cdots + \alpha_m s_{mn}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m} \to s, \tag{3}$$

falls für alle $m \geqq 0$

$$\frac{|\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m|}{|\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m|} \geqq \alpha > 0 \tag{4}$$

bleibt (und speziell $\alpha_0 \neq 0$ ist) und $\sum |\alpha_n|$ divergiert.

Beweis. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir m_0, n_0 so, daß

$$|s_{mn} - s| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha \quad \text{für alle } m > m_0, \quad n > n_0.$$

---

[5]) Da $\mu = m$ und $\nu = n$ zugelassen sind, ist stets $w_{mn}(\varkappa,\lambda) \geqq 0$ und also auch $w(\varkappa,\lambda) \geqq 0$.

[6]) Wie F. Lösch, Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfolgen, Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 281—290, gezeigt hat, genügt es schon, wenn σ_{mn} Stelle von s_{mn} als beschränkt vorausgesetzt wird.

[7]) K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren II, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 276—305, insbesondere S. 294f.

Dann ist für diese m, n:

$$|u_{mn} - s| \leqq \left| \frac{\alpha_0(s_{0n} - s) + \cdots + \alpha_{m_0}(s_{m_0 n} - s)}{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \alpha \frac{|\alpha_{m_0+1}| + \cdots + |\alpha_m|}{|\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m|}.$$

Wegen $s_{mn} = O(1)$ ist der Zähler des ersten Bruches rechts beschränkt, wegen (4) und der Divergenz von $\Sigma |\alpha_n|$ wächst aber der Nenner mit m über alle Grenzen. Wir können also $m_1 > m_0$ so bestimmen, daß dieser Bruch $< \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt für $m > m_1$. Dann ist nach (4) für $m > m_1$, $n > n_0$ offenbar $|u_{mn} - s| < \varepsilon$, w. z. b. w.

Unter den gleichen Voraussetzungen strebt natürlich auch die Doppelfolge

$$(3') \qquad u'_{mn} = \frac{\alpha_0 s_{m0} + \alpha_1 s_{m1} + \cdots + \alpha_n s_{mn}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \to s.$$

(c) Da $\alpha_\nu \equiv 1$ die Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes erfüllt, so gilt insbesondere: Aus $s_{mn} = O(1)$ und $s_{mn} \to s$ folgt, daß auch die Doppelfolgen

$$(5) \qquad v_{mn} = \frac{s_{0n} + s_{1n} + \cdots + s_{mn}}{m+1} \to s$$

und

$$(6) \qquad v'_{mn} = \frac{s_{m0} + s_{m1} + \cdots + s_{mn}}{n+1} \to s$$

streben [8]).

(d) Subtrahiert man die Beziehungen (5) und (6) von $s_{mn} \to s$, so erhält man unter Benutzung der Bezeichnungen 1, (5) und (6): Aus $s_{mn} = O(1)$ und $s_{mn} \to s$ folgt

$$(7) \qquad \eta_{mn} \to 0,$$

$$(8) \qquad \eta'_{mn} \to 0.$$

Denn es ist, mit den Bezeichnungen aus 1, (3) und (4),

$$s_{mn} = t_{0n} + t_{1n} + \cdots + t_{mn},$$

also

$$(9) \qquad s_{mn} - v_{mn} = \frac{t_{1n} + 2t_{2n} + \cdots + mt_{mn}}{m+1} = \eta_{mn}$$

und entsprechend $s_{mn} - v'_{mn} = \eta'_{mn}$.

(e) Aus $s_{mn} = O(1)$ und $s_{mn} \to s$ folgt

$$(10) \qquad \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} \mu\nu a_{\mu\nu} = \delta_{mn} \to 0.$$

---

[8]) Wendet man auf die offenbar wieder beschränkte Folge v'_{mn} (an Stelle der s_{mn}) die Beziehung (5) aus Hilfssatz (c) an, so gehen die v_{mn} in die σ_{mn} über, und man erhält einen Beweis des Hilfssatzes (a).

Aus den Voraussetzungen folgt zunächst (7), d. h. $\eta_{mn} \to 0$. Da die η_{mn} überdies offenbar wieder beschränkt sind, so folgt nach (6), daß auch

$$\frac{\eta_{m0} + \eta_{m1} + \cdots + \eta_{mn}}{n+1} \to 0$$

und also auch

$$\eta_{mn} - \frac{\eta_{m0} + \eta_{m1} + \cdots + \eta_{mn}}{n+1} \to 0 \tag{11}$$

strebt. Nach **1**, (5) ist die links stehende Differenz

$$= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left\{(n+1) \sum_{\mu=0}^{m} \mu t_{\mu n} - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} \mu t_{\mu\nu}\right\}$$

$$= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu=0}^{m} \mu \{(n+1) t_{\mu n} - (t_{\mu 0} + t_{\mu 1} + \cdots + t_{\mu n})\}.$$

Wegen **1**, (3) ist nun $t_{\mu 0} + t_{\mu 1} + \cdots + t_{\mu n} = (n+1) a_{\mu 0} + n a_{\mu 1} + \cdots + a_{\mu n}$ und unser Ausdruck also weiter

$$= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \mu\nu\, a_{\mu\nu} = \delta_{mn}.$$

Gemäß (11) strebt also $\delta_{mn} \to 0$.

Beim Beweis wurde nur benutzt, daß die η_{mn} beschränkt sind und $\to 0$ streben. Hieraus allein folgt also (10). Ebenso folgt diese Beziehung natürlich auch, wenn die η'_{mn} beschränkt sind und $\to 0$ streben.

2. 2. Beweis von Satz 1. Es genügt zu zeigen, daß die Identität

$$\sigma_{mn} = s_{mn} - \eta_{mn} - \eta'_{mn} + \delta_{mn} \tag{12}$$

besteht. Denn wenn die s_{mn} beschränkt sind, so sind es auch die η_{mn} und η'_{mn}. Wenn diese überdies $\to 0$ streben, so strebt nach Hilfssatz (e) auch $\delta_{mn} \to 0$. Dann folgt aber aus (12) unmittelbar, daß mit $\sigma_{mn} \to s$ auch $s_{mn} \to s$ strebt.

Die Identität (12) ergibt sich so: Es ist

$$(m+1)(n+1)\sigma_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\varkappa\lambda} \right\}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} (m+1-\mu)(n+1-\nu) a_{\mu\nu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \{(m+1)(n+1) - (n+1)\mu - (m+1)\nu + \mu\nu\} a_{\mu\nu},$$

also

$$\sigma_{mn} = s_{mn} - \frac{1}{m+1}\sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} \mu a_{\mu\nu} - \frac{1}{n+1}\sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} \nu a_{\mu\nu} + \frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} \mu\nu a_{\mu\nu}.$$

Führt man bei der ersten Summe rechts die Summation nach ν, bei der zweiten die nach μ aus, so erkennt man, daß dies die Beziehung (12) ist.

3. *Ein O-$C_1 \to K$-Satz.* Für das C_1-Verfahren bei einfachen Reihen sind Umkehrsätze mit einer O-Konvergenzbedingung zuerst von G. H. Hardy [9]) und E. Landau [10]) aufgestellt worden. Sie lauten:

Aus der C_1-Summierbarkeit von $\sum a_n$ zum Werte s folgt die Konvergenz von $\sum a_n$ zum gleichen Werte, falls (Hardy) $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ oder falls (Landau) $a_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$ oder noch allgemeiner, falls

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname*{Max}_{n \leqq \nu \leqq \lambda n} (s_\nu - s_n) = w(\lambda) \to 0$$

strebt für $\lambda > 1$, $\lambda \to 1$.

Dem letzten dieser Sätze entspricht bei (reellen) Doppelreihen der

Satz 2. *Aus $\sigma_{mn} \to s$ folgt $s_{mn} \to s$* [11]), *falls mit der Bezeichnung* **1,** (11)

(1) $$w(\varkappa, \lambda) \to 0 \quad \text{für} \quad \varkappa > 1,\ \lambda > 1,\ (\varkappa, \lambda) \to (1, 1).$$

3. 1. Dem Beweis dieses Satzes schicken wir einen einfachen Hilfssatz über die Schwankungsfunktion $w(\varkappa, \lambda)$ voraus. Wir setzen, ähnlich wie in **1,** (10) und (11), für $\varkappa > 1$, $\lambda > 1$

(2) $$\operatorname{Max}(s_{mn} - s_{\mu\nu}) = \overline{w}_{mn}(\varkappa, \lambda),$$

wobei sich jetzt Max auf alle μ, ν mit $\frac{m}{\varkappa} \leqq \mu \leqq m$, $\frac{n}{\lambda} \leqq \nu \leqq n$ beziehen soll, und

(3) $$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \overline{w}_{m,n}(\varkappa, \lambda) = \overline{w}(\varkappa, \lambda).$$

Dann ist

(4) $$\overline{w}(\varkappa, \lambda) = w(\varkappa, \lambda).$$

Beweis. Ist $\frac{m}{\varkappa} \leqq \mu \leqq m$ und $\frac{n}{\lambda} \leqq \nu \leqq n$, so ist auch $\mu \leqq m \leqq \varkappa\mu$ und $\nu \leqq n \leqq \lambda\nu$ und folglich

$$(s_{mn} - s_{\mu\nu}) \leqq w_{\mu,\nu}(\varkappa, \lambda).$$

---

[9]) G. H. Hardy, Theorems relating on the summability and convergence of slowly oscillating series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **8** (1910), S. 301—320.

[10]) E. Landau, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, Prace mat. fiz. **21** (1910), S. 97—177.

[11]) Beschränktheitsbedingungen sind bei diesem Satz nicht notwendig.

Demgemäß ist auch

$$\overline{w}_{m,n}(\varkappa, \lambda) \leqq \operatorname{Max}\{w_{\mu\nu}(\varkappa, \lambda)\},$$

wenn das Max wie oben bei (2) verstanden wird. Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ist daher, wenn nur m und n hinreichend groß sind,

$$\overline{w}_{mn}(\varkappa, \lambda) \leqq w(\varkappa, \lambda) + \varepsilon$$

und folglich auch

$$\overline{w}(\varkappa, \lambda) \leqq w(\varkappa, \lambda) + \varepsilon,$$

d. h. sogar

$$\overline{w}(\varkappa, \lambda) \leqq w(\varkappa, \lambda).$$

Da man ganz entsprechend auch das Umgekehrte beweisen kann, so gilt die Behauptung (4).

Hat man allgemeiner die für alle $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ definierte Funktion $s(x, y)$ und setzt man einerseits

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Max}\{s(\xi, \eta) - s(x, y)\} = w_{xy}(\varkappa, \lambda),$$

wobei sich das Max nun auf alle ξ, η mit $x \leqq \xi \leqq \varkappa x$, $y \leqq \eta \leqq \lambda y$ bezieht, und

$$\text{(6)} \qquad \overline{\lim_{x, y \to \infty}} w_{xy}(\varkappa, \lambda) = w(\varkappa, \lambda),$$

andererseits

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Max}\{s(x, y) - s(\xi, \eta)\} = \overline{w}_{xy}(\varkappa, \lambda),$$

das Max jetzt auf alle ξ, η mit $\frac{x}{\varkappa} \leqq \xi \leqq x$, $\frac{y}{\lambda} \leqq \eta \leqq y$ bezogen, und

$$\text{(8)} \qquad \overline{\lim_{(x, y) \to \infty}} \overline{w}_{x, y}(\varkappa, \lambda) = \overline{w}(\varkappa, \lambda),$$

so beweist man ganz ebenso, daß auch für diese Schwankungsfunktion die zu (4) analoge Beziehung gilt:

$$\text{(4')} \qquad \overline{w}(\varkappa, \lambda) = w(\varkappa, \lambda).$$

3. 2. Beweis von Satz 2. Für $-1 \leqq m < m'$, $-1 \leqq n \leqq n'$ ist [12])

$$\text{(9)} \qquad \sum_{\mu=m+1}^{m'} \sum_{\nu=n+1}^{n'} s_{\mu\nu} = (m'+1)(n'+1)\sigma_{m'n'} - (m'+1)(n+1)\sigma_{m'n} - (m+1)(n'+1)\sigma_{mn'} + (m+1)(n+1)\sigma_{mn}.$$

Wenn man rechts die Glieder

$$\{(m'+1)(n'+1) - (m'+1)(n+1) - (m+1)(n'+1)\}\sigma_{mn}$$

hinzufügt und abzieht, so folgt nach Division durch $(m'-m)(n'-n)$

$$\frac{1}{(m'-m)(n'-n)} \sum_{m+1,\, n+1}^{m',\, n'} s_{\mu\nu} = \sigma_{mn} + A_1 - A_2 - A_3$$

---

[12]) Die Glieder $\sigma_{\mu\nu}$ und $s_{\mu\nu}$ mit einen negativen Index sind $= 0$ zu setzen.

oder

$$(10)\quad -s_{mn}+\sigma_{mn}+A_1-A_2-A_3=\frac{1}{(m'-m)\,(n'-n)}\sum_{m+1,\,n+1}^{m',\,n'}(s_{\mu\nu}-s_{mn}),$$

mit

$$A_1=\frac{(m'+1)\,(n'+1)}{(m'-m)\,(n'-n)}(\sigma_{m'n'}-\sigma_{mn}),$$

$$A_2=\frac{(m'+1)\,(n+1)}{(m'-m)\,(n'-n)}(\sigma_{m'n}-\sigma_{mn}),$$

$$A_3=\frac{(m+1)\,(n'+1)}{(m'-m)\,(n'-n)}(\sigma_{mn'}-\sigma_{mn}).$$

Gemäß **1**, (10) ist also für $m'\leqq \varkappa m$, $n'\leqq \lambda n$

$$(11)\qquad -s_{mn}+\sigma_{mn}+A_1-A_2-A_3\leqq w_{mn}(\varkappa,\lambda).$$

Wir setzen nun speziell $m'=[\varkappa m]$, $n'=[\lambda n]$ und lassen m, n gegen ∞ gehen. Hierbei streben A_1, A_2 und A_3 gegen 0, da in ihnen die Differenz der σ-Größen (wegen $\sigma_{mn}\to s$) nach 0 und die davorstehenden Faktoren leicht erkenntlichen endlichen Grenzwerten zustreben. Aus (11) folgt daher

$$\overline{\lim}\,(-s_{mn})+s\leqq w(\varkappa,\lambda).$$

Für $(\varkappa,\lambda)\to(1,1)$ liefert daher die Konvergenzbedingung (1):

$$(12)\qquad \underline{\lim}\,s_{mn}\geqq s.$$

Ersetzen wir in (9) und den anschließenden Umformungen m, n, m', n' der Reihe nach durch p, q, m, n und wählen $p=\left[\frac{m}{\varkappa}\right]+1$, $q=\left[\frac{n}{\lambda}\right]+1$, so erhalten wir entsprechend (11) eine Relation der Form

$$s_{mn}-\sigma_{pq}-A_1'+A_2'+A_3'\leqq \overline{w}_{m,n}(\varkappa,\lambda),$$

aus der sich für $m,\ n\to\infty$

$$(13)\qquad \overline{\lim}\,s_{mn}-s\leqq \overline{w}(\varkappa,\lambda)$$

ergibt. Auf Grund des Hilfssatzes in **3. 1** und der Konvergenzbedingung (1) folgt hieraus

$$(14)\qquad \overline{\lim}\,s_{mn}\leqq s,$$

was zusammen mit (12) die Behauptung $s_{mn}\to s$ liefert.

3. 3. Spezialfälle. (a) Mit Satz 2 gilt um so mehr der Satz: Aus $\sigma_{mn}\to s$ folgt $s_{mn}\to s$, falls mit der Bezeichnung **1**, (12)

$$(15)\qquad \omega(\varkappa,\lambda)\to 0\quad\text{für}\quad \varkappa>1,\ \lambda>1,\ (\varkappa,\lambda)\to(1,1).$$

Direkt ergibt sich der Beweis hierfür, wenn man in (10) zu den absoluten Beträgen übergeht, was

$$|s_{mn}-\sigma_{mn}|\leqq \omega_{mn}(\varkappa,\lambda)+|A_1|+|A_2|+|A_3|$$

und hieraus

$$\overline{\lim}\,|s_{mn}-s| \leqq \omega(\varkappa,\lambda),$$

also nach (15) wieder $s_{mn}\to s$ liefert.

(b) Dem Hardy-Landauschen Satze bei einfachen Reihen mit der Konvergenzbedingung $a_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$ entspricht bei Doppelreihen der

Satz 3. *Aus $\sigma_{mn}\to s$ folgt $s_{mn}\to s$, falls die $a_{\mu\nu}$ reell sind und für alle $(\mu,\nu)\neq(0,0)$*

$$a_{\mu\nu} \leqq \frac{M}{\mu^2+\nu^2} \tag{16}$$

ist.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß aus (16) folgt, daß die zugehörigen s_{mn} die Bedingung (1) des Satzes 2 erfüllen. Das ergibt sich so: Für

$$m \leqq \mu \leqq m' = [\varkappa m], \quad n \leqq \nu \leqq n' = [\lambda n], \quad (\varkappa>1,\ \lambda>1),$$

ist

$$s_{\mu\nu} - s_{mn} = \sum_{\varrho=m+1}^{\mu}\sum_{\tau=0}^{\nu} a_{\varrho\tau} + \sum_{\varrho=0}^{m}\sum_{\tau=n+1}^{\nu} a_{\varrho\tau}, \tag{17}$$

also

$$s_{\mu\nu} - s_{mn} \leqq M\left\{\sum_{\varrho=m+1}^{\mu}\sum_{\tau=0}^{\nu}\frac{1}{\varrho^2+\tau^2} + \sum_{\varrho=0}^{m}\sum_{\tau=n+1}^{\nu}\frac{1}{\varrho^2+\tau^2}\right\}. \tag{18}$$

Nun ist für beliebige positive ganze p und q

$$\sum_{\tau=0}^{q}\frac{1}{p^2+\tau^2} \leqq \frac{1}{p^2} + \int_0^q \frac{dx}{p^2+x^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{q}{p} \leqq \frac{1}{p^2} + \frac{\pi}{2p}, \tag{19}$$

also

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu} - s_{mn} &\leqq M\left\{\sum_{\varrho=m+1}^{\mu}\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{\pi}{2\varrho}\right) + \sum_{\tau=n+1}^{\nu}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{\pi}{2\tau}\right)\right\} \\ &\leqq M\left\{\frac{1}{m} + \frac{\pi}{2}\log\frac{m'}{m} + \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2}\log\frac{n'}{n}\right\}. \end{aligned}$$

Daher ist weiter

$$w_{mn}(\varkappa,\lambda) \leqq M\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2}(\log\varkappa+\log\lambda)\right\},$$

$$w(\varkappa,\lambda) \leqq \frac{\pi}{2}M(\log\varkappa+\log\lambda)$$

und also die Bedingung (1) erfüllt.

Ob der hiermit bewiesene Satz 3 auch noch richtig bleibt, wenn man (16) durch die etwas weniger fordernde Konvergenzbedingung

$$a_{\mu\nu} < \frac{M}{\mu\nu}, \qquad (\mu>0,\ \nu>0), \tag{16'}$$

ersetzt, habe ich — und das Entsprechende gilt für den unten bewiesenen Satz 5 — weder im positiven noch im negativen Sinne zu entscheiden vermocht.

(c) F. de Franchis beweist in der eingangs erwähnten Arbeit [3]) den folgenden Satz: Aus

$$(\alpha)\ \alpha_{mn} = \frac{s_{0n} + s_{1n} + \cdots + s_{mn}}{m+1} \to s,\quad (\beta)\ \beta_{mn} = \frac{s_{m0} + s_{m1} + \cdots + s_{mn}}{n+1} \to s,$$

$$(\gamma)\ |\alpha_{mn}| \leqq \gamma_m \text{ für alle } n, \qquad (\delta)\ |\beta_{mn}| < \delta_n \text{ für alle } m,$$

$$(\varepsilon)\ (m+1)(n+1)|a_{mn}| < K$$

folgt $s_{mn} \to s$.

Wir zeigen in Anlehnung an den Beweis von Satz 2, daß die Konvergenz $s_{mn} \to s$ schon allein aus (β) und aus der gegenüber (ε) wesentlich schwächeren Konvergenzbedingung

$$(\varepsilon')\qquad (n+1)|a_{mn}| < K$$

folgt oder auch schon aus der noch schwächeren Bedingung, daß mit

$$\operatorname*{Max}_{n \leqq \nu \leqq \lambda n} |s_{m\nu} - s_{mn}| = \omega^*_{mn}(\lambda), \qquad (\lambda > 1),$$

$$(\varepsilon'')\qquad \overline{\lim_{m,\,n \to \infty}}\ \omega^*_{mn}(\lambda) = \omega^*(\lambda) \to 0$$

strebt für $\lambda \to 1$ [13]).

In der Tat ist für $n' = [\lambda n]$

$$s_{m\,n+1} + \cdots + s_{mn'} = (n'+1)\beta_{mn'} - (n+1)\beta_{mn},$$
$$= (n'-n)\beta_{mn} + (n'+1)(\beta_{mn'} - \beta_{mn}),$$

$$\frac{1}{n'-n}\sum_{\nu=n+1}^{n'}(s_{m\nu} - s_{mn}) = -s_{mn} + \beta_{mn} + \frac{n'+1}{n'-n}(\beta_{mn'} - \beta_{mn})$$

$$(s_{mn} - s) = (\beta_{mn} - s) + \frac{n'+1}{n'-n}(\beta_{mn'} - \beta_{mn}) - \frac{1}{n'-n}\sum_{\nu=n+1}^{n'}(s_{m\nu} - s_{mn}).$$

Hier ist die letzte Summe ihrem Betrage nach $\leqq \omega^*_{mn}(\lambda)$, also, da für $(m,n) \to \infty$ der erste und zweite Summand rechts $\to 0$ geht,

$$\overline{\lim}\,|s_{mn} - s| \leqq \omega^*(\lambda).$$

Wegen (ε'') ist daher die linke Seite $= 0$, d. h. es strebt $s_{mn} \to s$.

Ebenso folgt natürlich auch aus (α) zusammen mit der Bedingung, daß für

$$\operatorname*{Max}_{m \leqq \mu \leqq \varkappa m} |s_{\mu n} - s_{mn}| = \omega^{**}_{mn}(\varkappa), \qquad (\varkappa > 1),$$

$$(\varepsilon''')\qquad \overline{\lim_{(m,\,n) \to \infty}}\ \omega^{**}_{mn}(\lambda) = \omega^{**}(\lambda) \to 0$$

geht für $\lambda \to 1$, wieder die Konvergenz $s_{mn} \to s$.

---

[13]) Daß (ε'') aus (ε') folgt, ergibt sich aus der einfachen Abschätzung

$$|s_{m\nu} - s_{mn}| = |a_{m\,n+1} + a_{m\,n+2} + \cdots + a_{m\nu}|$$
$$\leqq K\left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right) < K \log \lambda \to 0.$$

(d) F. de Franchis beweist weiter den Satz: Aus der C_1-Summierbarkeit der Doppelfolge s_{mn} zum Werte s folgt ihre Konvergenz zum gleichen Werte, falls die beiden Folgen

(α) $(m+n+1)|s_{mn}-s_{m\,n-1}|$ und (β) $(m+n+1)|s_{mn}-s_{m-1\,n}|$

beschränkt sind.

Dieser Satz ist in unserem Satz 2, bzw. dessen Spezialfall **3. 3** (a) enthalten. Denn (α) und (β) bedeuten in unseren Bezeichnungen, daß für alle m, n

$$|t_{mn}| \leqq \frac{K}{m+n+1}, \qquad |t'_{mn}| \leqq \frac{K}{m+n+1}$$

gilt. Dann ist aber [vgl. (17)] für $m \leqq \mu \leqq \varkappa m$, $n \leqq \nu \leqq \lambda n$, $(\varkappa > 1,\ \lambda > 1)$,

$$\begin{aligned}
&|s_{\mu\nu} - s_{mn}| \\
&\quad \leqq K\left\{\left(\frac{1}{m+\nu+2} + \ldots + \frac{1}{\mu+\nu+1}\right) + \left(\frac{1}{m+n+2} + \ldots + \frac{1}{m+\nu+1}\right)\right\}, \\
&\quad \leqq K\left\{\log\frac{\mu+\nu+1}{m+\nu+1} + \log\frac{m+\nu+1}{m+n+1}\right\}, \\
&\quad \leqq K\left\{\log\frac{\mu}{m} + \log\frac{\nu}{n}\right\}, \\
&\quad \leqq K\{\log\varkappa + \log\lambda\}.
\end{aligned}$$

Daher ist auch $\omega(\varkappa, \lambda)$ kleiner als der letzte Ausdruck, und es strebt daher $\omega(\varkappa, \lambda) \to 0$ für $(\varkappa, \lambda) \to (1, 1)$. Nach **3. 3** (a) strebt also $s_{mn} \to s$.

(e) Ist $s(x, y)$ eine für alle $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ definierte Funktion von (x, y), ist $s(\xi, \eta)$ über jedes Rechteck $0 \leqq \xi \leqq x$, $0 \leqq \eta \leqq y$ integrierbar, so bezeichnet man die Funktion

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{xy}\int_0^x\int_0^y s(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{20}$$

als das C_1-Mittel von $s(x, y)$. Strebt $\sigma(x, y) \to s$ für $(x, y) \to \infty$, so wird $s(x, y)$ als C_1-limitierbar zum Werte s bezeichnet. Entsprechend **1**, (10) und (11) setzen wir für $\varkappa > 1$, $\lambda > 1$

$$\operatorname*{Max}_{\substack{x \leqq \xi \leqq \varkappa x \\ y \leqq \eta \leqq \lambda y}} \{s(\xi, \eta) - s(x, y)\} = w_{xy}(\varkappa, \lambda)$$

und

$$\overline{\lim_{(x, y) \to \infty}}\, w_{xy}(\varkappa, \lambda) = w(\varkappa, \lambda).$$

Dann gilt analog zum Satz 1 der

Satz 4. *Aus* $\sigma(x, y) \to s$ *folgt* $s(x, y) \to s$, *falls*

$$w(\varkappa, \lambda) \to 0 \qquad \textit{für} \quad (\varkappa, \lambda) \to (1, 1). \tag{21}$$

Der Beweis verläuft fast wörtlich wie bei Satz 2. An Stelle von (9) hat man nur von der Identität

$$\int_x^{x'}\int_y^{y'} s(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_0^{x'}\int_0^{y'} - \int_0^{x'}\int_0^{y} - \int_0^{x}\int_0^{y'} + \int_0^{x}\int_0^{y} s(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

auszugehen und dann die entsprechenden Umformungen durchzuführen. So findet man zunächst, daß $\underline{\lim}\, s(x,y) \geqq s$, und weiter, unter Heranziehung des in **3.1** für die Funktion $s(x,y)$ bewiesenen Hilfssatzes, daß auch $\overline{\lim}\, s(x,y) \leqq s$ ist, also $s(x,y) \to s$ strebt.

4. *Ein O-$A \to K$-Satz.* Wir beweisen schließlich noch ein Analogon zu dem Littlewoodschen Umkehrsatz des A-Verfahrens[14]), daß aus A-$\lim s_n = s$ sich $s_n \to s$ ergibt, falls $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist:

Satz 5. *Für $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ sei die Potenzreihe*

$$f(x,y) = \sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{1}$$

konvergent und es sei für diese (x,y) stets

$$|f(x,y)| \leqq K. \tag{2}$$

Aus

$$f(x,y) \to s \qquad \text{für} \quad x \to 1-0,\ y \to 1-0 \tag{3}$$

folgt dann

$$s_{mn} \to s, \tag{4}$$

falls für alle $(\mu,\nu) \neq (0,0)$

$$|a_{\mu\nu}| \leqq \frac{M}{\mu^2+\nu^2}. \tag{5}$$

Der Beweis dieses Satzes wird in drei Stufen erbracht[15]). In **4.1** zeigen wir, daß allein aus (2) und (5) die Beschränktheit der Folge (s_{mn}) sich ergibt. Diesen Satz für sich genommen nennen wir einen *unvollständigen Umkehrsatz*. In **4.2** wird weiter gezeigt, daß für beschränkte Folgen aus der A-Limitierbarkeit, d. h. aus (2) und (3), ihre C_1-Limitierbarkeit zum gleichen Werte folgt, aus (2) und (3) also auf $\sigma_{mn} \to s$ geschlossen werden kann. Durch Anwendung von Satz 3 ergibt sich dann vollends die Behauptung (4).

4.1. *Ein unvollständiger O-Umkehrsatz.* Wir beweisen also zunächst den

Satz 6. *Aus* (2) *und* (5) *folgt*

$$|s_{mn}| \leqq K'. \tag{6}$$

---

[14]) J. E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **9** (1911), S. 434–448.

[15]) Vgl. hierzu die allgemeinen Ausführungen über Umkehrsätze von J. Karamata in den beiden Abhandlungen: 1. Allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren, Abh. Math. Sem. Hamburg **12** (1937), S. 48–63; 2. Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité, Actúalités scient. et industr. 450, VI (1937).

Beweis. Für beliebige ganze $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ gilt

$$s_{m\,n} = f(x, y) + \sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} a_{\mu\nu}(1 - x^\mu y^\nu) - B_1 - B_2 - B_3 \tag{7}$$

mit

$$B_1 = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=n+1}^{\infty}, \qquad B_2 = \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \qquad B_3 = \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \sum_{\nu=n+1}^{\infty},$$

die Summe jedes Mal über $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ erstreckt.

Nun ist

$$|B_1| \leqq M \sum_{\mu=0}^{m} \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{y^\nu}{\mu^2 + \nu^2} \Big) x^\mu \leqq M \sum_{\mu=0}^{m} \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{y^\nu}{\mu^2 + (n+1)^2} \Big) x^\mu$$

$$\leqq M \frac{y^{n+1}}{1-y} \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{(n+1)^2 + \mu^2}.$$

Nach **3**, (19) ist also weiter

$$|B_1| \leqq M \cdot \frac{y^{n+1}}{1-y} \Big\{ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{n+1} \Big\}.$$

Für $y = 1 - \frac{1}{n+1}$ und $0 \leqq x < 1$ ist also schließlich

$$|B_1| \leqq M \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big).$$

Ganz entsprechend ergibt sich, daß für $x = 1 - \frac{1}{m+1}$ und $0 \leqq y < 1$ auch

$$|B_2| \leqq M \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)$$

ist. Für B_3 ergibt sich nun wegen $\frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \leqq \frac{1}{\mu\nu}$, $(\mu > 0, \nu > 0)$, die Abschätzung

$$|B_3| \leqq M \sum_{m+1,\, n+1}^{\infty} \frac{x^\mu y^\nu}{\mu\nu} \leqq \frac{M}{(m+1)(n+1)} \cdot \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Für $x = 1 - \frac{1}{m+1}$, $y = 1 - \frac{1}{n+1}$ ist also $|B_3| \leqq M$. Für diese speziellen (x, y) bleiben also alle drei Summen B_1, B_2, B_3 beschränkt.

Um noch die erste Summe in (7) für diese selben x, y abzuschätzen, bemerken wir, daß nach dem Mittelwertsatz

$$(1 - x^\mu y^\nu) \leqq \mu(1-x) + \nu(1-y) = \frac{\mu}{m+1} + \frac{\nu}{n+1}.$$

Daher ist für diese x, y [16])

$$\Big| \sum_{0,0}^{m,n} a_{\mu\nu}(1 - x^\mu y^\nu) \Big| \leqq M \Big\{ \frac{1}{m+1} \sum_{0,0}^{m,n}{}' \frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} + \frac{1}{n+1} \sum_{0,0}^{m,n}{}' \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2} \Big\}.$$

[16]) Man beachte, daß in der nachfolgenden Summe das für $(\mu, \nu) = (0, 0)$ entstehende Glied $= 0$ ist. Dieses Glied kann also weggelassen werden, woran der Akzent am Summenzeichen rechts erinnern soll.

Nun ist für $\mu > 0$ und $n > 0$ bei Benutzung von **3**, (19)

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} = \mu \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \leqq \mu \left\{ \frac{1}{\mu^2} + \frac{\pi}{2\mu} \right\} \leqq 1 + \frac{\pi}{2},$$

was auch gilt, wenn $n = 0$ oder $\mu = 0$ ist. Daher ist auch

$$\frac{1}{m+1} \sum_{0,0}^{m,n}{}' \frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} \leqq 1 + \frac{\pi}{2}$$

und entsprechend natürlich

$$\frac{1}{n+1} \sum_{0,0}^{m,n}{}' \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2} \leqq 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Für die genannten x, y bleibt also auch die erste Summe in (7) beschränkt. Zieht man nun endlich die Voraussetzung (2) heran, so ergibt sich aus (7), daß, wie behauptet, die Folge s_{mn} selbst beschränkt ist.

4. 2. Die Behauptung der zweiten Stufe des Beweises formulieren wir prägnanter in dem

Satz 7. *Für beschränkte Folgen* (s_{mn}) *ist das A-Verfahren dem* C_1*-Verfahren äquivalent.*

Beweis. Daß für beschränkte Folgen aus der C_1-Limitierbarkeit $(\sigma_{mn} \to s)$ ihre A-Limitierbarkeit $(f(x, y) \to s)$ folgt, darf als bekannt angesehen werden [17]). Es ist also nur die jetzt im Vordergrund stehende Behauptung zu beweisen, daß bei beschränkten Folgen aus der A-Limitierbarkeit rückwärts ihre C_1-Limitierbarkeit folgt: *Aus* (6) *und* (3) [18]) *folgt* $\sigma_{mn} \to s$.

Beim Beweis dieser Behauptung folgen wir der von J. Karamata für einfache Folgen geschaffenen Methode [19]).

A. Aus (3), d. h. aus

$$f(x, y) = (1 - x)(1 - y) \sum s_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \to s \text{ [20])}$$

folgt für jedes nicht-negative ganze k und l

$$(1 - x^{k+1})(1 - y^{l+1}) \sum s_{\mu\nu} (x^{k+1})^\mu (y^{l+1})^\nu \to s$$

oder

$$(1 - x)(1 - y) \sum s_{\mu\nu} (x^\mu)^k (y^\nu)^l x^\mu y^\nu \to \frac{s}{(k+1)(l+1)} = s \int_0^1 \int_0^1 u^k v^l \, du \, dv.$$

---

[17]) K. Knopp, l. c. [5]), S. 296.

[18]) (2) ist eine unmittelbare Folge von (6).

[19]) J. Karamata, Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 319—320.

[20]) Der Grenzübergang ist, wenn nichts weiter bemerkt ist, im folgenden stets für positive, gegen $+\infty$ wachsende x und y zu verstehen.

Ist also $Q(u, v)$ ein beliebiges Polynom in u, v, so folgt weiter

$$(8) \qquad (1-x)(1-y)\sum s_{\mu\nu} Q(x^\mu, y^\nu)\, x^\mu y^\nu \to s \int_0^1 \int_0^1 Q(u, v)\, du\, dv.$$

B. Hilfssatz. Es sei

$$g(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{uv} & \text{in } e^{-1} \leqq u, v \leqq 1 \\ 0 & \text{sonst in } 0 \leqq u, v \leqq 1 \end{cases}$$

und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zwei Polynome $p(u, v)$ und $P(u, v)$, die den beiden folgenden Bedingungen

$$(9) \qquad p(u, v) \leqq g(u, v) \leqq P(u, v) \quad \text{in} \quad 0 \leqq u, v \leqq 1,$$

$$(10) \qquad \int_0^1 \int_0^1 (P(u, v) - p(u, v))\, du\, dv \leqq \varepsilon$$

genügen und für die daher auch

$$(11) \qquad \int_0^1 \int_0^1 (P - g)\, du\, dv \leqq \varepsilon \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 (g - p)\, du\, dv \leqq \varepsilon$$

ist.

Beweis. Es sei $\delta < e^{-1}$ und $< \frac{\varepsilon}{12\, e^2}$. Dann werde $\Gamma(u, v)$ in $0 \leqq u, v \leqq 1$ folgendermaßen definiert: Es sei

$$\Gamma(u, v) = \begin{cases} g(u, v) = \frac{1}{uv} \text{ in } e^{-1} \leqq u, v \leqq 1, \\ 0, \quad \text{wenn } u \textit{ oder } v \leqq \frac{1}{e} - \delta \end{cases}$$

ist. In dem verbleibenden Gebiete, das die Gestalt eines rechtwinklig gebrochenen Streifens hat, werde $\Gamma(u, v)$ nicht-negativ, $\leqq e^2$ und so definiert, daß $\Gamma(u, v)$ in dem ganzen Quadrat $0 \leqq u, v \leqq 1$ stetig ist[21]). Dann ist $g(u, v) \leqq \Gamma(u, v)$.

Analog sei in $0 \leqq u, v \leqq 1$

$$\gamma(u, v) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } u \textit{ oder } v \leqq e^{-1}; \\ g(u, v) = \frac{1}{uv}, \text{ wenn } u \textit{ und } v \geqq e^{-1} + \delta \text{ sind.} \end{cases}$$

---

[21]) Das wird z. B. dadurch erreicht, daß man $\Gamma(u, v)$ bei festem v aus $e^{-1} \leqq v \leqq 1$ mit u in $e^{-1} - \delta \leqq u \leqq e^{-1}$ linear von 0 bis $\frac{e}{v}$ und ebenso bei festem u aus $e^{-1} \leqq u \leqq 1$ mit v in $e^{-1} - \delta \leqq v \leqq e^{-1}$ linear von 0 bis $\frac{e}{u}$ steigen läßt. In dem noch fehlenden Quadratgebiet $e^{-1} - \delta \leqq u, v \leqq e^{-1}$ lasse man $\Gamma(u, v)$ die beiden geneigten Seitenflächen der Pyramide darstellen, deren Grundfläche dieses Quadrat ist und deren Spitze in e^{-1}, e^{-1}, e^2 liegt.

In dem verbleibenden Gebiete werde ähnlich wie eben $\gamma(u, v)$ so definiert, daß es nicht negativ ist und $\leqq g(u, v)$ bleibt und so, daß $\gamma(u, v)$ in dem ganzen Quadrat $0 \leqq u, v \leqq 1$ stetig ist. Für diese Funktionen Γ und γ ist dann in diesem Quadrat stets

$$\gamma(u, v) \leqq g(u, v) \leqq \Gamma(u, v) \tag{12}$$

und

$$\int_0^1 \int_0^1 (\Gamma - \gamma)\, du\, dv < 2 \cdot 2\, \delta \cdot e^2 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz gibt es nun Polynome $p(u, v)$ und $P(u, v)$, so daß in unserem Quadrat

$$\begin{cases} \left|\left(\gamma(u, v) - \frac{\varepsilon}{6}\right) - p(u, v)\right| < \frac{\varepsilon}{6} \\ \text{und} \\ \left|\left(\Gamma(u, v) + \frac{\varepsilon}{6}\right) - P(u, v)\right| < \frac{\varepsilon}{6} \end{cases} \tag{14}$$

bleibt. Für diese ist dann $0 \leqq \gamma - p < \frac{\varepsilon}{3}$ und $0 \leqq P - \Gamma < \frac{\varepsilon}{3}$. Wegen (12) erfüllen unsere Polynome also die Bedingung (9) und wegen (13) und (14) auch die Bedingung (10).

C. Dem Karamataschen Hauptsatz entsprechend beweisen wir nun: Aus

$$|s_{mn}| \leqq K' \tag{6}$$

und

$$(1 - x)(1 - y) \sum s_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \to s \tag{3}$$

folgt für die Funktion $g(u, v)$ des Hilfssatzes

$$(1 - x)(1 - y) \sum s_{\mu\nu}\, g(x^\mu, y^\nu)\, x^\mu y^\nu \to s \cdot \int_0^1 \int_0^1 g(u, v)\, du\, dv = s. \tag{15}$$

Beweis. (a) Es sei zunächst $s_{\mu\nu}$ reell und $\geqq 0$. Bezeichnet man dann den Ausdruck links in (15) mit Σ_g und bedeuten Σ_p und Σ_P diejenigen Ausdrücke, die aus Σ_g entstehen, wenn in diesem $g(u, v)$ durch $p(u, v)$ bzw. $P(u, v)$ ersetzt wird, so ist wegen (9)

$$\Sigma_p - s \leqq \Sigma_g - s \leqq \Sigma_P - s.$$

Für $(x, y) \to (1, 1)$ geht nach A die linke Seite

$$\to s \int_0^1 \int_0^1 p\, du\, dv - s = -s \int_0^1 \int_0^1 (g - p)\, du\, dv,$$

die rechte analog

$$\to s \int_0^1 \int_0^1 (P - g)\, du\, dv.$$

Nach (11) ist also

$$-\varepsilon s \leqq \underline{\lim}\,\{\Sigma_\varrho - s\} \leqq +\varepsilon s.$$

Da ε beliebig, so bedeutet dies $\Sigma_\varrho \to s$, d. h. (15).

(b) Ist $s_{\mu\nu}$ reell und $> -M$, so wende man den unter (a) bewiesenen Satz ein erstes Mal auf die Folge $s_{\mu\nu} + M$, ein zweites Mal auf die Folge $s_{\mu\nu} \equiv M$ an Stelle von $s_{\mu\nu}$ an. Subtrahiert man die Ergebnisse, so ergibt sich auch jetzt wieder (15).

(c) Im Falle komplexer $s_{\mu\nu}$ endlich hat man nur Real- und Imaginärteil gesondert zu behandeln, um auch jetzt wieder die Gültigkeit der Beziehung (15) zu erkennen.

D. Um den Beweis von Satz 7 zu vollenden, setzen wir speziell $x = e^{-\frac{1}{m+1}}$ $y = e^{-\frac{1}{n+1}}$ und gehen auf die Bedeutung der Funktion $g(u, v)$ zurück. Wegen

$$1 - x \cong \frac{1}{m+1}, \qquad 1 - y \cong \frac{1}{n+1}$$

geht dann (15) über in

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} s_{\mu\nu} \to s, \qquad (m, n \to \infty), \tag{16}$$

und liefert also unmittelbar die C_1-Summierbarkeit der Folge s_{mn} zum Werte s.

Wie schon vorweg bemerkt, bedarf es nun nur noch der Anwendung von Satz 3, um aus (16) auf $s_{mn} \to s$ zu schließen und so den Beweis von Satz 5 zu vollenden.

(Eingegangen am 17. April 1939.)

Eine merkwürdige Mittelbildung bei algebraischen Gleichungen mit lauter positiven Wurzeln.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Sei $0 < \lambda_1 \leqq \ldots \leqq \lambda_N$, *seien* $y_\nu^{(\mu)}$ *reelle Zahlen und die Determinanten*

$$c_{i_1, \ldots, i_n} = \begin{vmatrix} y_{i_1}^{(1)} & \ldots & y_{i_1}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{i_n}^{(1)} & \ldots & y_{i_n}^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (1 \leqq i_\nu \leqq N)$$

nicht alle gleich Null. Es werde gesetzt

$$f_{i_1, \ldots, i_n}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n} (1 - \lambda/\lambda_{i_\nu}), \qquad g_{i_1, \ldots, i_n}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n} (\lambda - \lambda_{i_n}).$$

Dann gilt von den Polynomen

$$f(\lambda) = \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_n \leqq N} c_{(i)}^2 f_{(i)}(\lambda), \quad g(\lambda) = \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_n \leqq N} c_{(i)}^2 g_{(i)}(\lambda):$$

1. *Ihre Nullstellen sind alle positiv.*

Setzt man also

$$f(\lambda) = \sum_{(i)} c_{(i)}^2 \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (1 - \lambda/\lambda_\nu'), \quad 0 < \lambda_1' \leqq \ldots \leqq \lambda_n',$$

$$g(\lambda) = \sum_{(i)} c_{(i)}^2 \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (\lambda - \lambda_\nu''), \qquad 0 < \lambda_1'' \leqq \ldots \leqq \lambda_n'',$$

so gilt

2. $\lambda_\nu \leqq \lambda_\nu'$ $(\nu = 1, \ldots, n)$,
3. $\lambda_\nu' \leqq \lambda_\nu''$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Diesen Satz will ich beweisen. Im Falle $n = 1$ wird

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 (1 - \lambda/\lambda_i), \quad 1/\lambda_1' = \Big(\sum_{i=1}^{N} c_i^2/\lambda_i\Big) : \sum_{i=1}^{N} c_i^2,$$

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 (\lambda - \lambda_i), \quad \lambda_1'' = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \lambda_i : \sum_{i=1}^{N} c_i^2;$$

es ist also λ_1' das mit den Gewichten $c_1^2, \ldots, c_N^2$ gebildete harmonische Mittel der Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ und λ_1'' ihr mit denselben Gewichten gebildetes arithmetisches Mittel. Die Behauptungen 1. und 2. verstehen sich beinahe von selbst; die Behauptung 3. ist der bekannte Satz über das Größenverhältnis des arithmetischen und des harmonischen Mittels.

Trotz dieses Zusammenhanges würde ich den anfangs ausgesprochenen Satz keiner besonderen Veröffentlichung wert halten, wenn er nicht mit einer bedeutenden Leistung der angewandten Mathematik zu tun hätte. Als Herr Grammel im Schwäbischen Mathematischen Kolloquium über sein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertaufgaben vortrug — seine Untersuchung erscheint im Ingenieur-Archiv —, sprach er den Satz aus und teilte mit, daß er für den Fall $n = 2$ einen Beweis hatte. Bei jenen Eigenwertaufgaben sind λ_ν die Eigenwerte, λ_ν' die nach dem Grammelschen und λ_ν'' die nach dem Galerkinschen Verfahren ermittelten Näherungswerte. Der Satz besagt also, daß beide Näherungswerte obere Schranken der Eigenwerte sind, und zwar die Grammelschen bessere als die Galerkinschen. Allerdings sind unendlich viele Eigenwerte vorhanden; es ist also N durch ∞ zu ersetzen. Wenn aber die unendlichen Reihen für die Beiwerte von $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ konvergieren — und das ist bei den genannten Näherungsverfahren der Fall —, so folgt der auf den Fall $N = \infty$ erweiterte Satz ohne weiteres aus dem Satze, wie er oben steht.

Beim Beweise benutze ich die Matrizenschreibweise. Mit A und B werde ich N-reihige, mit P, Q und R werde ich n-reihige quadratische, übrigens symmetrische Matrizen bezeichnen; x und y seien N-dimensionale, ξ und η seien n-dimensionale Vektoren, und zwar geschrieben als eine *Spalte*. Ansetzen eines Sterns bezeichne den Übergang zur gestürzten Matrix, also bei einem Vektor den Übergang zur Schreibweise als eine Zeile. So bezeichnet z. B. $x^* A y$ die symmetrische Bilinearform $\sum_1^N x_\mu a_{\mu\nu} y_\nu$. Immer bezeichne E die Einheitsmatrix der aus dem Zusammenhang ersichtlichen Reihenzahl.

Die im Wortlaut des Satzes auftretenden Größen $y_\nu^{(\mu)}$ fasse ich auf als n Vektoren $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, so daß $y^{(\mu)}$ die mit $y_1^{(\mu)}, \ldots, y_N^{(\mu)}$ besetzte Spalte bedeutet. Diese n Vektoren sind nach Voraussetzung linear unabhängig. Ersetze ich sie durch n linear unabhängige Kombinationen

$$z^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{\mu\nu} y^{(\nu)} \qquad (\det(\gamma_{\mu\nu}) \neq 0),$$

so liefern die Komponenten $z_\nu^{(\mu)}$ der Vektoren $z^{(\mu)}$ an Stelle der Determinanten $c_{(i)}$ die Werte

$$d_{i_1, \ldots, i_n} = \det(\gamma_{\mu\nu})\, c_{i_1, \ldots, i_n}.$$

Benutzt man diese an Stelle der Werte $c_{(i)}$ zur Bildung der Polynome $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$, so erhalten diese nur den Faktor $\det(\gamma_{\mu\nu})^2$ zugesetzt. Die Nullstellen λ_ν' und λ_ν'' bleiben dieselben; die Behauptungen ändern sich nicht.

Diese Ersetzung der Vektoren $y^{(\mu)}$ durch die Vektoren $z^{(\mu)}$ sei nun von vornherein vollzogen, und zwar nach dem bekannten Orthogonalisierungsverfahren, so daß an die Stelle der Vektoren $y^{(\mu)}$ ein Satz von n zueinander

senkrechten Vektoren der Länge Eins getreten ist. Bezeichne ich diese Vektoren wieder mit $y^{(u)}$, so gilt jetzt

$$y^{(u)*} y^{(v)} = \delta_{\mu\nu}$$

oder, wenn die Matrix $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ mit Y bezeichnet wird,

$$Y^* Y = E.$$

Den Aussagen des Satzes kommt man näher, wenn man die Größen λ_ν als Eigenwerte einer quadratischen Form auffaßt. Sei also A die Matrix einer solchen Form, etwa in der Hauptachsengestalt:

$$x^* A\, y = \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu y_\nu / \lambda_\nu,$$

so daß $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ die Halbachsenquadrate der Fläche zweiter Ordnung

$$x^* A\, x = 1 \tag{1}$$

sind. Setzt man nun $x = Y\xi$ und durchläuft der Vektor ξ den n-Raum, so durchläuft x einen den Nullpunkt enthaltenden linearen n-Raum L_n im N-Raume. Der Schnitt von L_n mit der Fläche (1) wird gegeben durch

$$\xi^* P \xi = 1, \tag{2}$$

worin

$$P = Y^* A\, Y,$$

$$\xi^* P \xi = \xi^* Y^* A\, Y \xi = x^* A\, x$$

ist. Da die Vektoren $y^{(u)}$ linear unabhängig sind, verschwindet der Vektor $x = Y\xi$ nur, wenn $\xi = 0$ ist. Daher ist $\xi^* P \xi$ ebenso wie $x^* A\, x$ eine positiv definite Form. Die Eigenwerte der Form $\xi^* P \xi$, die Halbachsenquadrate der Schnittfläche (2), sind die Nullstellen des Polynoms

$$\begin{aligned}
\det\,(E - \lambda P) &= \det\,(Y^* Y - \lambda\, Y^* A\, Y) \\
&= \det{}_{\mu\nu}\Big[\sum_{k=1}^{N} (1 - \lambda/\lambda_k)\, y_k^{(u)}\, y_k^{(v)}\Big] \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{N} \det{}_{\mu\nu}\big[(1 - \lambda/\lambda_{k_\mu})\, y_{k_\mu}^{(u)}\, y_{k_\mu}^{(v)}\big] \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{N} f_{k_1, \ldots, k_n}(\lambda)\, y_{k_1}^{(1)} \ldots y_{k_n}^{(n)}\, c_{k_1, \ldots, k_n}.
\end{aligned}$$

Hier verschwinden wegen des Faktors $c_{(k)}$ alle Glieder, bei denen zwei der Zeiger k_μ übereinstimmen. Von den übrigen fasse ich diejenigen zusammen, bei denen $k_1, \ldots, k_n$ insgesamt dieselben Zahlen sind, etwa der Größe nach geordnet $i_1, \ldots, i_n$. Sie entstehen aus dem Gliede mit $k_\nu = i_\nu$, indem man die unteren Zeiger bei f, y und c gleichzeitig auf alle $n!$ möglichen Weisen miteinander vertauscht. Das ändert bei f gar nichts und bei c das Vorzeichen,

wenn die Vertauschung eine ungerade ist. Sie Summe der mit diesen Vorzeichen versehenen Produkte $y_{k_1}^{(1)} \ldots y_{k_n}^{(n)}$ ist aber gerade die Determinante $c_{i_1,\ldots,i_n}$, und so wird

$$\det(E - \lambda P) = \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_n \leqq N} c_{i_1,\ldots,i_n}^2 f_{i_1,\ldots,i_n}(\lambda) = f(\lambda).$$

Also sind $\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$ die Eigenwerte der Form $\xi^* P \xi$.

Ebenso behandle ich die Form $\xi^* R \xi$ mit

$$R = Y^* A^{-1} Y$$

betrachte aber dabei das Polynom $\det(\lambda E - R)$. Eine Umformung, die genau wie die eben durchgeführte verläuft, ergibt

$$\det(\lambda E - R) = g(\lambda);$$

also sind $1/\lambda_1'', \ldots, 1/\lambda_n''$ die Eigenwerte der Form $\xi^* R\ \xi$ und $\lambda_1'', \ldots, \lambda_n''$ die der Form $\xi^* R^{-1} \xi$.

Alle auftretenden quadratischen Formen sind positiv-definit, ihre Eigenwerte daher (reell und) positiv; somit ist die Behauptung 1. bewiesen.

Die Behauptung 2. ergibt sich daraus, daß die in L_n gelegene Fläche zweiter Ordnung (2) der Schnitt der Fläche (1) mit L_n ist. Ein bekannter Satz besagt, daß die in wachsender Anordnung ν-te Halbachse von (2) nicht kleiner ist als die entsprechende von (1)[1]). Das heißt aber $\lambda_\nu \leqq \lambda_\nu'$.

Auch die Behauptung 3. läßt sich aus räumlicher Betrachtung ableiten. Faßt man nämlich die Komponenten des Vektors x als nicht homogene Ebenenkoordinaten auf — nämlich derjenigen Ebene, die von den Punkten x' mit $x^* x' = 1$ erfüllt wird —, so ist

$$x^* A^{-1} x = 1$$

die Gleichung der Fläche (1) in Ebenenkoordinaten. Die Vektoren der Gestalt $x = Y\xi$ sind die Koordinatenvektoren der zu L_n senkrechten Ebenen, nämlich derjenigen, die zu den in L_n liegenden Vektoren $x = Y\xi$ senkrecht stehen. Der Schnitt einer solchen Ebene mit L_n hat in dem durch die Einheitsvektoren $y^{(\nu)}$ bestimmten Koordinatensystem die Gleichung

$$x^* x' = \xi^* Y^* Y \xi' = \xi^* \xi' = 1.$$

Also wird die Gleichung

$$\xi^* R \xi = 1$$

---

[1]) R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Band 1, S. 17 der ersten Auflage (1924). Dort ist der Satz für die „charakteristischen Zahlen" ausgesprochen. Sie sind die Kehrwerte der Eigenwerte und haben daher die umgekehrte Größenfolge.

erfüllt durch die Ebenenkoordinaten der Schnitte von L_n mit den zu L_n senkrechten Berührebenen der Fläche (1). Die von diesen Ebenen in L_n umhüllte Fläche zweiter Ordnung hat in Punktkoordinaten die Gleichung

$$\xi^* R^{-1} \xi = 1. \tag{3}$$

Da aber die Berührebenen der Fläche (1) nicht in ihr Inneres eintreten, gilt dasselbe von ihren Schnitten mit L_n und dem Schnitt der Fläche (1) mit L_n, als dessen Gleichung oben (2) erkannt wurde. Demnach gilt

$$\xi^* R^{-1} \xi \leqq \xi^* P \xi,$$

und daraus folgt die Behauptung 3. nach einer bekannten Monotonie-Eigenschaft der Eigenwerte [2]).

Rein rechnerisch geht der letzte Beweis folgendermaßen. Ist $x^* B x$ eine positiv-definite Form, so gilt zunächst die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$(x^* B y)^2 \leqq x^* B x \cdot y^* B y$$

als Ausdruck dafür, daß

$$(\lambda x^* + \mu y^*) B (\lambda x + \mu y)$$

eine nicht negative Form in λ und μ ist. Setzt man nun

$$z = By, \quad y = B^{-1} z, \quad y^* B y = z^* B^{-1} z,$$

so wird

$$(x^* z)^2 \leqq x^* B x \cdot z^* B^{-1} z,$$

ja sogar

$$z^* B^{-1} z = \operatorname*{Max}_x \frac{(x^* z)^2}{x^* B x},$$

da für $x = B^{-1} z$ Gleichheit eintritt. Also ist

$$\zeta^* R^{-1} \zeta = \operatorname*{Max}_\xi \frac{(\xi^* \zeta)^2}{\xi^* R \xi}.$$

Setzt man hierin $x = Y\xi$, $z = Y\zeta$, so durchläuft ξ alle Vektoren aus L_n; man kann daher

$$\zeta^* R^{-1} \zeta = \operatorname*{Max}_{x \text{ in } L_n} \frac{(x^* z)^2}{x^* A^{-1} x}$$

schreiben. Läßt man hier die dem Vektor x auferlegte Bedingung „x in L_n“ weg, so wird das Maximum nicht verkleinert; daher ist

$$\zeta^* R^{-1} \zeta \leqq \operatorname*{Max}_x \frac{(x^* z)^2}{x^* A^{-1} x} = z^* (A^{-1})^{-1} z = z^* A z = \zeta^* P \zeta,$$

woraus wie oben die Behauptung 3. folgt.

[2]) A. a. O.[1]), S. 18.

(Eingegangen am 27. April 1939.)

Zur Theorie der Gefüge und Vereine.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Ein Begriff kann einerseits eingeengt, andererseits verallgemeinert werden. Bei einem implizit, d. h. durch ein Axiomensystem erklärten Begriff geschieht die Umbildung in der Weise, daß die axiomatischen Fesseln entweder angezogen oder gelockert werden. Ein bemerkenswertes Beispiel bietet der mit dem Begriff des *Verbandes* verknüpfte Entwicklungsprozeß. So gelangt man, indem man den Begriff des Verbandes immer mehr einengt, schließlich zur *linear* geordneten Menge und damit zur reellen Zahl, während nach der entgegengesetzten Richtung der Weg, wie ich letzthin dargelegt habe [1]), über die Etappen *Halbverband* und *Gewebe* zu den *teilweise* geordneten und *quasi* geordneten Mengen führt, um dann in die allgemeine Theorie der Beziehungen, einem wichtigen und interessanten Teilstück der modernen Logistik, einzumünden. An dem so umrissenen Gebiet haben alle Zweige der Mathematik Anteil.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist der weitere Ausbau der rückwärtigen, d. h. der auf das Allgemeine gerichteten Verbindungen, und zwar schalten wir zwischen Verband auf der einen Seite, Gewebe und $\mathfrak{T}$-Menge auf der anderen Seite vier neue Stationen ein, die wir als *Gefüge* und *Halbgefüge*, *Verein* und *Halbverein* bezeichnen; vgl. die schematische Darstellung in § 5. Ebenso wie die Begriffe Verband und Halbverband können auch die Begriffe Verein und Halbverein sowohl auf beziehungs-theoretischer als auf verknüpfungs-theoretischer Grundlage aufgebaut werden. Der Unterschied zwischen Halbverband und Halbverein besteht vom verknüpfungs-theoretischen Standpunkt aus in folgendem: Während zwei Elemente a und b eines Halbverbandes unter allen Umständen ein Element c bestimmen derart, daß

$$a \circ b = c$$

ist, muß bei einem Halbverein die Existenz des Elementes c von Fall zu Fall festgestellt werden. Ähnlich unterscheiden sich Verband und Verein. Wir beschränken uns weiterhin auf die beziehungs-theoretische Behandlung des

[1]) Vgl. [H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände, Deutsche Math. **4** (1939), S. 32—43; ferner [H. 2] Theorie der Gewebe, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 107—126.

Problems. Was die Art der Darstellung, hier die Richtung des Weges anbetrifft, so gehen wir nicht rückwärts vom Verband zur quasi geordneten Menge, sondern vorwärts vom Allgemeinen zum Besonderen.

Im einzelnen liegt der Arbeit der folgende Plan zugrunde. § 1 stellt die Verbindung zur Theorie der Beziehungen her; wir entwickeln darin u. a. den Begriff der zusammenhängenden Menge, der in § 2 beim Ausbau der teilweise geordneten Menge zum Gewebe die ausschlaggebende Rolle spielt. Die beiden folgenden Paragraphen bilden zusammen das Kernstück der Arbeit. In § 3 vollziehen wir den Übergang zum Halbgefüge und Gefüge; in ganz entsprechender Weise leitet § 4 zum Halbverein und Verein über. Schließlich zeigen wir in § 5, wie man zum Halbverband und weiter zum Verband gelangt.

Für das Folgende wird die Kenntnis der mit [H. 1] und [H. 2] bezeichneten Arbeiten vorausgesetzt.

§ 1.

Vorgänger- und nachfolgerendliche Beziehungen. Zusammenhängende Mengen.

Wie in der Logistik üblich, bezeichnen wir die *Umkehrung* einer *zweigliedrigen* Beziehung R — nur mit solchen haben wir es weiterhin zu tun — mit $\breve{R}$, so daß also

$$x \breve{R} y \quad \text{und} \quad y R x$$

für alle Elementpaare (x, y) denselben Aussagewert haben.

Wir bringen nun einige Erklärungen, auf die wir im Verlauf der Arbeit zurückgreifen.

Erklärung 1. Gilt

$$x R y,$$

so heiße x ein *R-Vorgänger* von y und entsprechend y ein *R-Nachfolger* von x. Sind überdies x und y voneinander verschieden, so heiße x ein *eigentlicher* R-Vorgänger von y und entsprechend y ein *eigentlicher* R-Nachfolger von x.

Erklärung 2. Es sei M eine Menge und R eine Beziehung in M. Ein Element a aus M von der Beschaffenheit, daß es in M keinen eigentlichen R-Vorgänger von a gibt, heiße eine *$\mathfrak{v}$-Spitze* von M in bezug auf R. Entsprechend heiße ein Element a aus M von der Beschaffenheit, daß es in M keinen eigentlichen R-Nachfolger von a gibt, eine *$\mathfrak{n}$-Spitze* von M in bezug auf R. Ein von einer Spitze verschiedenes Element von M heiße ein *inneres* Element von M in bezug auf R.

Erklärung 3. Es sei M eine Menge. Eine Beziehung R heiße *vorgängerendlich*, kurz $\mathfrak{v}$-endlich in M, wenn jedes Element aus M nur endlich viele

R-Vorgänger in M hat. Entsprechend heiße R *nachfolgerendlich*, kurz n-endlich in M, wenn jedes Element aus M nur endlich viele R-Nachfolger in M hat [2]).

Erklärung 4. Zwei Elemente a und b mögen als voneinander *abhängig* in bezug auf R bezeichnet werden, wenn mindestens eine der beiden Aussagen

$$a\,R\,b, \qquad b\,R\,a$$

wahr ist.

Folgendermaßen läßt sich der Begriff der Elementabhängigkeit verallgemeinern.

Erklärung 5. Eine Folge

$$a_1, \ldots, a_k \tag{1}$$

von Elementen aus M heiße eine *Brücke* in M in bezug auf R, wenn je zwei in (1) unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente voneinander abhängig in bezug auf R sind [3]). Die Elemente (1) mögen als die *Pfeiler* der Brücke bezeichnet werden. Insbesondere mögen a_1, a_k *Endpfeiler* und $a_2, \ldots, a_{k-1}$ *innere* Pfeiler genannt werden. Ein innerer Pfeiler $a_\varkappa$ heiße ein *eigentlicher* oder ein *uneigentlicher* Pfeiler, je nachdem $a_{\varkappa-1}$ und $a_{\varkappa+1}$ voneinander unabhängig sind oder nicht. Ein innerer Pfeiler $a_\varkappa$ heiße ein *oberer* oder ein *unterer* Pfeiler, je nachdem

$$a_{\varkappa-1}\,\breve{R}\,a_\varkappa, \qquad a_\varkappa\,R\,a_{\varkappa+1}$$

oder

$$a_{\varkappa-1}\,R\,a_\varkappa, \qquad a_\varkappa\,\breve{R}\,a_{\varkappa+1}$$

ist. Eine Brücke werde als *offen* oder *geschlossen* bezeichnet, je nachdem die Endpfeiler verschieden sind oder nicht. Daß B eine Brücke mit den Endpfeilern a und b ist, werde auch durch die Wendung ausgedrückt: Die Brücke B verbindet a mit b. Zwei Brücken mit denselben Endpfeilern mögen *gleichendig* genannt werden.

Erklärung 6. Zwei Elemente a und b aus M heißen *zusammenhängend* in bezug auf R, wenn es in M mindestens eine Brücke in bezug auf R gibt, die a mit b verbindet.

Zwei voneinander abhängige Elemente sind auch zusammenhängend, zwei voneinander unabhängige Elemente im allgemeinen nicht. Zwei zusammenhängende Elemente können stets durch mindestens eine Brücke verbunden werden, die keine uneigentlichen Pfeiler enthält.

Erklärung 7. Eine Menge M heiße *zusammenhängend* in bezug auf eine Beziehung R, wenn je zwei Elemente aus M zusammenhängend in bezug auf R sind.

---

[2]) Dabei ist der Fall nicht ausgeschlossen, daß ein Element überhaupt keinen R-Vorgänger oder R-Nachfolger in M hat.

[3]) Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Anzahl der Elemente (1), die übrigens nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen, endlich ist.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen machen wir ausdrücklich darauf aufmerksam, daß der Zusammenhangsbegriff der Logistik nicht mit dem in den Erklärungen 6 und 7 aufgestellten Zusammenhangsbegriff identisch ist. Der erstere ist wesentlich enger: Im Sinne der Logistik ist M dann und nur dann zusammenhängend in bezug auf R, wenn je zwei Elemente aus M in unserem Sinne voneinander abhängig in bezug auf R sind. Übrigens legt die Logistik die Eigenschaft „Zusammenhängend" nicht der Menge M, sondern der Beziehung R bei.

§ 2.

Quasi geordnete und teilweise geordnete Mengen. Gewebe.

Grundgegebenheit sei eine von der Nullmenge verschiedene Menge M. Es sei R eine Beziehung in M. Diese Beziehung sei durch die beiden folgenden *Axiome* näher bestimmt:

I. Sind a, b, c Elemente aus M und gilt

$$a\,R\,b, \quad b\,R\,c,$$

so gilt auch

$$a\,R\,c.$$

II. Ist a ein beliebiges Element aus M, so gilt

$$a\,R\,a.$$

Erklärung 8. Eine Menge M mit einer den Axiomen I und II genügenden Elementbeziehung R heiße eine in bezug auf R *quasi geordnete* Menge oder ein *Foradorischer* Bereich in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{Q}(R)$. Unter der *Ordnung* eines $\mathfrak{Q}(R)$ werde die Anzahl der verschiedenen Elemente desselben verstanden; je nachdem die Ordnung endlich oder unendlich ist, werde das $\mathfrak{Q}(R)$ als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet.

Der Begriff der quasi geordneten Menge bildet die Grundlage der Foradorischen Teiltheorie, die mit der Theorie der Gewebe und Verbände eng verwandt ist[4]). Die Bezeichnung „Quasi geordnet" geht auf G. Birkhoff zurück[5]).

Es sei M ein $\mathfrak{Q}(R)$. Auf M wirke das folgende *Axiom* ein:

III. Sind a, b Elemente aus M und gilt

$$a\,R\,b, \quad b\,R\,a,$$

so ist

$$a = b.$$

---

[4]) E. Foradori, Grundgedanken der Teiltheorie, Leipzig 1937. Aus mengentheoretischen Erwägungen unterscheidet Foradori zwischen Bereich und Menge. Wir betrachten in der vorliegenden Arbeit beide Ausdrücke als synonym.

[5]) Vgl. G. Birkhoff, [9] Rings of sets, Duke math. J. **3** (1937), S. 444.

Erklärung 9. Ein dem Axiom III genügendes $\mathfrak{Q}(R)$ heiße eine in bezug auf R *teilweise geordnete* Menge oder eine *Hausdorffsche* Menge in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{T}(R)$.

Das Axiom III ist mit dem folgenden absolut gleichwertig:

III′. Sind a, b zwei verschiedene Elemente aus M, so ist höchstens eine der beiden Aussagen

$$a\,R\,b, \quad b\,R\,a$$

wahr.

Die ganzen algebraischen Zahlen bilden, wenn $a\,R\,b$ den Sinn von $a \mid b$ hat, eine quasi geordnete, aber nicht eine teilweise geordnete Menge [6]). Dagegen bilden die ganzen positiven Zahlen bei derselben Interpretation eine teilweise geordnete Menge.

Bei einer teilweise geordneten Menge verwendet man neben der Bezeichnung Vorgänger (Nachfolger) auch die Bezeichnungen *Vorelement (Nachelement)* und *Oberelement (Unterelement)*. Eine $\mathfrak{v}$-Spitze ($\mathfrak{n}$-Spitze) wird auch als eine *obere (untere)* Spitze oder als ein *oberstes (unterstes)* Element bezeichnet [7]).

Erklärung 10. Ein $\mathfrak{T}(R)$, das überdies zusammenhängend im Sinne der Erklärung 7 ist, heiße ein *Gewebe* in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{W}(R)$. Ist M ein $\mathfrak{W}(R)$, so heiße eine Untermenge N von M, die ebenfalls ein $\mathfrak{W}(R)$ ist, ein *Untergewebe* von M; umgekehrt werde M als ein *Obergewebe* von N bezeichnet. Insbesondere werde, wenn M von N verschieden ist, N ein *eigentliches* Untergewebe von M und umgekehrt M ein *eigentliches* Obergewebe von N genannt [8]).

Es gilt der folgende Satz, dessen Beweis keine Schwierigkeit machen wird:

Satz 1. *Jede teilweise geordnete Menge M läßt sich als ein System von endlich oder unendlich vielen Geweben auffassen derart, daß zwei Elemente, die verschiedenen Geweben des Systems angehören, nicht zusammenhängend in M sind.*

Der Begriff des Gewebes nimmt — ebenso wie der Begriff des Verbandes — eine Schlüsselstellung ein, von der aus ein Eindringen in die heterogensten Gebiete der Mathematik möglich ist. Wir erblicken in ihm ein Ordnungsprinzip, dessen Wirkungsbereich sich über alle Provinzen der Algebra und Geometrie erstreckt. Es ist hier nicht der Ort, näher darauf einzugehen. Wir verweisen dafür auf frühere Betrachtungen; vgl. auch [H. 2], § 5.

---

[6]) Vgl. E. Foradori, S. 8.

[7]) Vgl. [H. 2], S. 109.

[8]) In [H. 2], S. 111 ist das Gewebe etwas anders erklärt; doch liegt nur ein Unterschied in der Formulierung, kein sachlicher Unterschied vor.

§ 3.

Halbgefüge und Gefüge.

Es sei M ein $\mathfrak{T}(R)$. Auf M wirke das folgende *Axiom* ein:

IV. Sind a, b Elemente aus M, so gibt es in M mindestens ein Element x derart, daß

$$x\,R\,a, \qquad x\,R\,b$$

ist.

Erklärung 11. Ein dem Axiom IV genügendes $\mathfrak{T}(R)$ heiße ein *Halbgefüge* in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{H}_h(R)$.

Ein $\mathfrak{H}_h(R)$ ist, da je zwei Elemente desselben zusammenhängend sind, zugleich ein $\mathfrak{W}(R)$.

In Verallgemeinerung von IV gilt folgendes:

Satz 2. *Es sei M ein $\mathfrak{H}_h(R)$. Sind*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

endlich viele Elemente aus M, so gibt es in M mindestens ein Element $x^{(n)}$ derart, daß

$$x^{(n)}\,R\,a_1, \ldots, x^{(n)}\,R\,a_n$$

ist.

Beweis. Die Behauptung ist für $n = 1$ nach II und für $n = 2$ nach IV richtig. Sie sei für den Wert n richtig. Nach IV gibt es dann in M ein Element x derart, daß

$$x\,R\,x^{(n)}, \qquad x\,R\,a_{n+1}$$

ist. Wegen I gilt nun

$$x\,R\,a_1, \ldots, x\,R\,a_n;$$

x ist somit ein $x^{(n+1)}$.

Erklärung 12. Ein $\mathfrak{H}_h(R)$ heiße *verstärkt*, wenn — über IV hinausgehend — das folgende *Axiom* in Kraft ist:

V. Sind

$$a_1, a_2, \ldots$$

endlich oder unendlich viele Elemente aus M, so gibt es in M mindestens ein Element x derart, daß

$$x\,R\,a_1, \; x\,R\,a_2, \ldots$$

ist.

Jedes endliche, aber nicht jedes unendliche $\mathfrak{H}_h(R)$ ist verstärkt [9]). Ferner gilt:

Satz 3. *Ein $\mathfrak{H}_h(R)$ hat höchstens eine* $\mathfrak{v}$*-Spitze; ein verstärktes $\mathfrak{H}_h(R)$ hat genau eine* $\mathfrak{v}$*-Spitze* [10]).

---

[9]) Vgl. [H. 1], S. 36 und 37, Beispiel 1.

[10]) Wegen des Beweises vgl. [H. 2], S. 113.

Erklärung 13. Ein $\mathfrak{F}_h(R)$, das zugleich ein $\mathfrak{F}_h(\breve{R})$ ist, heiße ein *Gefüge* in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{F}(R)$.

Anmerkung. Auf die Theorie der Halbgefüge und Gefüge bin ich zum erstenmal in [H. 2], § 2 eingegangen. Die dortige Bezeichnungsweise weicht von der jetzigen ab; so ist dort noch nicht von Gefügen die Rede. Das jetzige $\mathfrak{F}_h(R)$ heißt dort *Hochgewebe*, das jetzige $\mathfrak{F}_h(\breve{R})$ *Tiefgewebe*.

§ 4.

Halbverein und Verein.

Es sei M ein $\mathfrak{T}(R)$. Auf M wirke das folgende *Axiom* ein:

VI. Sind a, b Elemente aus M derart, daß es in M mindestens ein Element x gibt, so daß

$$x\,R\,a, \quad x\,R\,b \tag{2}$$

ist, so gibt es unter den (2) genügenden Elementen x ein Element c derart, daß

$$x\,R\,c$$

für alle diese x ist.

Wegen III gibt es zu zwei Elementen a, b aus M höchstens ein Element c, das VI genügt. Dann und nur dann ist $a = c$, wenn $a\,R\,b$ ist.

Erklärung 14. Ein dem Axiom VI genügendes $\mathfrak{T}(R)$ heiße ein *Halbverein* in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{E}_h(R)$.

Anders wie ein $\mathfrak{F}_h(R)$ ist ein $\mathfrak{E}_h(R)$ nicht ohne weiteres ein $\mathfrak{W}(R)$. Dagegen gilt wie bei den Halbgefügen folgendes:

Satz 4. *Es sei M ein $\mathfrak{E}_h(R)$. Sind*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

endlich viele Elemente aus M derart, daß es in M mindestens ein Element $x^{(n)}$ gibt, so daß

$$x^{(n)}\,R\,a_1, \ldots, x^{(n)}\,R\,a_n \tag{3}$$

ist, so gibt es unter den (3) *genügenden Elementen $x^{(n)}$ genau ein Element c_n derart, daß*

$$x^{(n)}\,R\,c_n$$

für alle diese $x^{(n)}$ ist[11]).

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig; es gibt mindestens ein $x^{(1)}$, nämlich a_1; in diesem Falle ist $c_1 = a_1$. Für $n = 2$ ist die Behauptung ebenfalls richtig; der Satz besagt in diesem Falle dasselbe wie das Axiom VI.

---

[11]) In engerer Fassung, nämlich für Halbverbände, ist Satz 4 — ebenso übrigens auch Satz 5 — in [H. 1] bewiesen.

Nunmehr zeigen wir: Trifft die Behauptung des Satzes für den Wert n zu, so trifft sie auch für den Wert $n+1$ zu.

Es sei X_{n+1} die Gesamtheit der Elemente $x^{(n+1)}$, also die Gesamtheit der Elemente, für die

$$x^{(n+1)} R a_1, \ldots, x^{(n+1)} R a_{n+1} \tag{4}$$

ist. Ferner sei Y_{n+1} die Gesamtheit der Elemente $y^{(n+1)}$, für die

$$y^{(n+1)} R c_n, \quad y^{(n+1)} R a_{n+1} \tag{5}$$

ist. Die Mengen X_{n+1} und Y_{n+1} sind aber identisch, wobei es nicht ausgeschlossen ist, daß sie leer sind. Denn einerseits ist jedes $x^{(n+1)}$ auch ein $y^{(n+1)}$; wegen (4) ist nämlich jedes $x^{(n+1)}$ zugleich ein $x^{(n)}$; es ist also

$$x^{(n+1)} R c_n;$$

überdies ist nach (4)

$$x^{(n+1)} R a_{n+1}.$$

Andererseits ist aber auch jedes $y^{(n+1)}$ ein $x^{(n+1)}$; wegen der ersten Hälfte von (5) ist nämlich jedes $y^{(n+1)}$ zugleich ein $x^{(n)}$; es ist also

$$y^{(n+1)} R a_1, \ldots, y^{(n+1)} R a_n;$$

überdies ist nach (5)

$$y^{(n+1)} R a_{n+1}.$$

Ist nun Y_{n+1} von der Nullmenge verschieden, so gibt es nach VI unter den $y^{(n+1)}$ genau ein Element — dasselbe möge mit d_{n+1} bezeichnet werden — derart, daß

$$y^{(n+1)} R d_{n+1}$$

für alle $y^{(n+1)}$ ist. Wie man nun sofort sieht, ist

$$d_{n+1} = c_{n+1},$$

womit der Satz in vollem Umfang bewiesen ist.

Erklärung 15. Ein $\mathfrak{E}_h(R)$ heiße *verstärkt*, wenn — über VI hinausgehend — das folgende *Axiom* in Kraft ist:

VII. Sind

$$a_1, a_2, \ldots$$

endlich oder unendlich viele Elemente aus M derart, daß es in M mindestens ein Element x gibt, so daß

$$x R a_1, \quad x R a_2, \ldots \tag{6}$$

ist, so gibt es unter den (6) genügenden Elementen x ein Element c derart, daß

$$x\,R\,c$$

für alle diese x ist.

Ebenso wie bei den Halbgefügen gilt: Jedes endliche, aber nicht jedes unendliche $\mathfrak{E}_h(R)$ ist verstärkt [12]). Ein Analogon zu Satz 3 ist nicht vorhanden. Wie bei den Halbgefügen ist ein $\mathfrak{E}_h(R)$ im allgemeinen kein $\mathfrak{E}_h(\breve{R})$; immerhin ist die Verwandtschaft stärker als bei den Halbgefügen, wie aus den beiden nachstehenden Sätzen hervorgeht.

Satz 5. *Ist M ein $\mathfrak{E}_h(R)$, wobei R eine* n*-endliche Beziehung in M ist, so ist M auch ein $\mathfrak{E}_h(\breve{R})$.*

Beweis. Zu zeigen ist folgendes: Sind a, b Elemente aus M derart, daß es in M mindestens ein Element x gibt, so daß

$$x\,\breve{R}\,a, \qquad x\,\breve{R}\,b \tag{7}$$

ist, so gibt es unter den (7) genügenden Elementen x ein Element d derart, daß

$$x\,\breve{R}\,d$$

für alle diese x ist.

Es seien

$$x_1, \ldots, x_n \tag{8}$$

die nach Voraussetzung in endlicher Anzahl vorhandenen Elemente aus M, die (7) genügen; dabei ist es durchaus möglich, daß überhaupt kein Element (8) vorhanden ist. Nach Satz 4 gilt dann: Gibt es in M mindestens ein Element $y^{(n)}$ so, daß

$$y^{(n)}\,R\,x_1, \ldots, y^{(n)}\,R\,x_n \tag{9}$$

ist, so gibt es unter den (9) genügenden Elementen $y^{(n)}$ genau ein Element d_n derart, daß

$$y^{(n)}\,R\,d_n$$

für alle diese $y^{(n)}$ ist. Nun ist, da sich a und b unter den $y^{(n)}$ befinden,

$$d_n\,\breve{R}\,a, \qquad d_n\,\breve{R}\,b;$$

d_n ist also eines der Elemente (8). Wegen (9) ist ferner

$$x_1\,\breve{R}\,d_n, \ldots, x_n\,\breve{R}\,d_n.$$

Das Element $d = d_n$ hat also die im Satz geforderten Eigenschaften.

Ganz ähnlich verläuft der Beweis für den folgenden Satz; wir überlassen die Ausführung dem Leser.

---

[12] Vgl. [H. 1], S. 37, Beispiel 2.

Satz 6. *Ein verstärktes* $\mathfrak{E}_h(R)$ *ist zugleich ein verstärktes* $\mathfrak{E}_h(\breve{R})$.

Erklärung 16. Ein $\mathfrak{E}_h(R)$, das zugleich ein $\mathfrak{E}_h(\breve{R})$ ist, heiße ein *Verein* in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{E}(R)$.

Sowohl aus Satz 5 wie aus Satz 6 folgt: Ein Halbverein, der überdies endlich ist, ist zugleich ein Verein.

§ 5.

Halbverband und Verband. Schlußbetrachtung.

Was den Übergang zum Halbverband und Verband anbetrifft, so können wir uns ganz kurz fassen, da es sich dabei um bekannte Dinge handelt.

Erklärung 17. Ein $\mathfrak{F}_h(R)$, das zugleich ein $\mathfrak{E}_h(R)$ ist, heiße ein *Halbverband* in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{B}_h(R)$.

Erklärung 18. Ein $\mathfrak{F}(R)$, das zugleich ein $\mathfrak{E}(R)$ ist, heiße ein *Verband* in bezug auf R, kurz ein $\mathfrak{B}(R)$.

Daß die Bezeichnungen Halbverband und Verband zulässig sind, d. h. daß darunter die bekannten Bereiche zu verstehen sind, ist in [H. 1] nachgewiesen. Damit ist der Anschluß an die Theorie der Verbände vollzogen.

Zum Schluß noch einige Betrachtungen, die wir zurückgestellt haben, um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen. Der besseren Übersichtlichkeit wegen bringen wir in Tabelle 1 eine Zusammenstellung der in dieser Arbeit studierten Operationsbereiche.

Tabelle 1.

Bezeichnung	Bedeutung	Erklärung
$\mathfrak{Q}$	Quasi geordnete Menge	8
$\mathfrak{T}$	Teilweise geordnete Menge	9
$\mathfrak{W}$	Gewebe	10
$\mathfrak{F}_h$	Halbgefüge	11
$\mathfrak{F}$	Gefüge	13
$\mathfrak{E}_h$	Halbverein	14
$\mathfrak{E}$	Verein	16
$\mathfrak{B}_h$	Halbverband	17
$\mathfrak{B}$	Verband	18

Abgesehen von den Halbbereichen unterliegen die Operationsbereiche einem bemerkenswerten *Dualitätsprinzip*, das folgendermaßen lautet:

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{A}$ *einer der Bereiche*

$$\mathfrak{Q},\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{W},\ \mathfrak{F},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{B},$$

so gilt: Ein $\mathfrak{A}(R)$ *ist zugleich ein* $\mathfrak{A}(\breve{R})$.

Zusatz. Werden nur endliche Bereiche zugelassen, so ist das Prinzip auch für Halbvereine in Kraft.

Beweis. Die zuständigen Axiomensysteme bleiben in Geltung, wenn R durch $\breve{R}$ ersetzt wird; für den Zusatz geht das aus der Bemerkung am Schluß von § 4 hervor.

Wiein [H. 2], § 5 ausführlich dargelegt ist, können die Gewebe, wenn sie von nicht zu hoher Ordnung sind, in einfacher Weise geometrisch veranschaulicht werden; genau so lassen sich übrigens auch die teilweise geordneten Mengen, aber nicht mehr die quasi geordneten Mengen darstellen. Es gibt — auch darauf sind wir in [H. 2] eingegangen — je einen Typ von Geweben der ersten und zweiten Ordnung, drei Typen von Geweben dritter Ordnung und zehn [13]) Typen von Geweben vierter Ordnung. Die Fig. 1 bis 10 geben die zehn Typen wieder, auf die sich die Gewebe vierter Ordnung verteilen [14]).

Fig. 1.

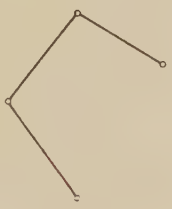


Fig. 2.

Fig. 3.

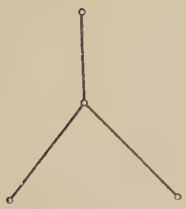


Fig. 4.

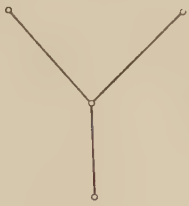


Fig. 5.

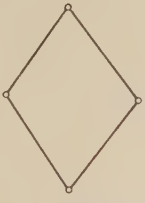


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

[13]) Nicht elf Typen, wie in [H. 2], S. 119 angegeben; die dortigen Fig. 14 und 15 veranschaulichen denselben Typ.

[14]) Die jetzigen Fig. 4 und 5 entsprechen den Fig. 9 und 8 in [H. 2]; im übrigen entspricht die jetzige Fig. n der Fig. $n + 4$ in [H. 2].

Der Typencharakter ist in Tabelle 2 beschrieben. Es ist eine Aufgabe für sich, für beliebiges n die Typen aufzuzählen und zu charakterisieren.

Tabelle 2.

Figur	$\mathfrak{F}_h(R)$	$\mathfrak{F}_h(\breve{R})$	$\mathfrak{F}(R)$	$\mathfrak{E}_h(R)$	$\mathfrak{E}_h(\breve{R})$	$\mathfrak{E}(R)$	$\mathfrak{B}_h(R)$	$\mathfrak{B}_h(\breve{R})$	$\mathfrak{B}(R)$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	−	−	+	+	+	+	−	−
3	−	+	−	+	+	+	−	+	−
4	+	−	−	+	+	+	+	−	−
5	−	+	−	+	+	+	−	+	−
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	−	−	+	+	+	+	−	−
8	−	+	−	+	+	+	−	+	−
9	−	−	−	+	+	+	−	−	−
10	−	−	−	−	−	−	−	−	−

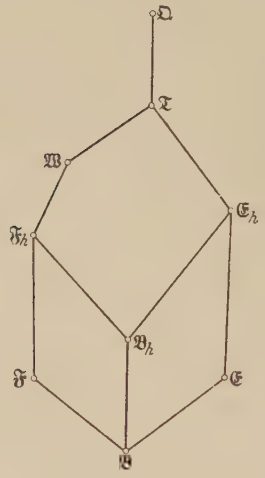


Fig. 11.

Es seien a und b *Begriffe*; es werde, wenn a ein *Oberbegriff* von b ist, $a\,R\,b$ gesetzt. Die dadurch bestimmte Beziehung R genügt den Axiomen I, II und III, so daß unter diesem Gesichtspunkt eine Menge von Begriffen ein $\mathfrak{T}(R)$ ist. Insbesondere bilden unsere Operationsbereiche bei dieser Auffassung einen Verband, und zwar einen solchen neunter Ordnung, dessen Struktur Fig. 11 zum Ausdruck bringt.

Damit sind die Grundzüge einer Theorie abgesteckt, die gleichberechtigt neben der Gruppentheorie steht. Ein weites Feld bleibt auszufüllen, ein Feld, das, wie in der Einleitung betont, von jeder mathematischen Disziplin aus betreten werden kann. Von der Mitarbeit der Disziplinen hängt es wesentlich ab, wie schnell und in welcher Richtung sich die Entwicklung der Theorie vollziehen wird.

(Eingegangen am 18. April 1939.)

Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate.

Von

R. Sprague in Berlin-Charlottenburg.

Mit der Frage, ob ein Rechteck von vorgegebenem Seitenverhältnis, insbesondere ein Quadrat, in endlich viele paarweise verschiedene Quadrate zerlegt werden kann, hat sich kürzlich Herr Stöhr [1]) beschäftigt. Satz 10 seiner Dissertation besagt:

Wenn für irgendein Rechteck mit den Seiten a und b, $a < b$, zwei solche Zerlegungen bekannt sind, die außerdem weder in einem Teilquadrat übereinstimmen, noch das Quadrat über a enthalten, dann läßt sich das Quadrat über $a+b$ in der gewünschten Weise zerlegen (nämlich in die Quadrate über a und b und die Teilquadrate der beiden Rechteckszerlegungen). —

Im folgenden werden zwei Zerlegungen eines Rechtecks vom Seitenverhältnis 13 : 16 angegeben, die den Forderungen dieses Satzes entsprechen.

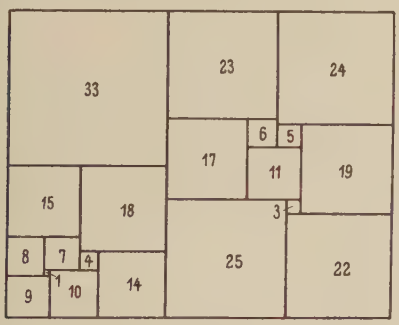


Fig. 1.

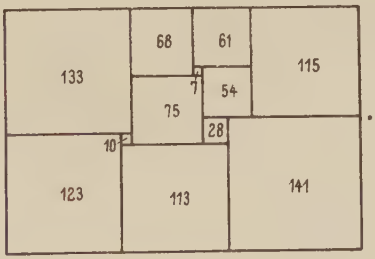


Fig. 2.

Die erste ist aus Fig. 1 ersichtlich; sie beruht auf bekannten [2]) Zerlegungen der Rechtecke 32 : 33 und 47 : 65 in lauter verschiedene Quadrate, die zufällig auch insgesamt paarweise verschieden sind. Die Zahlen bedeuten die Seitenlängen der Teilquadrate.

[1]) A. Stöhr, Über Zerlegungen von Rechtecken in inkongruente Quadrate. (Dissertation.) Schriften des Math. Inst. und des Inst. f. angew. Math. der Universität Berlin, Band 4 (1939), S. 119—140. Vgl. die Literaturangaben auf S. 119 und 120.

[2]) Jaremkewycz, Mahrenholz, Sprague, Lösungen der Aufgabe 1242. Zeitsch. f. d. math. u. naturwiss. Unterricht 68 (1937), S. 43.

Das Rechteck von Fig. 1 werde mit R_1 bezeichnet; seine Seiten betragen $5 \cdot 13$ und $5 \cdot 16$, das Quadrat über der kleineren ist nicht Teilquadrat.

Um die zweite Zerlegung zu gewinnen, werde zunächst R_1 um das Quadrat über der längeren Seite vergrößert. Dadurch entsteht ein Rechteck R_2 mit den Seiten $5 \cdot 16$ und $5 \cdot 29$. Ferner wird ein Rechteck R_3 mit den Seiten $16 \cdot 16$ und $13 \cdot 29$ benutzt, dessen Zerlegung Fig. 2 zeigt.

Die Längen der Quadratseiten sind

in R_2: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 33, 80;

in R_3: 7, 10, 28, 54, 61, 68, 75, 113, 115, 123, 133, 141.

Lineare Vergrößerung von R_2 im Verhältnis $1 : 13$ und von R_3 im Verhältnis $1 : 5$ führt zu den Rechtecken R_2' mit den Seiten $5 \cdot 13 \cdot 16$ und $5 \cdot 13 \cdot 29$, R_3' mit den Seiten $5 \cdot 16 \cdot 16$ und $5 \cdot 13 \cdot 29$.

Durch Zusammenfügen von R_2' und R_3' an den gleichlangen Seiten wird ein Rechteck R_4 mit den Seiten $5 \cdot 13 \cdot 29$ und $5 \cdot 16 \cdot 29$ gebildet, in dem das Quadrat über der kleineren Seite nicht als Teilquadrat auftritt. Dies Rechteck R_4 enthält lauter verschiedene Quadrate. Denn mit R_2 und R_3 haben zugleich R_2' und R_3' einzeln diese Eigenschaft, und keine Quadratseite in R_3, also auch keine in R_3' ist Vielfaches von 13, im Gegensatz zu den Quadratseiten von R_2'.

Keine Quadratseite in R_2 und R_3 ist Vielfaches von 29; daher gilt dasselbe für R_4. Die Vergrößerung von R_1 im Verhältnis $1 : 29$ und R_4 stellen also zwei Zerlegungen des Rechtecks mit den Seiten $a = 5 \cdot 13 \cdot 29$ und $b = 5 \cdot 16 \cdot 29$ dar, welche die Bedingungen erfüllen.

R_1 besteht aus 20, R_4 aus 33 Teilquadraten; zwei, die Quadrate über a und b, kommen noch hinzu. Demnach ist jedes Quadrat in 55 paarweise verschiedene Quadrate zerlegbar.

Eingegangen am 25. Mai 1939.

Ein Minimalmodell einer endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie und die Unabhängigkeit der beiden schwachen Stetigkeitsaxiome von den Inzidenzaxiomen*).

Von

Max Steck in München.

Inhaltsübersicht.

Einleitung 609

Kapitel I. $S(57/2/8)$ als Minimalmodell einer endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie 610

§ 1. Die Inzidenzaxiome 610

§ 2. Das Veblensystem $S(57/2/8)$ 613

§ 3. Die Gültigkeit der Axiome I. 1—I. 3, I. 9*, I. 10* in $S(57/2/8)$ 614

§ 4. Die Gültigkeit des Fano-Axioms F_1 in $S(57/2/8)$ 615

§ 5. Die Existenz einer allgemeinen Pascalschen Inzidenzanordnung I_0 in $S(57/2/8)$ 616

§ 6. Die Gültigkeit des Vertauschungsaxioms V_2 in $S(57/2/8)$ . . . 617

Kapitel II. Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms und des S. K.-Axioms von den Inzidenzaxiomen 621

§ 7. Die weiteren Axiome 621

§ 8. Die Nichterfüllbarkeit des Fano-Axioms F_2 in $S(n^2 - n + 1/2/n)$ 624

§ 9. Pascalörter in $S(n^2 - n + 1/2/n)$ 624

§ 10. Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms von den Inzidenzaxiomen 628

§ 11. Die Unabhängigkeit des S. K.-Axioms von den Inzidenzaxiomen 632

Einleitung.

1. Unter einer „*vollständigen endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie*“ verstehen wir ein endliches Veblensystem [1]), in dem *alle Axiome* eines Axiomensystems der reellen ebenen projektiven Geometrie, die reine Inzidenzbeziehungen aussagen, als *erfüllt* nachweisbar sind. Kommt man bei diesem Nachweis außerdem mit einer Mindestanzahl von Elementen, d. h. mit einem niedrigstelementigen Veblensystem, aus, so sprechen wir von einer *minimalen*

*) *Habilitationsschrift.* Angenommen von der Fakultät für allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München.

[1]) Unter einem *Veblensystem* versteht man eine Geometrie von endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen „Punkten“ und „Geraden“, zwischen denen eine Inzidenzbeziehung erklärt ist, und in der es zu je zwei verschiedenen Punkten *genau eine* mit beiden inzidente Gerade und zu je zwei verschiedenen Geraden *genau einen* mit beiden inzidenten Punkt gibt. Es ergibt sich, daß dann auf jeder Geraden gleich viele Punkte

Inzidenzgeometrie oder von einer *Minimaldeutung*, oder auch von einem *Minimalmodell* einer vollständigen endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie.

Wir zeigen im Kapitel I dieser Arbeit, daß das Veblensystem S (57/2/8) ein solches Minimalmodell ist.

Im Kapitel II beweisen wir die Unabhängigkeit der beiden schwachen Stetigkeitsaxiome von den Inzidenzaxiomen, von denen das eine für den lückenlosen axiomatischen Aufbau der Polarentheorie, das andere für eine axiomatische Begründung der Theorie der Kegelschnittbüschel vonnöten ist.

Kapitel I.

S (57/2/8) als Minimalmodell einer endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie.

§ 1.

Die Inzidenzaxiome.

2. In der „Synthetischen Geometrie" von H. Liebmann [2]) ist auf Grund von Untersuchungen und Vorarbeiten, die in meiner Dissertation [3]) durchgeführt worden sind, ein Axiomensystem der reellen ebenen projektiven Geo-

„liegen" und durch jeden Punkt ebensoviele Geraden „gehen". Die Gesamtzahl der Punkte erweist sich als ebenso groß wie die Gesamtzahl der Geraden, und zwar ist sie, falls die Anzahl der Punkte einer Geraden endlich und gleich n ist, $n^2 - n + 1$. Das Veblensystem wird in diesem Falle nach Veblen und Bussey (Trans. Am. Math. Soc. **7** (1906), S. 241—259) mit $S(n^2 - n + 1/2/n)$ bezeichnet, wobei der Mittelterm dieses Symbols die obengenannte Inzidenzbeziehung der Elemente bedeuten soll. Die für $n = 3$ und $n = 5$ eintretenden Veblensysteme waren bereits Fano bekannt (Sui postulati fondamentale delle geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni, Giorn. di mat. **30** (1892), S. 106—132). Das System S (13/2/4) haben Veblen und Bussey in der obengenannten Arbeit durch eine Inzidenztafel angegeben. Das Veblensystem S (31/2/6) ist erstmalig von Heuser angegeben worden (Über die Möglichkeit finiter Geometrien und die Geltung der projektiven Lagebeziehungen in ihnen, Diss. Heidelberg 1934, 42 S.), der auch eine kombinatorische Methode zur Konstruktion der Inzidenztafeln von Veblensystemen entwickelt hat. Heuser hat ferner die Nichtexistenz des Falles $n = 7$ nachgewiesen [s. Anm. [17])]. Die Einordnung der Veblensysteme in einen allgemeinen geometrischen Zusammenhang, eine Entwicklung ihrer Theorie und die Aufstellung ihrer Inzidenztafeln nach einem geometrischen Gesichtspunkt ist in der Arbeit „Über finite Geometrien und ihren Zusammenhang mit der Axiomatik der projektiven Geometrie", Deutsche Math. **1** (1936), S. 578—588, insbesondere in deren § 5 ausführlich behandelt. Neuerdings hat G. Fano für die systematische Aufstellung der Inzidenztafeln derjenigen Veblensysteme, bei denen n von der Form $2^k + 1$ (k ganz) ist, im Anschluß an seine obengenannte Arbeit in zwei Noten [Osservazioni su alcune „geometrie finite", Rend. d. R. Accad. Naz. dei Linc. **26** (1937), S. 55—60 und 129—134] eine allgemeine, sehr durchsichtige geometrische Methode angegeben und dieselbe bei der Aufstellung von S (21/2/5) und S (73/2/9) erprobt.

[2]) Leipzig-Berlin 1934.

[3]) Das Zeuthensche Postulat und das Prinzip der Vertauschung zur Begründung der projektiven Geometrie, Heidelberg 1932.

metrie angegeben worden, das keine Anordnungsaxiome (im Hilbertschen Sinne) enthält, also ohne die axiomatische Festlegung von „Zwischen"-Beziehungen von Elementen auskommt. Die Hilbertschen Anordnungsaxiome II. 1—II. 4 [4]) werden vielmehr mit den Axiomen dieses Systems, insbesondere mit Hilfe des fundamentalen *E. P.-Axioms* (s. Nr. **12**), zu beweisbaren Sätzen [5]). *Dieses Axiomensystem der reellen ebenen projektiven Geometrie* legen wir mit den folgenden Änderungen den Untersuchungen dieser Arbeit zugrunde.

Das genannte Axiomensystem konnte später durch Untersuchungen über die Abhängigkeit der Vertauschungsaxiome um ein, dem Desarguesschen Satz (von den perspektiven Dreiecken) äquivalentes *Axiom* (Vertauschungsaxiom V_1)[6]) reduziert werden, da sich seine Aussage mit dem nicht entbehrlichen[7]) Vertauschungsaxiom V_2 (s. Nr. **3**) beweisen ließ [s. Anm. [6])]. V_2 ist dabei dem Pappus-Pascalschen Satze äquivalent [s. Anm. [6])].

Ferner sind für bestimmte tragende, in das Axiomensystem eingehende Begriffe (*Pascalanordnung*, *Kegelschnitt*) präzisierte Fassungen gegeben [8]) und außerdem das Vertauschungsaxiom V_2 auf Grund früherer Arbeiten [9]) exakter formuliert worden, als es in dem Liebmannschen Buch [s. Anm. [2])] geschehen konnte. Diese Änderungen liegen den folgenden Fassungen der Axiome des genannten Axiomensystems zugrunde.

3. Die ebenen, reine Inzidenzbeziehungen zwischen endlich vielen Elementen aussagenden sogenannten „*Inzidenzaxiome*" des genannten Axiomensystems waren die folgenden:

Axiom I. 1. *Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.*

Axiom I. 2. *Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte zusammengehört.*

---

[4]) Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930.

[5]) H. Liebmann, Beweise der Anordnungsaxiome im Rahmen der synthetischen Geometrie, Math. Annalen **111** (1935), S. 64—67.

[6]) Die Abhängigkeit der Vertauschungsaxiome und das Hessenbergsche Ergebnis. Geometrische Axiomatik als Gruppentheorie, Deutsche Math. **1** (1936), S. 165—174.

[7]) Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie (I): Die Unabhängigkeit des Vertauschungsaxioms V_2 von den Verknüpfungsaxiomen, Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.), Jahrg. 1937, S. 1—17.

[8]) Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie II: Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms und des S. K.-Axioms von den Verknüpfungsaxiomen, Monatsh. f. Math. u. Phys. **46** (1937), S. 93—121.

[9]) Zur Struktur der Vertauschungsaxiome V_1 und V_2 (Vertauschungs-Calcül), Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. (math.-nat. Kl.), Jahrg. 1934, S. 68—76 und: Der $\mathfrak{V}_1$-Vertauschungs-Calcül, ebenda, Jahrg. 1935, S. 1—13.

Axiom I. 3. *Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen* [10]).

Das sind genau die *ebenen* Hilbertschen [11]) Verknüpfungsaxiome. Für die Zwecke der projektiven Geometrie wurden denselben hinzugefügt:

Axiom I. 9*. *Zwei Geraden einer Ebene haben stets einen Punkt gemein.*

Axiom I. 10*. *Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte.*

Daran schließt sich das Fano-Axiom $\boldsymbol{F}_1$ [12]):

Fano-Axiom $\boldsymbol{F}_1$. *Seien A, B, C, D vier Punkte einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Dann liegen die drei Punkte*

$$(AB)\times(CD) = E, \quad (AC)\times(BD) = F, \quad (AD)\times(BC) = G$$

(Nebenecken des vollständigen Vierecks)

nicht kollinear.

Es folgt die Definition der allgemeinen *Pascalschen Inzidenzanordnung* in der präzisierten Form:

Definition **P. I.** *Sind $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ verschiedene Punkte der Ebene, von denen keine drei kollinear liegen, so heißen sie in dieser Reihenfolge in allgemeiner Pascalscher Inzidenzanordnung $\boldsymbol{I}_0$, wenn die drei Paare* (verschiedener) *Gegenseiten (i_1, i_2), (i_4, i_5); (i_2, i_3), (i_5, i_6); (i_3, i_4), (i_6, i_1) des* (geschlossenen) *Sechsecks $\sigma_0 = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$ sich bezüglich in drei verschiedenen Punkten $j_1^{(0)}, j_2^{(0)}, j_3^{(0)}$ treffen, die kollinear auf $p_0 = (j_1^{(0)}, j_2^{(0)}, j_3^{(0)})$ liegen, wobei $p_0 \neq (i_1, i_2)$, (i_4, i_5), (i_2, i_3), (i_5, i_6), (i_3, i_4) (i_6, i_1) ist.*

Dann lautet das nicht entbehrliche, präzisierte

Vertauschungsaxiom $\boldsymbol{V}_2$: *Bilden die Punkte $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ in dieser Reihenfolge eine allgemeine Pascalsche Inzidenzanordnung I_0 mit der Pascalgeraden p_0, so bilden sie auch dann noch je eine — von I_0 mit p_0 ver-*

---

[10]) Über die Vereinfachung des Hilbertschen Axiomensystems vergleiche man die axiomatisch grundlegende Arbeit von R. Baldus, Zur Axiomatik der Geometrie V: Vereinfachung des Hilbertschen Axiomensystems der Euklidischen Geometrie, Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.), Jahrg. 1937, S. 189—228.

[11]) Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930.

[12]) Siehe auch R. Baldus, Ein Axiomensystem der komplexen projektiven Geometrie, Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.), Jahrg. 1933, S. 149—191, insbesondere § 4, und R. Baldus, Zur Axiomatik der Geometrie IV: Über die Tragweite des Axioms von Pasch, Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.), Jahrg. 1934, S. 145—161, insbesondere Satz 9 unter d), sowie M. Steck, Über finite Geometrien und ihren Zusammenhang mit der Axiomatik der projektiven Geometrie, Deutsche Math. 1 (1936), S. 578—588, insbesondere § 3; M. Steck, Eine vollständige endliche Geometrie des vollständigen Vierecks, Deutsche Math. 1 (1936), S. 588—592; M. Steck, Eine endliche minimale Pappus-Pascalsche Geometrie, Deutsche Math. 2 (1937), S. 242—251, insbesondere § 6.

schiedene – allgemeine Pascalsche Inzidenzanordnung I_ν mit der Pascalgeraden p_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, 9$), wenn man ungleichartige, d. h. einen mit ungeradem Index bezifferten Punkt mit einem gerade bezifferten (oder umgekehrt) *vertauscht* [13]).

Dies die reinen Inzidenzaxiome des genannten Axiomensystems der reellen ebenen projektiven Geometrie. Von ihnen zeigen wir in den folgenden Paragraphen 3 bis 6 dieser Arbeit, daß sie in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ sämtlich erfüllt sind. (Über die weiteren Axiome des genannten Axiomensystems vergleiche man den § 7.)

§ 2.

Das Veblensystem $\boldsymbol{S}(57/2/8)$.

4. Das in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 8$ eintretende Veblensystem $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ aus 57 „Punkten" und 57 „Geraden", wobei durch jeden „Punkt" *genau* 8 „Geraden" gehen, und jede „Gerade" mit *genau* 8 „Punkten" belegt ist, ist in der folgenden *involutorisch-reziproken* Inzidenztafel der Fig. 1 *dargestellt*. Ihre Zeilen entsprechen den bezifferten „Punkten" 1, 2, 3, . . ., 57, ihre Spalten den bezifferten „Geraden" (1), (2), (3), . . . (57). × ist das Inzidenzzeichen.

Diese Tafel definiert und repräsentiert eine *endliche projektive Geometrie*, deren sämtliche Elemente („Punkte", „Geraden") den beiden folgenden Axiomen **A. 1*** und **A. 2*** genügen [s. Anm. [1])], wobei die hierdurch (implizit) definierten Elemente, damit **A. 1*** und **A. 2*** existentiell nicht *leer* laufen, noch durch das folgende Existentialaxiom $\boldsymbol{E}$ axiomatisch existentiell gesichert sind [s. Anm. [1])]. Diese Axiome lauten:

E. *Es gibt mindestens je* 57 *(als verschieden unterscheidbare* [Bezifferung!]*), zwei verschiedenen Dingsystemen angehörende Elemente, „Punkte" und „Geraden".*

A. 1*. *Durch zwei (als verschieden unterschiedene) „Punkte" ist stets genau eine „Gerade" bestimmt.*

A. 2*. *Durch zwei (als verschieden unterschiedene) „Geraden" ist stets genau ein „Punkt" bestimmt.*

Die Tafel der Fig. 1 ist in bezug auf die gestrichelt eingezeichnete Nebendiagonale *symmetrisch* (*involutorische Reziprozität*).

---

[13]) Da das Vertauschungsaxiom V_2 dem Pappus-Pascalschen Satze äquivalent [s. Anm. [6])] und in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ erfüllt ist (s. § 6), so werden auch in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ sämtliche mit den genannten Inzidenzaxiomen in der gewöhnlichen reellen projektiven Geometrie ableitbaren Aussagen (soweit ihre Elementzahl nicht über 57 hinausgeht), das sind bekanntlich die „*reinen Schnittpunktssätze*" (in der Hilbertschen Terminologie), gelten.

Läßt man den Zeilen dieser Tafel die Punkte entsprechen (s. oben) und nennt man dann noch die Punkte einer jeden der 57 Spalten der Tafel — in formallogisch einwandfreier und widerspruchsloser Weise — „*kollinear*“

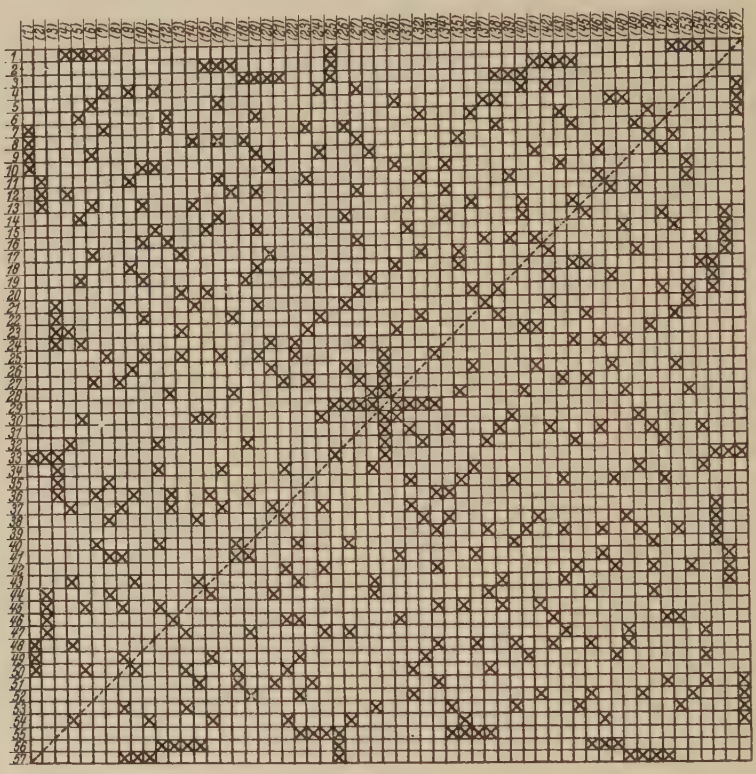


Fig. 1.

(= eine Gerade bildend), so beweisen wir in den folgenden Paragraphen dieser Arbeit, *daß dieses Veblensystem ein Minimalmodell einer endlichen ebenen projektiven Inzidenzgeometrie ist.*

§ 3.

Die Gültigkeit der Axiome I. 1 — I. 3, I. 9*, I. 10* in S (57/2/8).

5. Wir behaupten den folgenden

Satz 1. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* S (57/2/8) *sind die Inzidenzaxiome* I. 1, I. 2, I. 3, I. 9*, I. 10* *stets und für alle Elemente erfüllt.*

Beweis. Der Beweis besteht darin, daß man die Tafel S (57/2/8) der Fig. 1 auf das Erfülltsein der genannten Axiome hin prüft; das kann dem

Leser nicht erspart werden. Dabei beachte man, daß **A. 1*** nur eine andere sprachliche Formulierung von I. 1 und I. 2 (wenn man E berücksichtigt) ist, die mithin in $S(57/2/8)$ für *alle* Elemente stets erfüllt sind. I. 3 ist in seinem ersten existentiellen Teil (wegen E) in $S(57/2/8)$ definitionsgemäß immer erfüllt, in seinem zweiten Teil, wie man unmittelbar aus der Tafel erkennt, ebenfalls immer und für *alle* (selbstverständlich nicht von vornherein kollinearen) Elemente erfüllt. I. 9* ist nur eine andere sprachliche Formulierung von **A. 2***, daher ebenfalls in $S(57/2/8)$ immer und für *alle* Elemente erfüllt. I. 10* endlich ist in $S(57/2/8)$ definitionsgemäß immer erfüllt.

§ 4.

Die Gültigkeit des Fano-Axioms F_1 in $S(57/2/8)$.

6. Wegen der Überführbarkeit von je vier, ein vollständiges Viereck bildenden Punkten von $S(57/2/8)$ in vier vorgeschriebene, ebenfalls ein vollständiges Viereck bildende Punkte mittels reeller Inzidenzabbildungen [14]) gilt der folgende Satz allgemein, wenn sein Beweis auch nur für beliebig herausgegriffene Elemente aus $S(57/2/8)$ geführt wird.

Satz 2. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems $S(57/2/8)$ besitzt jedes vollständige Viereck nichtkollineare Nebenecken, d. h. das Fano-Axiom F_1 ist in $S(57/2/8)$ immer erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten in $S(57/2/8)$ das Viereck der Punkte

$$\{7, 4, 5, 8\},$$

von dem, wie man sich mit Hilfe der Spalten (7), (57), (16), (1) der Tafel $S(57/2/8)$ überzeugt, keine drei Eckpunkte kollinear liegen. Dieses Viereck

---

[14]) Siehe die Arbeiten: Grundlegung einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen in endlichen projektiven Geometrien *I* (Eine geometrische Deutung der zyklischen Gruppen), Journ. f. d. r. und angew. Math. **179** (1938), S. 37—64, und: Zur Theorie der reellen Inzidenzabbildungen *II* [Die Gruppe der Inzidenzabbildungen von $S(n^2 - n + 1/2/n)$. G_{168} von $S(7/2/3)$ und ihre zyklischen Untergruppen. Die Inzidenzabbildungen der Viereckgeometrie $S(13/2/4)$], ebenda **179** (1938), S. 148—192. In ihnen wird rein synthetisch und ohne Zuhilfenahme von Hilfsmitteln aus der Analysis bei vollständiger Klärung der Realitätsverhältnisse der Elemente und ihrer Invarianzeigenschaften gegenüber „reellen Inzidenzabbildungen" gezeigt, daß es in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $S(n^2 - n + 1/2/n)$ den Kollineationen der gewöhnlichen projektiven Geometrie entsprechende Abbildungen gibt, von denen jede durch Angabe von „Ausgangsviereck" und „Bildviereck" definiert, vollständig bezifferte endliche Möbiussche Netze bestimmt, die die Abbildung der Elemente mit Erhaltung der Inzidenzen leisten. Für diese Abbildungen wurde dort ebenfalls eine vollständige Einteilung in Typen gegeben, außerdem ihre Gruppe und deren zyklische Untergruppen bestimmt.

kann innerhalb $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ zu einem vollständigen erweitert werden. In der Tat! Bringen wir seine Gegenseiten zum Schnitt

$$(7, 8) \times (4, 5) = 33 \qquad \{(1) \text{ und } (57)\},$$
$$(7, 4) \times (8, 5) = 25 \qquad \{(7) \quad ,, \quad (16)\};$$

bringen wir seine restlichen Seiten zum Schnitt

$$(7, 5) \times (4, 8) = 20 \qquad \{(38) \text{ und } (27)\},$$

so erhalten wir als *Nebenecken* die Punkte 20, 25, 33, die sicher keiner Spalte von $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ angehören — man erkennt dies etwa aus den Spalten (13), (55), (29) — also nichtkollinear oder „krumm" liegen.

§ 5.

Die Existenz einer allgemeinen Pascalschen Inzidenzanordnung $\bar{I}_0$ in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$.

7. Wir behaupten den folgenden Existenzsatz (s. Definition **P. I.**):

Satz **3.** *Das Sechseck* $\bar{\sigma}_0$ *der Punkte*

$$\bar{\sigma}_0 = \{14, 27, 23, 38, 47, 33\}$$

ist innerhalb der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ *im Sinne der Definition* ***P. I.*** *ein allgemeines, d. h. keine drei seiner Eckpunkte liegen kollinear; es besitzt ferner die Eigenschaft, daß seine Eckpunkte in der angegebenen Reihenfolge eine allgemeine Pascalsche Inzidenzanordnung* $\bar{I}_0$ *mit der Pascalschen Geraden* (39) *bilden.*

Beweis. a) Um den ersten Teil von Satz **3** über die Allgemeinheit von $\bar{\sigma}_0$ zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß keines der überhaupt möglichen Tripel von Eckpunkten von $\bar{\sigma}_0$ einer Spalte der Tafel $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ angehört. Dafür genügt es, die $\binom{6}{2} = 15$ Geraden durch je zwei der Punkte von $\bar{\sigma}_0$ daraufhin zu prüfen, ob kein weiterer der Punkte von $\bar{\sigma}_0$ darauf liegt. Diese 15 Geraden sind die folgenden:

1. $(14, 27) = (45)$,	*6.* $(27, 23) = (23)$,	*11.* $(23, 47) = (13)$,
2. $(14, 23) = (40)$,	*7.* $(27, 38) = (21)$,	*12.* $(23, 33) = (3)$,
3. $(14, 38) = (34)$,	*8.* $(27, 47) = (43)$,	*13.* $(38, 47) = (48)$,
4. $(14, 47) = (26)$,	*9.* $(27, 33) = (29)$,	*14.* $(38, 33) = (55)$,
5. $(14, 33) = (56)$,	*10.* $(23, 38) = (41)$,	*15.* $(47, 33) = (2)$.

Man erkennt unmittelbar aus den angegebenen Spalten der Tafel $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ als Ergebnis dieser Prüfung, daß keine drei Eckpunkte von $\bar{\sigma}_0$ kollinear liegen, womit der erste Teil des Satzes gezeigt ist.

b) Jetzt ist nachzuweisen, daß die Punkte von $\bar{\sigma}_0$ im Sinne der Definition **P. I.** (Nr. **3**) in der oben angeschriebenen Reihenfolge innerhalb $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ eine allgemeine Pascalsche Inzidenzanordnung $\bar{I}_0$ mit der Pascalgeraden (39) bilden. In der Tat! Bringen wir die Gegenseitenpaare von σ_0 zum Schnitt, so erhalten wir:

$$\bar{I}_0 \begin{cases} (14, 27) \times (38, 47) = 48 & \{(45) \text{ und } (48)\}, \\ (27, 23) \times (47, 33) = 11 & \{(23) \;\; ,, \;\; (2)\}, \\ (23, 38) \times (33, 14) = 16 & \{(41) \;\; ,, \;\; (56)\} \end{cases}$$

und (11, 16, 48) = (39) liegen nach Spalte (39) der Tafel kollinear, womit alles gezeigt ist.

§ 6.

Die Gültigkeit des Vertauschungsaxioms V_2 in S (57/2/8).

8. Damit der folgende Satz **4** in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ allgemein, d. h. für irgend sechs eine P. I. bildende Punkte gelte, ist nach den Entwicklungen meiner beiden unter Anm. [14]) genannten Arbeiten notwendig, daß das Vertauschungsaxiom $\boldsymbol{V}_2$ für jeden, dem Büschel mit den vier verschiedenen Grundpunkten 14, 27, 23, 38 angehörenden Pascalort erfüllt ist, denn es gibt stets eine reelle Inzidenzabbildung $\boldsymbol{T}$, die 14, 27, 23, 38 in vier vorgeschriebene Punkte, von denen keine drei kollinear liegen, überführt. Die Gesamtheit dieser Pascalörter ist zu bestimmen. Diese Bestimmung holen wir am Ende dieser Nummer nach. Zunächst führen wir den Nachweis des Erfülltseins des Vertauschungsaxioms $\boldsymbol{V}_2$ für die im vorigen Paragraphen existentiell gesicherte $\bar{I}_0$. Der entsprechende Nachweis wäre dann für jeden Pascalort, der sich durch die nachfolgende Bestimmung ergibt, analog zu erbringen. Wir haben dies im einzelnen durchgeführt, können es aber, da sich dabei keinerlei Schwierigkeiten einstellen, dem Leser überlassen.

Wir behaupten also jetzt den

Satz **4.** *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ *ist das Vertauschungsaxiom* $\boldsymbol{V}_2$ *immer erfüllt.*

Beweis. Als allgemeine Ausgangs-Pascalinzidenzanordnung $\bar{I}_0$ verwenden wir die im vorigen Paragraphen existentiell aufgewiesene. Dann entsprechen den neun unter $\boldsymbol{V}_2$ fallenden Vertauschungen an $\bar{I}_0$ die folgenden:

$$\begin{array}{lll} \psi_1 = 14 \longleftrightarrow 27, & \psi_2 = 27 \longleftrightarrow 23, & \psi_3 = 23 \longleftrightarrow 38, \\ \psi_4 = 23 \longleftrightarrow 33, & \psi_5 = 14 \longleftrightarrow 38, & \psi_6 = 27 \longleftrightarrow 47, \\ \psi_7 = 38 \longleftrightarrow 47, & \psi_8 = 47 \longleftrightarrow 33, & \psi_9 = 33 \longleftrightarrow 14. \end{array}$$

Übt man nun diese Vertauschungen innerhalb $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ einzeln auf $\bar{I}_0$ aus, so muß, wenn Satz **4** gelten soll, je eine von $\bar{I}_0$ mit $\bar{p}_0$ *verschiedene* allgemeine

Pascalsche Inzidenzanordnung $\bar{I}_\nu$ mit $\bar{p}_\nu \neq (39)$, $[\nu = 1, 2, 3, \ldots, 9]$ resultieren [15]). Daß dies der Fall ist, zeigen die folgenden explizit in $S(57/2/8)$ durchgeführten Vertauschungsschritte.

1. $\psi_1 = 14 \longleftrightarrow 27$.

$$\bar{I}_1 \begin{cases} (27, 14) \times (38, 47) = 48 & \{(45) \text{ und } (48)\} \\ (14, 23) \times (47, 33) = 13 & \{(40) \text{ „ } (2)\} \\ (23, 38) \times (33, 27) = 26 & \{(41) \text{ „ } (29)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_1 = (13, 26, 48) = (36)$ kollinear und $\neq (39)$.

2. $\psi_2 = 27 \longleftrightarrow 23$.

$$\bar{I}_2 \begin{cases} (14, 23) \times (38, 47) = 28 & \{(40) \text{ und } (48)\} \\ (23, 27) \times (47, 33) = 11 & \{(23) \text{ „ } (2)\} \\ (27, 38) \times (33, 14) = 42 & \{(21) \text{ „ } (56)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_2 = (11, 28, 42) = (53)$ kollinear und $\neq (39)$.

3. $\psi_3 = 23 \longleftrightarrow 38$.

$$\bar{I}_3 \begin{cases} (14, 27) \times (23, 47) = 56 & \{(45) \text{ und } (13)\} \\ (27, 38) \times (47, 33) = 46 & \{(21) \text{ „ } (2)\} \\ (38, 23) \times (33, 14) = 16 & \{(41) \text{ „ } (56)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_3 = (16, 46, 56) = (12)$ kollinear und $\neq (39)$.

4. $\psi_4 = 23 \longleftrightarrow 33$.

$$\bar{I}_4 \begin{cases} (14, 27) \times (38, 47) = 48 & \{(45) \text{ und } (48)\} \\ (27, 33) \times (47, 23) = 25 & \{(29) \text{ „ } (13)\} \\ (33, 38) \times (23, 14) = 39 & \{(55) \text{ „ } (40)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_4 = (25, 39, 48) = (33)$ kollinear und $\neq (39)$.

5. $\psi_5 = 14 \longleftrightarrow 38$.

$$\bar{I}_5 \begin{cases} (38, 27) \times (14, 47) = 54 & \{(21) \text{ und } (26)\} \\ (27, 23) \times (47, 33) = 11 & \{(23) \text{ „ } (2)\} \\ (23, 14) \times (33, 38) = 39 & \{(40) \text{ „ } (55)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_5 = (11, 39, 54) = (46)$ kollinear und $\neq (39)$.

6. $\psi_6 = 27 \longleftrightarrow 47$.

$$\bar{I}_6 \begin{cases} (14, 47) \times (38, 27) = 54 & \{(26) \text{ und } (21)\} \\ (47, 23) \times (27, 33) = 25 & \{(13) \text{ „ } (29)\} \\ (23, 38) \times (33, 14) = 16 & \{(41) \text{ „ } (56)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_6 = (16, 25, 54) = (10)$ kollinear und $\neq (39)$.

---

[15]) Dies genügt bereits, wie in der Arbeit „Deutsche Math. 1 (1936), S. 165—174" gezeigt ist, wo bewiesen wurde, daß bereits eine einzige von $\bar{I}_0$ mit $\bar{p}_0$ verschiedene $\bar{I}_\nu$ mit $\bar{p}_\nu$ ausreicht, um den Pappus-Pascalschen Satz zu beweisen.

7. $\psi_7 = 38 \longleftrightarrow 47.$

$$\bar{I}_7 \begin{cases} (14, 27) \times (47, 38) = 48 & \{(45) \text{ und } (48)\} \\ (27, 23) \times (38, 33) = 19 & \{(23) \quad ,, \quad (55)\} \\ (23, 47) \times (33, 14) = 17 & \{(13) \quad ,, \quad (56)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_7 = (17, 19, 48) = (42)$ kollinear und $\neq (39)$.

8. $\psi_8 = 47 \longleftrightarrow 33.$

$$\bar{I}_8 \begin{cases} (14, 27) \times (38, 33) = 18 & \{(45) \text{ und } (55)\} \\ (27, 23) \times (33, 47) = 11 & \{(23) \quad ,, \quad (2)\} \\ (23, 38) \times (47, 14) = 26 & \{(41) \quad ,, \quad (26)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_8 = (11, 18, 26) = (9)$ kollinear und $\neq (39)$.

9. $\psi_9 = 33 \longleftrightarrow 14.$

$$\bar{I}_9 \begin{cases} (33, 27) \times (38, 47) = 28 & \{(29) \text{ und } (48)\} \\ (27, 23) \times (47, 14) = 7 & \{(23) \quad ,, \quad (26)\} \\ (23, 38) \times (14, 33) = 16 & \{(41) \quad ,, \quad (56)\} \end{cases}$$

mit $\bar{p}_9 = (7, 16, 28) = (12)$ kollinear und $\neq (39)$.

Es bleibt uns noch die Bestimmung der Pascalörter des Büschels mit den Grundpunkten 14, 27, 23, 38 in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$, die analog wie in einer früheren Arbeit für $\boldsymbol{S}(31/2/6)$ [16]) vorgenommen werden kann, so daß wir uns in der folgenden Ausführung kurz fassen können. Man bestimmt weitere Pascalörter durch 14, 27, 23, 38 in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ nach folgender *systematischer Methode*. Zu 14, 27, 23, 38 kommen für den Aufbau allgemeiner, nicht zerfallender Pascalörter als weitere Punkte nur solche in Frage, die mit je zwei der Grundpunkte kein kollineares Tripel bilden. Als Möglichkeitsfolge ergibt sich aus dieser Forderung die folgende:

(*) 1, 5, 6, 8, 17, 20, 21, 24, 25, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 40, 41, 43, 47, 57.

Jeder Punkt dieser Folge kann zu 14, 27, 23, 38 als fünfter Punkt genommen werden und bestimmt dann (nach dem Identitätssatz, Nr. **16**) einen allgemeinen Pascalort in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$. Da aber jeder Pascalort in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ *genau* acht Punkte enthält und der Pascalort

$$(\bar{\Pi}_0) = \{1, 8, 14, 23, 27, 33, 38, 47\}$$

durch spätere Entwicklungen bekannt ist (s. Nr. **17**, Satz 7 und Nr. **19**), so scheiden aus (*) noch die Punkte 1, 8, 33, 47 aus.

Es sind jetzt die übrigen allgemeinen, nicht zerfallenden Pascalörter durch 14, 23, 27, 38 eindeutig folgendermaßen bestimmbar.

---

[16]) Die vollständig reellen Typen von Pascalortbüscheln in der endlichen projektiven Geometrie $\boldsymbol{S}(31/2/6)$, Deutsche Math. 3 (1938), S. 529—546.

1. Fall. 5 wird als fünfter Punkt gewählt:

$$(\overline{\Pi}_1) = \{14, 23, 27, 38, 5\}.$$

Die drei weiteren Punkte des hierdurch festgelegten Pascalorts werden dann nach der unter der Nr. 17 im Beweisgang von Satz 7 angegebenen Konstruktionsmethode bestimmt. Dann ergibt sich $(\overline{\Pi}_1)$ als

$$(\overline{\Pi}_1) = \{5, 6, 14, 20, 21, 23, 27, 38\}.$$

In (*) bleiben dann noch die Punkte:

$(*)_1$ 17, 24, 25, 29, 30, 32, 35, 37, 40, 41, 43, 57.

2. Fall. Im zweiten Falle, wo 17 als fünfter Punkt gewählt wird, ergibt sich analog:

$$(\overline{\Pi}_2) = \{14, 17, 23, 27, 30, 35, 37, 38\}$$

und in $(*)_1$ bleiben dann noch:

$(*)_2$ 24, 25, 29, 32, 40, 41, 43, 57.

3. Fall. Im dritten Falle wählen wir 24 als fünften Punkt. Dann ergibt sich analog.

$$(\overline{\Pi}_3) = \{14, 23, 24, 27, 32, 38, 40, 41\}$$

und in $(*)_2$ bleiben dann noch:

$(*)_3$ 25, 29, 43, 57.

4. Fall. Im vierten Falle endlich wird 25 als fünfter Punkt gewählt. Dann folgt eindeutig:

$$(\overline{\Pi}_4) = \{14, 23, 25, 27, 29, 38, 43, 57\},$$

und sämtliche Elemente der Möglichkeitsfolge (*) sind damit aufgebraucht.

Für

$$\bar{\sigma}_0 = \{14, 27, 23, 38, 47, 33\}$$

ist dann das Erfülltsein von V_2 bereits eingangs dieser Nummer nachgewiesen worden. Die übrigen P. I., die mit 14, 27, 23, 38 fest, in $S(57/2/8)$ existieren, sind nach den eben durchgeführten Entwicklungen die folgenden:

$$\bar{\sigma}_1 = \{14, 27, 23, 38, 5, 6\},$$
$$\bar{\sigma}_2 = \{14, 27, 23, 38, 17, 30\},$$
$$\bar{\sigma}_3 = \{14, 27, 23, 38, 24, 32\},$$
$$\bar{\sigma}_4 = \{14, 27, 23, 38, 25, 29\}.$$

Für diese letzteren sind je die Vertauschungen

$$\psi_1 = 14 \longleftrightarrow 27, \qquad \psi_2 = 27 \longleftrightarrow 23, \qquad \psi_3 = 23 \longleftrightarrow 38,$$
$$\psi_5 = 14 \longleftrightarrow 38,$$

durch den Nachweis an $\bar{\sigma}_0$ schon als erfüllt nachgewiesen. Es brauchen also je nur noch die weiteren fünf Vertauschungen als erfüllt nachgewiesen werden, damit V_2 als allgemein erfüllt nachgewiesen ist und daher die Gesamtaussage des Satzes 4. Dieser letztere Nachweis kann aber, da er leicht und analog zu führen ist, dem Leser überlassen werden.

9. Die Ergebnisse dieses I. Kapitels fassen wir jetzt als Hauptergebnis im folgenden Satz zusammen:

Satz 5. *Die endliche projektive Geometrie des Veblensystems* $S(57/2/8)$ *ist ein Minimalmodell einer vollständigen endlichen ebenen Inzidenzgeometrie, d. h. in ihr sind die folgenden Inzidenzaxiome*

a) I. 1, I. 2, I. 3, I. 9*, I. 10*;

b) das Fano-Axiom F_1;

c) das — dem Pappus-Pascalschen Satze äquivalente — *Vertauschungsaxiom* V_2.

sämtlich erfüllt.

Beweis. Von Satz 5 braucht lediglich die Minimalaussage noch nachgewiesen zu werden. Dieser Nachweis ist aber bereits explizit in einer früheren, unter Anm. [7]) genannten Arbeit enthalten, wo gezeigt ist, daß V_2 im Veblensystem $S(31/2/6)$ *nicht* erfüllt ist. Da ein Veblensystem mit sieben Punkten auf jeder Geraden nicht existiert[17]), so folgt $S(57/2/8)$ als Minimalmodell für die Erfüllung von V_2 und damit die noch offene Aussage von Satz 5.

Kapitel II.

Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms und des S. K.-Axioms von den Inzidenzaxiomen.

§ 7.

Die weiteren Axiome.

10. In dem im § 1 genannten und hier zugrunde gelegten Axiomensystem der reellen ebenen projektiven Geometrie folgten auf die Inzidenzaxiome I. 1—I. 3, I. 9*, I. 10*, Fano-Axiom F_1, Vertauschungsaxiom V_2 (s. Nr. 3), die wir im vorigen Kapitel als in $S(57/2/8)$ sämtlich erfüllt nachgewiesen

[17]) Siehe Safford, Am. Math. Monthly **14** (1907), S. 84 und W. Heuser, a. a. O. [1]), Satz 5, S. 20. Dieser Nachweis der Nichtexistenz von $S(43/2/7)$ war die Hauptaufgabe der Heuserschen Dissertation. Die Literatur hierüber scheint Heuser aber entgangen zu sein. Neuerdings ist die Nichtexistenz von $S(43/2/7)$ auf Grund gruppentheoretischer Überlegungen erneut von E. Witt (Hamb. Abh. **12** (1938), S. 265ff.) bewiesen worden, der weder die Arbeit von Safford, noch die Dissertation von W. Heuser erwähnt.

haben, noch drei weitere Axiome: Das *Fano-Axiom* F_2 und die beiden sogenannten „*schwachen*“ *Stetigkeitsaxiome*, das *E. P.-Axiom* und das *S. K.-Axiom*.

Ihre Formulierungen geben wir hier wieder:

11. Fano-Axiom F_2. *Wenn eine harmonische (Punkt-) Folge existiert, so enthält nicht jede nur eine endliche Anzahl von Punkten.*

Eine harmonische (Punkt)-Folge ist dabei durch die Viereckskonstruktion des Fano-Axioms F_1 erklärt (s. Nr. **3**).

Inhaltlich bedeutet F_2 dasselbe, wie die *axiomatische Forderung von unendlich vielen Punkten jeder Geraden* [18]; doch wurde dafür, weil das Verfahren der fortgesetzten Konstruktion harmonischer Punkte der Arbeitsmethode der synthetischen Geometrie am nächsten liegt, die Fassung des Fano-Axioms F_2 gewählt.

12. Für die Kennzeichnung von „*Innen*“ und „*Außen*“ eines (nicht zerfallenden) Kegelschnitts oder für die Zerlegung der projektiven Ebene in zwei verschiedene Gebiete mittels eines allgemeinen, nicht zerfallenden Kegelschnitts K, wurden die sämtlichen Punkte der Ebene von K in drei Klassen geteilt, die folgendermaßen definiert waren:

1. Klasse. *Parabolische Punkte.*

Definition **P. P.** *Ein Punkt der Ebene eines nicht zerfallenden Kegelschnitts heißt parabolischer Punkt, wenn durch ihn eine und nur eine Tangente des Kegelschnitts geht.*

Die „Tangente“ eines Kegelschnitts war dabei erklärt als eine Gerade, die mit dem Kegelschnitt *genau einen* Punkt gemein hat.

2. Klasse. *Hyperbolische Punkte.*

Definition **H. P.** *Der Schnittpunkt zweier Tangenten eines nicht zerfallenden Kegelschnitts heißt hyperbolischer Punkt.*

Der Kegelschnitt ist dabei erklärt [19]) als der „Inbegriff (Gesamtheit) aller Punkte P, für die $1, 2, 3, 4, 5, P$ ein Pascalsechseck ist“, also durch *eine* für Kegelschnitte als *Kurven zweiter Ordnung* (und dual durch den Brianchonschen Satz) *bzw. zweiter Klasse kennzeichnende Eigenschaft*, woraus in der gewöhnlichen projektiven Geometrie bekanntlich folgt, daß es in der

---

[18]) Siehe die diesbezüglich grundlegende Aussage von R. Baldus über die Beweisbarkeit der Tatsache der Unendlichkeit der Menge der Punkte jeder Geraden in „Zur Axiomatik der Geometrie IV: Über die Tragweite des Axioms von Pasch“, Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) Jahrg. 1934, S. 145—161, insbesondere Satz 9.

[19]) Siehe a. a. O. [Anm. [2])], S. 14.

Ebene eines Kegelschnitts keine Punkte gibt, durch die *mehr als zwei Tangenten* an den Kegelschnitt gehen.

Diese Tatsache muß aber in den jeweils betrachteten endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme erst bewiesen werden und ist dort durchaus nicht trivial und auch keine Folge der Existenz einer Pascalanordnung. Wir können nämlich in einer späteren Arbeit ein *Gegenbeispiel* angeben, das zeigt, daß diese Tatsache in den endlichen Geometrien eines Beweises bedarf. Es stellt sich nämlich heraus, um das Prinzipielle des Gegenbeispiels gleich hier anzugeben, daß in all den Veblensystemen, in denen das Fano-Axiom F_1 (s. Nr. 3) *nicht* erfüllt ist, Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts existieren, durch die mehr als zwei „Tangenten" gehen. Dies läßt wichtige Einblicke in die Tragweite des Fano-Axioms F_1 zu, deren allgemeine Untersuchung wir zum Gegenstand einer weiteren Arbeit machen werden.

Es wäre nun natürlich, als dritte Klasse von Punkten der Ebene eines Kegelschnitts in einer reellen projektiven Geometrie diejenigen Punkte einzuführen, *durch die keine Tangenten gehen.* Man hätte dann, wenn man etwa die Polarentheorie oder die Theorie der Involutionen begründen will, zu beweisen, daß *jede* durch einen solchen „inneren" Punkt des Kegelschnitts gehende Gerade denselben in *genau zwei* verschiedenen Punkten trifft. Dieser Nachweis gelingt aber nur, wie die Untersuchungen von K. Kommerell [20]) zeigen, wenn axiomatisch „*Stetigkeit*" in „starker" Form (z. B. durch Archimedisches, Dedekindsches oder Cantorsches Axiom) garantiert ist. Aus diesem Grunde wurde im Liebmannschen Buche [s. Anm. [2])] die dritte Klasse von Punkten der Ebene eines Kegelschnitts *axiomatisch* festgelegt durch das

E. P.-Axiom. *Außer parabolischen und hyperbolischen Punkten gibt es in bezug auf jeden nicht zerfallenden Kegelschnitt nur noch eine Art von Punkten, elliptische Punkte. — Ein Punkt heißt „elliptisch", wenn alle durch ihn gehenden Geraden Treffgeraden des Kegelschnitts sind, d. h. zwei (verschiedene) Punkte mit ihm gemein haben.*

Die *Tragweite dieses Axioms* möge aus den folgenden Ausführungen von H. Liebmann [21]) ersehen werden: „Man erkennt hieraus, daß das Paschsche Axiom sich in die vorangestellte Axiomatik als beweisbarer Satz einordnet ..." „Mit dem beim Hinausgehen über die linearen Gebilde und Übergang zur Kegelschnittlehre fast als zwangsläufige, aber tatsächlich als *neue* Grundannahme zu fordernden E. P.-Axiom werden demnach *alle* Anordnungs-

[20]) Math. Annalen **109** (1934), S. 307—312 und Berichtigung dazu, ebenda S. 764.

[21]) Es handelt sich um die Schluß- und Einleitungssätze der Arbeit: Beweise der Anordnungsaxiome (II. 1—II. 4, also einschließlich des Paschschen Axioms II. 4 in der Hilbertschen Fassung) im Rahmen der synthetischen Geometrie, Math. Annalen **111** (1935), S. 64—67.

axiome zu beweisbaren Sätzen der synthetischen Geometrie." „Die sonst für die Untersuchung der Kegelschnitte erforderlichen Annahmen über Anordnung von Elementen folgen jetzt umgekehrt aus der vorangestellten Axiomatik, die — wie kaum hervorgehoben zu werden braucht — *kein Stetigkeitsaxiom* aufnimmt, sondern der Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen durch Hinzunahme von Quadratwurzeln entspricht."

Damit erscheint auch die oben angeführte [s. Anm. [18])] Aussage von R. Baldus über *die Beweisbarkeit der Aussage der Unendlichkeit der Menge der Punkte jeder Geraden* in ganz neuem Lichte.

13. Für eine axiomatisch lückenlose Begründung der Theorie der Kegelschnittbüschel im Rahmen der reellen projektiven Geometrie wurde als letztes Axiom des genannten Axiomensystems das folgende gebraucht:

S. K.-Axiom. *Zwei verschiedene, nicht zerfallende Kegelschnitte, die einen Punkt gemein haben, aber in ihm nicht die Tangenten, haben mindestens noch einen weiteren gemein.*

Damit sind *alle* Axiome des zugrunde gelegten Axiomensystems angegeben.

§ 8.

Die Nichterfüllbarkeit des Fano-Axioms F_2 in $S(n^2 - n + 1/2/n)$.

14. Wir haben bereits ausgeführt (Nr. **11** und **12**), daß das Fano-Axiom F_2 inhaltlich *mit der axiomatischen Forderung von unendlich vielen Punkten jeder Geraden* gleichbedeutend ist. Da in jeder endlichen projektiven Geometrie eines Veblensystems $S(n^2 - n + 1/2/n)$ mit endlichem n, jede Gerade aber nur genau n Punkte enthält — falls das betreffende Veblensystem überhaupt realisierbar und damit existent ist —, so kann F_2 *in keinem Veblensystem erfüllt sein*, insbesondere auch nicht in der in $S(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 8$ eintretenden endlichen projektiven Inzidenzgeometrie $S(57/2/8)$. Es ergibt sich mithin der

Satz **6.** *Das Fano-Axiom F_2 ist in keiner endlichen projektiven Geometrie eines Veblensystems $S(n^2 - n + 1/2/n)$, [$n = 2, 3, 4, \ldots$; n endlich], erfüllt.*

§ 9.

Pascalörter in $S(n^2 - n + 1/2/n)$.

15. Im Anschluß an die präzisierte Definition **P. I.** der allgemeinen Pascalschen Inzidenzanordnung (s. Nr. **3**) erklären wir jetzt [22]) den Begriff des „*Kegelschnitts*" oder — wie wir in den endlichen Geometrien der Veblen-

---

[22]) Vgl. Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie II: Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms und des S. K.-Axioms von den Verknüpfungsaxiomen, Monatsh. f. Math. u. Phys. **46** (1937), S. 93—121, § 1.

systeme stets sagen wollen — des „*Pascalorts*", allgemein durch die im Pascalschen Lehrsatz ausgesagte (in der gewöhnlichen und in den endlichen projektiven Geometrien, in denen $\boldsymbol{F}_1$ erfüllt ist, kennzeichnende) [s. Nr. 12] konstruktive Eigenschaft durch die folgende:

Definition **P. 0.** *Jeder ebene geometrische Ort von Punkten, von denen je sechs eine Pascalsche Inzidenzanordnung bilden, heißt Pascalort. — Der Pascalort heißt insbesondere ein allgemeiner nicht zerfallender Π_0, wenn von den sechs zu seiner Definition herangezogenen Punkten keine drei kollinear liegen; er heißt dagegen zerfallend, wenn diese Bedingung nicht durchgehend erfüllt ist.*

Die Geraden (i_λ, i_μ), $(\lambda \neq \mu;\ \lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, 6)$ (s. Def. **P. I.**, Nr. 3) heißen *Treffgeraden* des Pascalorts, weil jede von ihnen mit dem Pascalort genau zwei (verschiedene) Punkte i_λ, i_μ gemein hat. Eine Gerade, die mit dem Pascalort genau einen Punkt gemein hat, heißt eine *Tangente* des Pascalorts in dem betreffenden Punkt. Jede Gerade, die mit dem Pascalort keinen Punkt gemein hat, heißt eine *Nichttreffgerade* des Pascalorts.

16. Daß für die Existenz eines allgemeinen, nicht zerfallenden Pascalorts die endliche projektive Geometrie des Veblensystems $\boldsymbol{S}(31/2/6)$ ein Minimalmodell ist, ist im I. Kapitel (insbesondere in dessen § 2) der unter Anm. [22]) genannten Arbeit explizit bewiesen [23]). Des weiteren wurde gezeigt [24]), daß für jene **P. I.** in $\boldsymbol{S}(31/2/6)$ *das Vertauschungsaxiom $\boldsymbol{V}_2$ nicht erfüllt ist.* Dies ist vielmehr erst für eine **P. I.** in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ der Fall, wie im § 6 dieser Arbeit nachgewiesen wurde. Daher gelten die folgenden Sätze 7, 8, 9 dieses Paragraphen erst in Veblensystemen, die für $n \geqq 8$ eintreten. Dies wird vollends deutlich durch die folgenden Überlegungen.

Im Anschluß an die Definition **P. 0.** (Nr. **15**) hätte man dann auch in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit $n \geqq 8$ den folgenden *Identitätssatz* zu beweisen [s. Anm. [2]), S. 15]:

Sind $i'_1, i'_2, i'_3, i'_4, i'_5$ beliebige fünf Punkte des Pascalorts Π_0 $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$, dann ist der Pascalort Π'_0 $(i'_1, i'_2, i'_3, i'_4, i'_5)$ mit dem ersten identisch: $(\Pi_0 \equiv \Pi'_0)$.

Der Beweis für diesen Satz ist in der gewöhnlichen reellen projektiven Geometrie im Liebmannschen Buche [s. Anm. [2]), S. 15—16] explizit und in allen Einzelheiten durchgeführt. Als axiomatische Beweismittel werden dabei das Vertauschungsaxiom $\boldsymbol{V}_1$ und das Vertauschungsaxiom $\boldsymbol{V}_2$ gebraucht,

---

[23]) Siehe auch: Die vollständig reellen Typen von Pascalortsbüscheln in $\boldsymbol{S}(31/2/6)$, Deutsche Math. **3** (1938), S. 529—546.

[24]) Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie (I): Die Unabhängigkeit des Vertauschungsaxioms $\boldsymbol{V}_2$ von den Verknüpfungsaxiomen, Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.), Jahrg. 1937, S. 1—17.

wenn vorher die Begriffe perspektiver und projektiver Punktreihen (bzw. Strahlbüschel) erklärt sind.

Diese letzteren Begriffe lassen sich nun zwanglos und ohne Änderungen der Definitionen in die endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme übertragen, wie es im Falle des Veblensystems $\boldsymbol{S}(21/2/5)$ explizit durchgeführt wurde; im Anschluß daran ist die Gültigkeit der Fundamentalsätze der projektiven Geometrie in $\boldsymbol{S}(21/2/5)$ nachgewiesen worden [25]). Des weiteren wurde gezeigt [26]), daß $\boldsymbol{V}_1$ aus $\boldsymbol{V}_2$ folgt („Hessenbergsches Ergebnis"), und dieser Nachweis funktioniert auch, wie man unmittelbar durch sinngemäße Übertragung erkennt, für jede Pascalsche Inzidenzanordnung einer endlichen projektiven Geometrie $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit $n \geqq 8$, in der $\boldsymbol{F}_1$ erfüllt ist (s. Nr. **12** und die dortigen Ausführungen über „Gegenbeispiele"), insbesondere also auch für $\boldsymbol{S}(57/2/8)$.

Ist also in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit $n \geqq 8$ neben $\boldsymbol{F}_1$ noch das Vertauschungsaxiom $\boldsymbol{V}_2$ erfüllt, wie dies insbesondere in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ der Fall ist (s. § 4 und 6 dieser Arbeit), so läßt sich der Liebmannsche Beweis des oben angeführten Identitätssatzes bei sinngemäßer Verwendung der eingehenden Begriffe und unter Benutzung von $\boldsymbol{V}_2$ auch in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit $n \geqq 8$, insbesondere also auch in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ genau so durchführen und beweist dann, *daß je sechs beliebige Punkte eines Pascalorts von* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *mit* $n \geqq 8$, wenn $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ darin erfüllt sind, *in Pascalscher Inzidenzanordnung sind.* [Wir haben die Übertragung des Beweises in allen Einzelheiten in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ durchgeführt; sie kann aber, weil keinerlei Schwierigkeiten zu überwinden sind, hier dem Leser überlassen werden.]

17. Unter Benutzung der in Nr. **16** angegebenen Tatsachen behaupten wir jetzt den folgenden allgemeinen

Satz **7.** *Existiert für die Zahl* $n \geqq 8$ *ein Veblensystem* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$, *in dem sämtliche Inzidenzaxiome erfüllt sind und in dem es eine allgemeine Pascalsche Inzidenzanordnung gibt, so enthält der durch diese bestimmte Pascalort genau* n *Punkte.*

Beweis. Es sei $n \geqq 8$ eine Zahl, für die $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ existiert, d. h. etwa durch eine Inzidenztafel oder ein geeignetes Zahlensystem realisierbar ist; mithin gehen durch jeden Punkt n Geraden und auf jeder Geraden liegen n Punkte. Unter seinen $n^2 - n + 1$ Punkten gibt es nach Voraussetzung

---

[25]) Die Fundamentalsätze in der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems $S(21/2/5)$, Monatsh. f. Math. u. Phys. **45** (1937), S. 320—331.

[26]) Die Abhängigkeit der Vertauschungsaxiome und das Hessenbergsche Ergebnis. Geometrische Axiomatik als Gruppentheorie, Deutsche Math. **1** (1936), S. 165—174.

sechs Punkte, von denen keine drei kollinear liegen, $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$, die in der angegebenen Reihenfolge in Pascalscher Inzidenzanordnung sind, d. h.

$$(i_1, i_2) \times (i_4, i_5) = j_1^{(0)},$$
$$(i_2, i_3) \times (i_5, i_6) = j_2^{(0)},$$
$$(i_3, i_4) \times (i_6, i_1) = j_3^{(0)}$$

mit $(j_1^{(0)}, j_2^{(0)}, j_3^{(0)}) = p_0$ kollinear.

Der Pascalort ist dann definiert als die Gesamtheit aller Punkte P, für die $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, P$ eine Pascalsche Inzidenzanordnung bilden (s. Nr. **12**).

Nach dieser Erklärung findet man z. B. auf jeder Geraden g durch i_1 mit Verwendung von $j_3^{(0)} = g \times (i_3, i_4)$, $j_1^{(0)} = (i_1, i_2) \times (i_4, i_5)$, $j_2^{(0)} = (i_2, i_3) \times (j_1^{(0)}, j_3^{(0)})$ den Punkt $P = (i_5, j_2^{(0)}) \times g$, der zu dem Pascalort gehört, bekanntlich *linear*. Da es durch i_1 (wie durch jeden anderen Punkt des Systems) genau n verschiedene Geraden g des Systems $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ gibt, so gibt es auch, nach der soeben beschriebenen Konstruktion, *genau* n verschiedene (Axiom **A. 2***) Punkte P. Da außerdem nach Voraussetzung für die genannte **P. I.** das Vertauschungsaxiom V_2 erfüllt ist, so gilt für den durch sie bestimmten Pascalort der Identitätssatz (Nr. **16**), wonach je sechs beliebige Punkte des Pascalorts in Pascalscher Inzidenzanordnung sind.

Hieraus ergibt sich zusätzlich (d. h. unter denselben Voraussetzungen wie bei Satz **7**) ferner der

Satz **8.** *Durch jeden Punkt eines allgemeinen, nicht zerfallenden Pascalorts von* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *mit* $n \geqq 8$ *gibt es genau* $(n - 1)$ *Treffgeraden und genau eine Tangente.*

Beweis. Sei Q der fixierte Punkt des Pascalorts, so kann er mit den $n - 1$ übrigen Punkten desselben (wegen **A. 1***) durch je eine Gerade verbunden werden, die dem System angehört, und die dann ersichtlich Treffgerade des Pascalorts ist. Mithin muß die weitere noch durch Q gehende Gerade *Tangente* des Pascalorts in Q sein.

18. Im Anschluß an diese beiden Sätze behaupten wir jetzt den

Satz **9.** *Wenn es in der Ebene der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *mit* $n \geqq 8$, *in der die sämtlichen Inzidenzaxiome erfüllt sind, einen allgemeinen, nicht zerfallenden Pascalort II gibt, so enthält seine Ebene*

a) genau n parabolische Punkte,

b) genau $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *hyperbolische Punkte und*

c) genau $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *„weitere" Punkte;*

entsprechend gibt es in bezug auf Π:

a) genau n Tangenten.*

b) genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Treffgeraden und*

c) genau $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ „weitere" Geraden.*

Beweis. A. Die Aussagen a) und a*) sind bereits in den Sätzen 7 bzw. 8 bewiesen.

B. Wegen a*), **A 2*** und Satz 8 gibt es genau $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ hyperbolische Punkte, in denen sich die n Tangenten von Π treffen, womit b) bewiesen ist. Analog gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Treffgeraden von Π, wenn man Satz 8 und **A. 1*** berücksichtigt.

C. Daher gibt es in der Ebene von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit $n \geqq 8$ genau $n^2 - n + 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ „weitere" Punkte und entsprechend ebenso viele „weitere" Geraden in bezug auf Π.

Es mag bemerkt werden, daß in den endlichen Geometrien der Veblensysteme, in denen das Fano-Axiom $\boldsymbol{F}_1$ *nicht* erfüllt ist, *„Gegenbeispiele"* zu diesen Aussagen existieren (s. Nr. 12), wie ich später in einer weiteren Arbeit zeigen werde.

§ 10.

Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms von den Inzidenzaxiomen.

19. Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms von den Inzidenzaxiomen (s. § 1) ist dann bewiesen, wenn ein einziges *Ausfallbeispiel* in einer endlichen projektiven Geometrie eines Veblensystems, in dem die sämtlichen Inzidenzaxiome generell für alle Elemente erfüllt sind, angegeben werden kann. Als solches Veblensystem wurde im I. Kapitel dieser Arbeit die endliche minimale Inzidenzgeometrie $\boldsymbol{S}(57/2/8)$, die in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 8$ eintritt, nachgewiesen.

Das Ausfallbeispiel zum E. P.-Axiom gewinnen wir folgendermaßen: Im § 5 (Nr. 7) wurde die Existenz einer allgemeinen Pascalschen Inzidenzanordnung, gebildet von den Punkten 14, 27, 23, 38, 47, 33, nachgewiesen. Sie definiert den allgemeinen, nicht zerfallenden Pascalort (s. Nr. 15)

$$\overline{\Pi}_0 = \{14, 27, 23, 38, 47, 33\},$$

der nach Satz 7 noch zwei weitere Punkte P_1, P_2 enthalten muß, die man nach der in Nr. 17 gegebenen Vorschrift folgendermaßen konstruiert:

Nach § 5 ist: $j_1^{(0)} \equiv 48$, und durch $i_1 \equiv 14$ gehen die folgenden Geraden: (5), (16), (26), (34), (40), (45), (51), (56) [s. Tafel $\boldsymbol{S}(57/2/8)$, Fig. 1], von denen

$(26) = (14, 47)$, $(34) = (14, 38)$, $(40) = (14, 23)$, $(45) = (14, 27)$, $(56) = (14, 33)$ bereits als Treffgeraden erkannt sind. Daß außerdem die Gerade $(51) = (9, 14, 20, 32, 35, 46, 51, 57) \equiv t_{14}^{(0)}$ Tangente von $\overline{\Pi}_0$ in 14 ist, erkennt man unmittelbar aus den folgenden Entwicklungen. Die beiden weiteren gesuchten Punkte P_1, P_2 von $\overline{\Pi}_0$ können also nur auf (5) bzw. (16) liegen, die als Geraden g für die Durchführung der in Nr. 17 beschriebenen Konstruktion in Frage kommen.

a) Als P_1 ergibt sich für $g \equiv (5)$:

$$\begin{aligned} (5) \times (23, 38) &= 45 \quad \{(5) \text{ und } (41)\}, \\ (27, 23) \times (48, 45) &= 51 \quad \{(23) \text{ „ } (33)\}, \\ P_1 \equiv (47, 51) \times (5) &= 1 \quad \{(54) \text{ „ } (5)\}. \end{aligned}$$

b) Analog ergibt sich P_2 für $g \equiv (16)$ als:

$$\begin{aligned} (16) \times (23, 38) &= 2 \quad \{(16) \text{ und } (41)\}, \\ (27, 23) \times (48, 2) &= 19 \quad \{(23) \text{ „ } (42)\}, \\ P_2 \equiv (47, 19) \times (16) &= 8 \quad \{(18) \text{ „ } (16)\}. \end{aligned}$$

$\overline{\Pi}_0$ von $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ ist also der allgemeine, nicht zerfallende Pascalort

$$\overline{\Pi}_0 = \{1, 8, 14, 23, 27, 33, 38, 47\}$$

und nach dem Identitätssatz (s. Nr. 16) bilden irgend sechs Punkte von $\overline{\Pi}_0$ eine allgemeine Pascalsche Inzidenzanordnung, da in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ $\boldsymbol{V}_2$ erfüllt ist, was man auch leicht in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ durch Einzeluntersuchung bestätigen könnte.

20. Wir behaupten jetzt den folgenden

Satz 10. *In der endlichen minimalen Inzidenzgeometrie* $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ *gibt es in bezug auf den nicht zerfallenden Pascalort*

$$\overline{\Pi}_0 = \{1, 8, 14, 23, 27, 33, 38, 47\}$$

keinen einzigen elliptischen Punkt. D. h. das E. P.-Axiom ist mit den ebenen Inzidenzaxiomen I. 1, I. 2, I. 3, I. 9*, I. 10*, *Fano-Axiom* $\boldsymbol{F}_1$, *Vertauschungsaxiom* $\boldsymbol{V}_2$ *nicht beweisbar, also von diesen Axiomen unabhängig.* $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ *ist für die Ableitung dieser Aussage ein Minimalmodell einer endlichen projektiven Geometrie.*

Beweis. A. Π_0 enthält genau die folgenden acht Punkte

$$1, 8, 14, 23, 27, 33, 38, 47,$$

wie eben gezeigt wurde.

In jedem derselben gibt es genau eine Tangente (s. Satz 8), nämlich:

$$\begin{aligned} t_1^{(0)} &\equiv (53), \quad t_8^{(0)} \equiv (35), \quad t_{14}^{(0)} \equiv (51), \quad t_{23}^{(0)} \equiv (30), \\ t_{27}^{(0)} &\equiv (8), \quad t_{33}^{(0)} \equiv (57), \quad t_{38}^{(0)} \equiv (32), \quad t_{47}^{(0)} \equiv (24), \end{aligned}$$

wie man unmittelbar aus der Tafel $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ erkennt. Sie sind außerdem sämtlich voneinander verschieden.

Mithin sind 1, 8, 14, 23, 27, 33, 38, 47 *parabolische* Punkte der Ebene von $\overline{\Pi_0}$ im Sinne der Definition **P. P.** (Nr. **12**).

B. Die unter A. aufgewiesenen acht verschiedenen Tangenten von $\overline{\Pi_0}$ schneiden sich in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ in den folgenden $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ (s. Satz **9**) verschiedenen *hyperbolischen* Punkten von $\overline{\Pi_0}$.

1. $t_1^{(0)} \times t_8^{(0)} = (53) \times (35) = 28$,
2. $t_1^{(0)} \times t_{14}^{(0)} = (53) \times (51) = 20$,
3. $t_1^{(0)} \times t_{23}^{(0)} = (53) \times (30) = 10$,
4. $t_1^{(0)} \times t_{27}^{(0)} = (53) \times (8) = 21$,
5. $t_1^{(0)} \times t_{33}^{(0)} = (53) \times (57) = 52$,
6. $t_1^{(0)} \times t_{38}^{(0)} = (53) \times (32) = 11$,
7. $t_1^{(0)} \times t_{47}^{(0)} = (53) \times (24) = 42$,
8. $t_8^{(0)} \times t_{14}^{(0)} = (35) \times (51) = 35$,
9. $t_8^{(0)} \times t_{23}^{(0)} = (35) \times (30) = 18$,
10. $t_8^{(0)} \times t_{27}^{(0)} = (35) \times (8) = 45$,
11. $t_8^{(0)} \times t_{33}^{(0)} = (35) \times (57) = 54$,
12. $t_8^{(0)} \times t_{38}^{(0)} = (35) \times (32) = 17$,
13. $t_8^{(0)} \times t_{47}^{(0)} = (35) \times (24) = 55$,
14. $t_{14}^{(0)} \times t_{23}^{(0)} = (51) \times (30) = 46$,
15. $t_{14}^{(0)} \times t_{27}^{(0)} = (51) \times (8) = 57$,
16. $t_{14}^{(0)} \times t_{33}^{(0)} = (51) \times (57) = 51$,
17. $t_{14}^{(0)} \times t_{38}^{(0)} = (51) \times (32) = 32$,
18. $t_{14}^{(0)} \times t_{47}^{(0)} = (51) \times (24) = 9$,
19. $t_{23}^{(0)} \times t_{27}^{(0)} = (30) \times (8) = 41$,
20. $t_{23}^{(0)} \times t_{33}^{(0)} = (30) \times (57) = 5$,
21. $t_{23}^{(0)} \times t_{38}^{(0)} = (30) \times (32) = 29$,
22. $t_{23}^{(0)} \times t_{47}^{(0)} = (30) \times (24) = 30$,
23. $t_{27}^{(0)} \times t_{33}^{(0)} = (8) \times (57) = 53$,
24. $t_{27}^{(0)} \times t_{38}^{(0)} = (8) \times (32) = 49$,
25. $t_{27}^{(0)} \times t_{47}^{(0)} = (8) \times (24) = 37$,
26. $t_{33}^{(0)} \times t_{38}^{(0)} = (57) \times (32) = 6$,
27. $t_{33}^{(0)} \times t_{47}^{(0)} = (57) \times (24) = 4$,
28. $t_{38}^{(0)} \times t_{47}^{(0)} = (32) \times (24) = 22$.

Da diese Punkte sämtlich voneinander verschieden sind, ist damit auch bewiesen, daß es keinen Punkt des Systems $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ gibt, durch den mehr als zwei Tangenten von $\overline{\Pi_0}$ gehen (s. Nr. **12**).

C. Man kann jetzt durch Prüfung an Hand der Inzidenztafel $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ leicht zeigen, *daß jede der acht Tangenten* (53), (35), (51), (30), (8), (57), (32), (24) *von* $\overline{\Pi_0}$ *außer dem parabolischen Punkt selbst, in dem sie als Tangente erklärt ist, nur noch hyperbolische Punkte enthält* (wie dies auch in der gewöhnlichen projektiven Geometrie der Fall ist), denn:

(53) = (1, 10, 11, 20, 21, 28, 42, 52),
(35) = (8, 17, 18, 28, 35, 45, 54, 55),
(51) = (9, 14, 20, 32, 35, 46, 51, 57),
(30) = (5, 10, 18, 23, 29, 30, 41, 46),
(8) = (21, 27, 37, 41, 45, 49, 53, 57),
(57) = (4, 5, 6, 33, 51, 52, 53, 54),
(32) = (6, 11, 17, 22, 29, 32, 38, 49),
(24) = (4, 9, 22, 30, 37, 42, 47, 55).

D. Mit A. und B. sind von den 57 Punkten von $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ bereits 36 Punkte in ihre jeweilige Klasse eingeordnet. Es bleiben mithin 21 (s. Satz **9**) „weitere" Punkte, über die jetzt entschieden werden muß, ob sie *„elliptische*

Punkte" von $\overline{\Pi}_0$ im Sinne des E. P.-Axioms sind oder nicht. Es sind dies die folgenden Punkte:

$$2,\ 3,\ 7,\ 12,\ 13,\ 15,\ 16,$$
$$19,\ 24,\ 25,\ 26,\ 31,\ 34,\ 36,$$
$$39,\ 40,\ 43,\ 44,\ 48,\ 50,\ 56.$$

Es kann jetzt bündig folgendermaßen geschlossen werden: Wäre jeder dieser verbleibenden 21 Punkte, da er nicht parabolisch ist, noch hyperbolisch sein kann, im Sinne des E. P.-Axioms ein *elliptischer* Punkt, so müßten nach der Forderung dieses Axioms die durch jeden von ihnen im System $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ überhaupt gehenden Geraden *alle Treffgeraden* von $\overline{\Pi}_0$ sein, d. h. je genau zwei verschiedene Punkte mit $\overline{\Pi}_0$ gemein haben. Daß dies nicht der Fall ist, kann mit Benutzung der unter B. am Schluß und unter C. bewiesenen Tatsachen jetzt so erschlossen werden: Ist W einer der „weiteren" Punkte (also weder parabolischer, noch hyperbolischer Punkt), so kann er mit jedem der acht Punkte von $\overline{\Pi}_0$ innerhalb $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ durch eine Gerade verbunden werden. Von den acht durch W gehenden Geraden können *dann nur vier Treffgeraden* im Sinne des E. P.-Axioms sein, weil sonst die betreffende Gerade durch W „Tangente" von $\overline{\Pi}_0$ sein müßte, jede Tangente von $\overline{\Pi}_0$ aber (nach C.) außer ihrem parabolischen Punkt nur hyperbolische Punkte enthält und es keinen Punkt von $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ gibt, durch den mehr als zwei Tangenten (s. unter B.) von $\overline{\Pi}_0$ gehen. Die „weiteren" vier durch W gehenden Geraden (s. auch Satz **9**) sind dann „Nichttreffgeraden". (Wir bemerken, daß wir dies auch explizit im einzelnen in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ durchgeführt haben und auf diese allgemeinere Schlußweise von Herrn Löbell aufmerksam gemacht worden sind.)

E. Was schließlich die Aussage betrifft, daß $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ für die Durchführung dieses Unabhängigkeitsbeweises ein Minimalmodell einer endlichen projektiven Geometrie ist, so folgt dies aus den Untersuchungen des I. Kapitels dieser Arbeit, wonach erst in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ sämtliche Inzidenzaxiome erfüllt sind.

21. Die unter D. im vorigen Beweisgang durchgeführte Schlußweise gilt auch allgemein in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit $n \geqq 8$ und n *gerade*, wenn vorher gezeigt ist, daß auch in dem betreffenden $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ eine jede Tangente jeweils nur einen einzigen parabolischen, dem Pascalort angehörenden, und sonst lauter hyperbolische Punkte besitzt, und daß es keinen Punkt von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ gibt, durch den mehr als zwei Tangenten gehen. Dann gehen von den $\frac{n(n-1)}{2}$ Treffgeraden des Systems (s. Satz **9**) durch jeden „weiteren" Punkt (deren es nach Satz **9** bekanntlich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ gibt) genau $\frac{n}{2}$ Treffgeraden und $\frac{n}{2}$ „weitere" Geraden, d. h. *jedes solche System* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *mit* $n \geqq 8$ *und* n *gerade, in dem eine allgemeine*

Pascalsche Inzidenzanordnung existiert, liefert Ausfallbeispiele für das E. P.-Axiom.

22. Aus dem Beweisgang des Satzes **10** folgt, daß die Geraden von $\boldsymbol{S}(57/2/8)$:

a) (8), (24), (30), (32), (35), (51), (53), (57) die acht Tangenten von $\overline{\Pi}_0$ sind (s. Satz **9**),

b) (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (13), (14), (16), (18), (21), (23), (25), (26), (27), (29), (34), (40), (41), (43), (45), (48), (50), (52), (54), (55), (56) die 28 Treffgeraden von $\overline{\Pi}_0$ sind (s. Satz **9**) und

c) (9), (10), (11), (12), (15), (17), (19), (20), (22), (28), (31), (33), (36), (37), (38), (39), (42), (44), (46), (47), (49) die „weiteren" 21 Geraden von $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ (s. Satz **9**) in diesem System sämtlich „Nichttreffgeraden" von $\overline{\Pi}_0$ sind, während man allgemein über die „weiteren" Geraden von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit $n > 8$ ohne Kenntnis der Inzidenztafel des Systems diesbezüglich nichts aussagen kann. Es ist aber hier schon interessant, zu sehen, daß die hier als „Nichttreffgeraden" von $\overline{\Pi}_0$ gefundenen Geraden (s. unter c) *nicht* Nichttreffgeraden im Sinne der gewöhnlichen reellen projektiven Geometrie sind, denn in der letzteren enthält eine Nichttreffgerade lauter hyperbolische Punkte des Kegelschnitts, während eine „Nichttreffgerade" in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ sicher auch nichthyperbolische Punkte enthält, z. B. (9) die Punkte 26, 36, 43, 50, die zu den „weiteren" Punkten gehören.

Auch haben die „weiteren" 21 Punkte von $\boldsymbol{S}(57/2/8)$, die oben als nicht elliptische nachgewiesen wurden, untereinander noch gewisse Inzidenzkopplungen, wie die folgenden Beispiele zeigen: $(2, 3, 56) = (25)$, $(2, 7, 13, 24) = (44)$, $(2, 12, 40, 50) = (17)$, $(2, 15, 36, 44) = (15)$. Die entsprechenden Kollinearbindungen könnten in höheren Veblensystemen von Wichtigkeit werden, indem sie dann das Erfülltsein des E. P.-Axioms für einige oder alle „weiteren" Punkte bewirken. Doch ist dazu die Kenntnis der Inzidenztafel des jeweiligen Veblensystems unumgänglich.

§ 11.

Die Unabhängigkeit des S. K.-Axioms von den Inzidenzaxiomen.

23. Die Unabhängigkeit des S. K.-Axioms von den Inzidenzaxiomen ist dann bewiesen, wenn ein einziges *Ausfallbeispielpaar* von Pascalörtern in einer endlichen projektiven Geometrie eines Veblensystems, in dem die sämtlichen Inzidenzaxiome (s. § 1) generell für alle Elemente erfüllt sind, angegeben werden kann. Nun ist $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ als Minimalmodell für das Erfülltsein aller Inzidenzaxiome nachgewiesen (Kapitel I). Mithin kommt auch $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ für die Auffindung eines Ausfallbeispielpaares von Pascalörtern zum Zwecke des Unabhängigkeitsnachweises in Frage.

Dieses Ausfallbeispielpaar gibt es in der Tat in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$. D. h. wir behaupten den folgenden

Satz 11. *In der endlichen minimalen projektiven Inzidenzgeometrie* $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ *hat der nicht zerfallende Pascalort*

$$\overline{\Pi}_0 = \{1, 8, 14, 23, 27, 33, 38, 47\},$$

der im Punkte 1 *die Tangente* $t_1^{(0)} \equiv (53)$ *besitzt, mit dem nicht zerfallenden Pascalort*

$$\overline{\Pi}_1 = \{1, 2, 4, 6, 11, 13, 15, 16\},$$

der im Punkte 1 *die von* $t_1^{(0)} \equiv (53)$ *verschiedene Tangente* $t_1^{(1)} \equiv (4)$ *besitzt, außer dem Punkt* 1 *keinen weiteren Punkt gemeinsam. D. h. das S. K.-Axiom ist mit den ebenen Inzidenzaxiomen* I. 1, I. 2, I. 3, I. 9*, I. 10*, *Fano-Axiom* $\boldsymbol{F}_1$, *Vertauschungsaxiom* $\boldsymbol{V}_2$ *nicht beweisbar, also von diesen Axiomen unabhängig.* $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ *ist für die Ableitung dieser Aussage ein Minimalmodell einer endlichen projektiven Geometrie.*

Beweis. Daß $\overline{\Pi}_0$ ein allgemeiner, nicht zerfallender Pascalort ist und in 1 die Tangente $t_1^{(0)} = (53)$ besitzt, haben wir im § 10 gezeigt.

A. Wir beweisen daher jetzt zuerst, daß die ersten sechs Punkte von $\overline{\Pi}_1$, also

$$1, 2, 4, 6, 11, 13$$

eine Pascalsche Inzidenzanordnung bilden:

$$\begin{aligned} (1, 2) \times (6, \ 11) &= 29 \quad \{(25) \text{ und } (32)\}, \\ (2, 4) \times (11, 13) &= 46 \quad \{(42) \ \ ,, \ \ (2)\}, \\ (4, 6) \times (13, 1) \ &= 5 \quad \{(57) \ \ ,, \ \ (6)\} \end{aligned}$$

mit $(5, 29, 46) = (30)$ kollinear.

B. Jetzt muß gezeigt werden, daß keine drei der Eckpunkte dieses Pascalsechsecks kollinear liegen. (Dies könnten wir wie in Nr. 7 bei $\overline{\Pi}_0$ zeigen. Zur Abwechslung hier noch eine andere Methode.) Es gibt bekanntlich $\binom{6}{3} = 20$ Eckpunktstripel

1. 1, 2, 4 *2.* 2, 4, 6	{(42)},	*11.* 4, 11, 13 *12.* 4, 13, 1	{(40)},
3. 4, 6, 11 *4.* 6, 11, 13	{(32)},	*13.* 6, 13, 1 *14.* 6, 1, 2	{(5)},
5. 11, 13, 1 *6.* 13, 1, 2	{(6)},	*15.* 11, 1, 2 *16.* 11, 2, 4	{(16)},
7. 1, 4, 6 *8.* 1, 6, 11	{(5)},	*17.* 13, 2, 4 *18.* 13, 4, 6	{(40)},
9. 2, 6, 11 *10.* 2, 11, 13	{(16)},	*19.* 1, 11, 4 *20.* 2, 6, 13	{(53)}, {(43)}.

Dann beweisen die in den geschweiften Klammern stehenden Spalten der Tafel $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ die Krummlage eines jeden Tripels.

C. Die weiteren zwei Punkte Q_1, Q_2 von $\overline{\Pi}_1$ können jetzt wieder nach der Konstruktionsvorschrift in Nr. 17 und analog wie die P_1, P_2 im § 10 konstruiert werden.

Nach A. ist in diesem Falle $j_1^{(0)} \equiv 29$ und durch $i_1 \equiv 1$ gehen die folgenden Geraden: (4), (5), (6), (7), (25), (52), (53), (54) [s. Tafel $\boldsymbol{S}(57/2/8)$], von denen $(5) = (1, 6)$, $(6) = (1, 13)$, $(7) = (1, 4)$, $(25) = (1, 2)$, $(53) = (1, 11)$ bereits wieder als Treffgeraden erkennbar sind. Daß außerdem die Gerade

$$(4) = (1, 12, 23, 32, 37, 43, 48, 54) \equiv t_1^{(1)}$$

Tangente von $\overline{\Pi}_1$ in 1 ist, erkennt man wieder aus den folgenden Entwicklungen.

Mithin können die beiden weiteren Punkte Q_1, Q_2 von $\overline{\Pi}_1$ nur auf (52) bzw. (54) liegen, die als Geraden g für die Durchführung der in Nr. 17 beschriebenen Konstruktion in Frage kommen.

a) Als Q_1 ergibt sich für $g \equiv (52)$:

$$\begin{aligned} (52 \times (4,\ 6) &= 53 && \{(52) \text{ und } (57)\}, \\ (2,\ 4) \times (29, 53) &= 19 && \{(42) \ ,, \ (28)\}, \\ Q_1 \equiv (11, 19) \times (52) &= 15 && \{(23) \ ,, \ (52)\}. \end{aligned}$$

b) Analog ergibt sich Q_2 für $g \equiv (54)$:

$$\begin{aligned} (54) \times (4,\ 6) &= 51 && \{(54) \text{ und } (57)\}, \\ (2,\ 4) \times (29, 51) &= 48 && \{(42) \ ,, \ (33)\}, \\ Q_2 \equiv (11, 48) \times (54) &= 16 && \{(39) \ ,, \ (54)\}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt auch für $\overline{\Pi}_1$ der Identitätssatz (Nr. 16), oder man könnte auch hier leicht explizit nachweisen, daß je sechs der Punkte von $\overline{\Pi}_1$ in allgemeiner Pascalscher Inzidenzanordnung sind.

D. Daß $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ für die Führung dieses Unabhängigkeitsbeweises Minimalsystem ist, folgt wieder daraus, daß erst in $\boldsymbol{S}(57/2/8)$ sämtliche Inzidenzaxiome erfüllt sind, wie im I. Kapitel dieser Arbeit nachgewiesen wurde.

Damit ist jetzt in bezug auf die Unabhängigkeit der angeführten Axiome des genannten Axiomensystems der reellen ebenen projektiven Geometrie eine abschließende, rein geometrische Lösung gegeben.

(Eingegangen am 17. Juni 1939.)

Über die Indexverschiebung beim Borelschen Limitierungsverfahren.

Von

J. Karamata in Beograd.

In der Note „Un théorème sur les procédés de sommabilité de Borel“ [1]) habe ich gezeigt, wie man durch die Methode, welche ich in der Arbeit „Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande“ [2]) verwendet habe, einen neuen Beweis des nachstehenden Satzes von V. Garten [3]) erhalten kann:

Aus

$$e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{s_\nu}{\nu!}\,x^\nu \to s, \qquad x \to \infty, \tag{1}$$

folgt

$$e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{s_{\nu+1}}{\nu!}\,x^\nu = e^{-x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{s_\nu}{(\nu-1)!}\,x^{\nu-1} \to s, \qquad x \to \infty, \tag{2}$$

falls für irgendein $k > 0$

$$s_n = O(n^k), \qquad n \to \infty,$$

ist.

Hier möchte ich zeigen, daß durch Anwendungen dieser Methode, mit geringen Änderungen, der Gartensche Satz sogar erweitert werden kann; es läßt sich nämlich der folgende Satz beweisen:

Beim B-Verfahren ist die Erhöhung des Index der Folge s_n *um* 1 *erlaubt* (*d. h. aus* (1) *folgt* (2)), *falls*

$$s_n = O(e^{n^\varrho}) \tag{3}$$

für ein $\varrho < \frac{1}{3}$ *gilt.*

Um dies zu zeigen sei

$$\frac{A}{(1-x)^{1+\frac{\delta}{2}}}\,e^{a(1-x)^{-\delta}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit

$$A = \sqrt{2\,a\,\delta\,(1+\delta)\,\pi} \quad \text{und} \quad a = \delta^\delta(1+\delta)^{-1-\delta}$$

[1]) Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade, VI—VII (1937), S. 204—208.

[2]) Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 156—160.

[3]) Über den Einfluß endlichvieler Änderungen auf das Borelsche Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **40** (1936), S. 756—759.

gesetzt, so daß für $0 < \delta \leqq 1$

$$c_n \sim e^{n^{\frac{\delta}{1+\delta}}}, \qquad n \to \infty, \tag{4}$$

ist.

Wird also

$$\varrho = \frac{\delta}{1+\delta} \quad \text{mit} \quad \delta < \frac{1}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \varrho < \frac{1}{3},$$

gesetzt, so ist die Voraussetzung (3) gleichbedeutend mit

$$s_n = O(c_n), \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

Sei weiter

$$g(z) = e^{-b/(1-z)^{2\delta}} \tag{6}$$

und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

gesetzt, dann bleibt, wenn die Bedingung (3) bzw. (5) erfüllt ist, die Funktion $g(z)\,f(z)$ im Kreise $|z - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$ beschränkt, sofern $\delta < \frac{1}{2}$ und $b > 2^{\delta} a/\cos \delta\pi$ ist. In der Tat ist wegen (5)

$$|g(z)f(z)| < \frac{A\,|1-z|}{(1-|z|)^{1+\frac{\delta}{2}}}\, e^{-bR\{(1-z)^{-2\delta}\} + a(1-|z|)^{-\delta}}. \tag{7}$$

Wenn man durch $z' = \frac{z}{1-z}$ die Kreisscheibe $|z - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$ auf die Halbebene $R(z') \geqq 0$ abbildet, so wird der Exponent auf der rechten Seite von (7):

$$\begin{aligned} &-bR\{(1-z)^{-2\delta}\} + a(1-|z|)^{-\delta} \\ &\qquad = -bR\{(1+z')^{2\delta}\} + a\left(|1+z'|\,\frac{|z'|+|1+z'|}{1+2R(z')}\right)^{\delta} \\ &\qquad < -bR\{(1+z')^{2\delta}\} + a|1+z'|^{2\delta}2^{\delta} = \\ &\qquad < -|1+z'|^{2\delta}\left[bR\left\{\left(\frac{1+z'}{1+\bar{z}'}\right)^{\delta}\right\} - 2^{\delta}a\right] = \\ &\qquad < -(b\cos\delta\theta - 2^{\delta}a)\,|1+z'|^{2\delta}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1+z'}{1+\bar{z}'} = e^{\theta i}$ gesetzt ist, so daß, weil $R(z') \geqq 0$ ist, $0 \leqq \theta < \pi$ ist.

Demnach ist

$$|g(z)f(z)| < A\,2^{1+\frac{\delta}{2}}\,|1+z'|^{1+\delta}\,e^{-(b\cos\delta\theta - 2^{\delta}a)|1+z'|^{2\delta}},$$

da

$$\frac{|1-z|}{(1-|z|)^{1+\frac{\delta}{2}}} \leqq 2^{1+\frac{\delta}{2}}\,|1+z'|^{1+\delta} \quad \text{für} \quad R(z') \geqq 0$$

ist, woraus die Behauptung folgt.

Nun können wir zum Beweis des angeführten Satzes übergehen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $s_0 = s_1 = 0$ angenommen werden. Nun werde

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} s_n z^n$$

mit $\frac{1}{2\pi} e^{\omega t i} g(z)$ (wobei $g(z)$ die Funktion (6) mit $\delta < \frac{1}{2}$ bedeutet) multipliziert, z in der Form

$$z = \frac{1}{1 + \varepsilon + i t}, \qquad \varepsilon > 0,$$

geschrieben, d. h. auf dem Kreise $\left| z - \frac{1}{2 + 2\varepsilon} \right| = \frac{1}{2 + 2\varepsilon}$ genommen, und von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert. Dann ist

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i} g(z) f(z)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i} z^n f(z)\, dt,$$

wenn dabei

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

gesetzt wird. Die Vertauschung von $\int$ mit Σ ist erlaubt, da die Reihe Σg_n sogar absolut konvergiert.

Wegen der Laplace-Poissonschen Formel

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\omega t i}}{(a + i t)^m} dt = e^{-a\omega} \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad \omega > 0, m \geqq 1, a > 0,$$

ist aber

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i} z^n f(z)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i} z^n \sum_{\nu=2}^{\infty} s_\nu z^\nu\, dt$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} s_\nu \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i} z^{n+\nu} dt$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} s_\nu \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\omega t i}}{(1 + \varepsilon + t i)^{n+\nu}} dt$$

$$= e^{-\varepsilon\omega} e^{-\omega} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{s_\nu}{(n + \nu - 1)!} \omega^{n+\nu-1},$$

wo ebenfalls $\int$ mit Σ vertauschbar ist, da die Integration im Innern des Kreises $|z| < 1$ verläuft.

Wird also

$$B(\omega) = e^{-\omega} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s_n}{(n-1)!}\, \omega^{n-1}$$

und

$$b_k(\omega) = e^{-\omega} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s_n}{(n+k)!}\, \omega^{n+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gesetzt, so folgt wegen (8) und (9):

$$e^{-\varepsilon\omega}\left\{g_0 B(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n b_n(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i}\, g(z)\, f(z)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i}\, g\left(\frac{1}{1+\varepsilon+it}\right) f\left(\frac{1}{1+\varepsilon+it}\right) dt.$$

Nun ist, wie gezeigt,

$$|g(z) f(z)| < M \quad \text{in} \quad |z - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{2},$$

d. h. für

$$z = \frac{1}{1+\varepsilon+it}, \qquad \varepsilon > 0,$$

so daß man in der vorstehenden Formel $\varepsilon \to 0$ rücken lassen kann. Daraus ergibt sich, daß

$$g_0 B(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n b_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i}\, g\left(\frac{1}{1+it}\right) f\left(\frac{1}{1+it}\right) dt$$

ist.

Wenn hier $\omega \to \infty$ geht, so strebt die rechte Seite als Fourierkonstante gegen Null, da $g\left(\frac{1}{1+it}\right) f\left(\frac{1}{1+it}\right)$ beschränkt und (wegen $s_0 = s_1 = 0$), in $(-\infty, +\infty)$ absolut integrierbar ist. Also strebt

$$g_0 B(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n b_n(\omega) \to 0 \qquad \text{für} \quad \omega \to \infty.$$

Aus der B-Limitierbarkeit der Folge s_n folgt aber, daß

$$|b_n(\omega)| < M \quad \text{und} \quad b_n(\omega) \to s, \qquad \omega \to \infty,$$

für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n b_n(\omega) \to s \sum_{n=1}^{\infty} g_n = -g_0 s, \qquad \omega \to \infty,$$

da $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ absolut konvergiert und $= 0$ ist.

Dies ergibt endlich, daß

$$g_0 B(\omega) \to g_0 s, \qquad \omega \to \infty,$$

woraus die Behauptung

$$B(\omega) = e^{-\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n+1}}{n!} \omega^n \to s, \qquad \omega \to \infty,$$

folgt, da

$$g_0 = e^{-b} \neq 0$$

ist.

Der eben bewiesene Satz kann noch, falls die Zahlenfolge s_n reell ist, dadurch erweitert werden, daß die Bedingung (3) durch die einseitige Bedingung

$$s_n > O(e^{n^\varrho}) \quad \text{mit} \quad \varrho < \tfrac{1}{3} \tag{10}$$

ersetzt wird.

In der Tat folgt aus (1) und (10), wenn c_n die Zahlenfolge (4) bedeutet, daß

$$\begin{aligned} M' &> e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} x^\nu = \\ &> e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu + M c_\nu}{\nu!} x^\nu - M e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu \\ &> e^{-x} \frac{s_n + M c_n}{n!} x^n - M e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu \\ &> \frac{e^{-x}}{n!} x^n s_n - M e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu, \end{aligned}$$

d. h.

$$s_n < M'' n! x^{-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu$$

ist.

Da aber

$$e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu \sim e^{x^\varrho}, \qquad x \to \infty,$$

ist, so folgt daraus, indem $x = n$ gesetzt wird, daß

$$s_n < O(\sqrt{n}\, e^{n^\varrho}), \qquad n \to \infty$$

ist.

Daraus folgt im Zusammenhang mit (10), daß auch die Bedingung (3) mit einem $\varrho < \frac{1}{3}$ erfüllt ist.

Die Bedingungen (3) und (10) können noch, wie unmittelbar ersichtlich ist, einer allgemeineren Bedingung untergeordnet werden, was zu folgendem Satze führt:

Beim B-Verfahren ist die Erhöhung des Index der zu limitierenden Folge s_n gestattet, d. h. aus

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n!}x_n \to s, \qquad x \to \infty,$$

folgt

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_{n+1}}{n!}x^n \to s, \qquad x \to \infty,$$

wenn sich die Zahlenfolge

$$e^{-n^{\delta}}s_n \quad \text{für ein} \quad \delta < \tfrac{1}{3}$$

im Winkelraume

$$0 \leqq \arg(z-a) \leqq \theta + \pi$$

befindet, d. h. in einem Winkelraume mit dem beliebigen, im endlichen liegenden Scheitelpunkt a und einer Öffnung $< \pi$.

Endlich möchte ich noch bemerken, daß die angegebene Beweismethode (außer vielleicht mit wesentlichen Änderungen), nicht einmal den Fall, daß

$$s_n = O(e^{n^{\frac{1}{3}}}), \qquad n \to \infty, \tag{11}$$

bleibt, in Angriff zu nehmen erlaubt.

Ist nämlich nur (11) erfüllt, d. h.

$$s_n = O(c_n). \qquad n \to \infty,$$

wobei die c_n jetzt durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(1-x)^{-\frac{3}{2}} e^{a(1-x)^{-\frac{1}{2}}}, \quad \text{mit} \quad A = \sqrt{\pi\sqrt{3}}, \quad a = \tfrac{2}{9}\sqrt{3}$$

definiert seien, so ist, da in diesem Falle

$$c_n \sim e^{n^{\frac{1}{3}}}, \qquad n \to \infty$$

ist,

$$|f(z)| = |\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n| < M(1-|z|)^{-\frac{3}{2}} e^{a(1-|z|)^{-\frac{1}{2}}} \tag{12}$$

das meiste, was man über $f(z)$ behaupten kann.

Sollte also in diesem Falle die vorstehende Methode anwendbar sein, so müßte eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $g(z)$ vorhanden sein derart, daß

$$|g(z)|(1-|z|)^{-\frac{5}{2}} e^{a(1-|z|)^{-\frac{1}{2}}} < M \tag{13}$$

im Kreise $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ bleibt. Wird diese Kreisscheibe durch $z' = \frac{z}{1-z}$ auf die Halbebene $R(z') \geqq 0$ abgebildet und

$$G(z') = g\left(\frac{z'}{1+z'}\right)$$

gesetzt, so geht (13) über in

$$|G(z')| < M(1-|z|)^{\frac{3}{2}} e^{-a\left(\frac{|1+z'|(|z'|+|1+z'|)}{1+2R(z')}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Daraus folgt aber, daß

$$G(z') \equiv 0$$

sein muß, da dies, nach einem Satz von Carlson, schon aus

$$|G(z')| < M e^{-a|z'|} \quad \text{für} \quad R(z') = 0$$

und

$$|G(z')| < M e^{A|z'|} \quad \text{für} \quad R(z') \geqq 0$$

gefolgert werden kann.

Es ergibt sich also, daß in diesem Falle die Funktion $g(z)$ mit den gewünschten Eigenschaften nicht vorhanden sein kann.

(Eingegangen am 19. April 1939.)

Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen.

Von

Hans Wittich, Göttingen.

I.

1. In dieser Arbeit wird diejenige Klasse einfach zusammenhängender, unendlich vielblättriger Riemannscher Flächen betrachtet, die nur über endlich vielen Punkten verzweigt, über allen anderen Punkten aber unverzweigt sind. Die Flächen denken wir uns über der w-Ebene ausgebreitet und bezeichnen sie durch $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$.

Nach dem Hauptsatz der konformen Abbildung existiert zu jeder Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ eine bis auf eine lineare Transformation bestimmte Funktion $z = z(w)$, die die Fläche schlicht und, abgesehen von algebraischen Windungspunkten, konform in einen Kreis $|z| < R \leqq \infty$ abbildet. Jm Anschluß an diese Existenzaussage erhebt sich die Frage: Welcher der beiden Fälle — Grenzkreisfall $|z| < R < \infty$ (Hyperbolischer Fall) oder Grenzpunktfall $|z| < \infty$ (Parabolischer Fall) — liegt bei einer gegebenen Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ vor? Je nachdem der Normalbereich $|z| < R < \infty$ oder $|z| < \infty$ ist, spricht man vom hyperbolischen oder parabolischen Typus der Fläche.

Eine Anzahl von Kriterien[1]), die in gewissen Fällen eine Entscheidung über die Zugehörigkeit der Fläche zum einen oder zum anderen Typus gestatten, sind bekannt. Die endgültige Lösung dieser in der Literatur als „Typenproblem" bezeichneten Aufgabe steht bislang noch aus. Ziel der folgenden Betrachtungen ist, ein hinreichendes Kriterium für das Eintreffen des Grenzpunktfalles zu gewinnen, das sich bei den Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ anwenden läßt.

Die Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ mit endlich vielen Grundpunkten gestatten nach R. Nevanlinna, A. Speiser und G. Elfving[2]) eine bequeme und übersichtliche Darstellung durch den Streckenkomplex S. Von diesem Hilfsmittel machen wir wesentlich Gebrauch. Die Verzweigungseigenschaften der gegebenen Fläche drücken sich bekanntlich durch bestimmte Eigenschaften des zugehörigen Streckenkomplexes[3]) aus. Durch eine passende Vorschrift wird für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein Teilkomplex $S(n)$ von S definiert. Wenn $\sigma(n)$

[1]) Vgl. L. Ahlfors [1], [2], [3]; Blanc, Kakutani, Kobayashi, R. Nevanlinna (besonders [4], Seite 296—312), Ullrich [2], [3] und Wittich.

[2]) R. Nevanlinna [1], [2]; Speiser [2]; Elfving [1].

[3]) Elfving [1] und R. Nevanlinna [4].

die Zahl der Randknoten von S (n) bedeutet, so werden wir zeigen, daß aus der Divergenz der Reihe $\sum_n \frac{1}{\sigma(n)}$ auf den parabolischen Typus der zu S gehörigen Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ geschlossen werden kann.

Der Beweis gründet sich auf ähnliche Überlegungen, wie sie zum Beweis eines Satzes von R. Nevanlinna und L. Ahlfors [4]) benutzt werden. In II werden die erforderlichen Hilfsbetrachtungen durchgeführt. III bringt den Beweis des Satzes. Dazu wird der bekannte Übergang von einem Linienintegral über die lineare Verzerrung $|f'(z)|$ zu einem Doppelintegral über die flächenhafte Verzerrung $|f'(z)|^2$ benutzt. Diesen Übergang vermittelt die Schwarzsche Ungleichung. In IV werden einige Beispiele behandelt. Es zeigt sich, daß eine Reihe von bereits bekannten Ergebnissen in unserem Resultat enthalten sind.

Herr Prof. R. Nevanlinna sprach das genannte Ergebnis als eine Vermutung aus, nachdem er eine erste Ausarbeitung meines im Herbst 1936 auf der Jahresversammlung der D. M. V. in Bad Salzbrunn gehaltenen Vortrages [5]) gelesen hatte. Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. R. Nevanlinna danken für alle seine Ratschläge und Anregungen zu weiteren Arbeiten, die er mir während seines einjährigen Aufenthaltes als Gastprofessor an der Universität Göttingen zuteil werden lies.

Fig. 1.

2. Die in 1. gemachte Voraussetzung, $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ sei stets eine unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche, bedeutet keinerlei Einschränkung. Man weiß nämlich, daß jede einfach zusammenhängende endlich vielblättrige Riemannsche Fläche sich immer in die Vollebene abbilden läßt; sie gehört also zum elliptischen Typus. Weiter dürfen wir voraussetzen, daß die endliche Anzahl q der Grundpunkte $w = a_\varkappa$ stets $\geqq 3$ ist. $q = 1$ ist unmöglich. Im Falle $q = 2$ ist die durch den nebenstehenden Streckenkomplex (Fig. 1) dargestellte unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche die einzig mögliche. Über den Grundpunkten $w = a_1, a_2$ liegen je ein logarithmischer Windungspunkt, aber keine schlichten Blätter. Eine solche Fläche wird durch die Funktion $z = \log \frac{w - a_1}{w - a_2}$ schlicht und konform in die bei $z = \infty$ punktierte Ebene abgebildet, gehört also zum parabolischen Typus.

Weiter dürfen wir annehmen, daß die q Grundpunkte $w = a_\varkappa$ mit den Punkten $w = e^{i 2\pi \varkappa/q}$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, q$, zusammenfallen. Daß eine solche spezielle Wahl der Grundpunkte $w = a_\varkappa$ gestattet ist, ergibt sich aus den beiden folgenden Hilfssätzen [6]).

---

[4]) R. Nevanlinna [4], Seite 306.

[5]) Wittich [2].

[6]) Teichmüller [1]; Hilfssatz 2 gilt unter allgemeineren Voraussetzungen, vgl. dazu Kakutani [1].

Hilfssatz 1. Zwei Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ und $\mathfrak{W}(a'_\varkappa)$ mit topologisch gleichem Streckenkomplex kann man stets quasikonform aufeinander abbilden.

Hilfssatz 2. Bei quasikonformen Abbildungen bleibt der Typus der Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ invariant.

Beide Hilfssätze zusammen ergeben, daß zwei Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ und $\mathfrak{W}(e^{i2\pi\varkappa/q})$ mit topologisch gleichem Streckenkomplex stets vom gleichen Typus sind.

Man kann den folgenden Beweis auch ohne Benutzung dieser Hilfssätze durchführen. Dann treten aber in den Rechnungen einige Kompliziertheiten auf, die man bei Heranziehung der genannten Hilfssätze gerade umgehen kann.

II.

1. Nach den in I genannten Hilfssätzen genügt es, diejenigen Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ zu betrachten, deren Verzweigungspunkte über den Grundpunkten $a_\varkappa = e^{2\pi i\varkappa/q}$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, q$, liegen. Als Zerschneidungskurve $\mathfrak{c}$ wird zweckmäßigerweise der Kreis $|w| = 1$ gewählt; mit $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ sind die Gebiete $|w| < 1$ und $|w| > 1$ gemeint. Weiter ist es vorteilhaft, als Repräsentanten von $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ die Punkte $w_i = 0$ und $w_a = \infty$ zu nehmen. Die Flächenpunkte über w_i und w_a heißen Knotenpunkte; die über $\gamma_\varkappa$: $\arg w = \frac{\pi}{q}(2\varkappa - 1)$ gelegenen Halbstrahlen auf der Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ nennt man Gliedkurven. Bei konformer Abbildung von $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ durch die bis auf eine lineare Transformation bestimmte Funktion $z = z(w)$ in ein schlichtes Normalgebiet $\mathfrak{D}_z$: $|z| < R \leqq \infty$ erhält man als Bilder der Gliedkurven und Knotenpunkte ein in $\mathfrak{D}_z$ gelegenes Kurvensystem S. Die Bilder der Knotenpunkte bzw. Gliedkurven heißen Knoten bzw. Glieder oder Strecken. Ein Knoten heißt Innenknoten oder Außenknoten, je nachdem er Bild eines Knotenpunktes über $w_i = 0$ oder $w_a = \infty$ ist. Das z-Bild einer jeden Gliedkurve über $\gamma_\varkappa$ wird mit $\varkappa$ bezeichnet. Jedem Glied des Systems S ist also genau eine Zahl $\varkappa$ aus der Folge $1, 2, \ldots, q$ zugeordnet. Bekanntlich [7]) hat das Kurvensystem S die folgenden Eigenschaften:

S besteht aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl von Strecken oder einfachen Streckenzügen. Die Strecken sind bis auf ihre Endpunkte untereinander punktfremd.

Jede Strecke hat einen Innen- und einen Außenknoten als Endpunkte. In jedem Knoten stoßen q Glieder zusammen. Sie erscheinen bei positivem Umlauf um einen Innen- und bei negativem Umlauf um einen Außenknoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots, q-1, q$.

---

[7]) Für diesen ganzen Abschnitt vgl. man Elfving [1].

Aus der Voraussetzung, $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ ist eine offene einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, schließt man auf die zusätzlichen Eigenschaften:

S besteht aus einer abzählbar unendlichen Anzahl von Strecken oder einfachen Streckenzügen. Es gibt in S keine einfache geschlossene Gliedfolge, die zwei unendliche Mengen von Knoten trennt.

Es ist möglich, daß μ Glieder dieselben Innen- und Außenknoten als Endpunkte haben. Diese Glieder mit gleichen Innen- und Außenknoten als Endpunkte bilden ein „Bündel". Wir verwenden im folgenden die Bezeichnung „Bündel" in dem Sinne, daß auch der Fall $\mu = 1$ mit einbegriffen ist.

Das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{D}_z$ kann in jedem Falle durch eine topologische Abbildung $z \to z'$ in das Gebiet $|z'| < \infty$ abgebildet werden. Aus S entsteht ein Kurvensystem S', das ebenfalls die angegebenen Eigenschaften hat. Wir nennen sowohl S als auch S' den zur Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ und der Zerschneidungskurve $\mathfrak{c}$ gehörigen Streckenkomplex q-ter Ordnung. Die genauere Bezeichnung „einfach zusammenhängender Streckenkomplex q-ter Ordnung" gebrauchen wir hier nicht, weil nur einfach zusammenhängende Flächen betrachtet werden und Verwechselungen daher nicht vorkommen können.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch das Ergebnis:

Zu jedem (einfach zusammenhängenden) Streckenkomplex q-ter Ordnung, gegebenen Grundpunkten $w = a_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, q$, und gegebener Zerschneidungskurve $\mathfrak{c}$ gibt es stets eine wohlbestimmte einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$, die nur über den gegebenen Grundpunkten $w = a_\varkappa$ verzweigt ist.

Für die nun folgenden Betrachtungen legen wir den Streckenkomplex S', der auch durch schlichte topologische Abbildung der Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ in $|z| < \infty$ erzeugt werden kann, zugrunde. Wir dürfen annehmen, daß der einzige Häufungspunkt der Knoten und der Glieder $\varkappa$ der Punkt $z = \infty$ ist. Weiter können wir voraussetzen, daß in $z = 0$ ein Innenknoten des Streckenkomplexes liegt; wir nennen ihn 0-Knoten und bezeichnen ihn mit k_0^1.

2. Von dem Nullknoten des Streckenkomplexes S (der Einfachheit wegen schreiben wir bis auf weiteres statt S' einfach S) gehen p_1 Bündel aus. Offenbar gilt $2 \leqq p_1 \leqq q$; $p_1 = q$ bedeutet, daß jedes Bündel nur aus einem Glied besteht. Jedes Bündel hat als zweiten Endpunkt einen Außenknoten; die Bündel nennen wir 1-Bündel, die zugehörigen Außenknoten 1-Knoten. Unter den p_1-Bündeln gibt es genau eins, das die Strecke 1 enthält bzw. von der Strecke 1 gebildet wird. Dieses Bündel bezeichnen wir mit b_1^1, den zugeordneten 1-Knoten mit k_1^1. Von b_1^1 ausgehend gelangt man bei Umlauf um k_0^1 in mathematisch positivem Sinne zu einer Anordnung aller 1-Bündel und 1-Knoten in der Form: $b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{p_1}^1$ und $k_1^1, k_2^1, \ldots, k_{p_1}^1$. Man bemerkt, daß danach demselben 1-Knoten sehr wohl zwei oder mehr verschiedene

Bezeichnungen k_j^1 zukommen können. Der nebenstehende Streckenkomplex (Fig. 2) zeigt diese Verhältnisse.

Es seien nun k_j^1 und k_{j+1}^1 zwei ganz beliebige verschiedene, im Sinne der gegebenen Anordnung aufeinanderfolgende Knoten. Die zugehörigen Bündel b_j^1 und b_{j+1}^1 gehen von dem Knoten k_1^0 aus. Falls $p_1 \geqq 3$ ist, liegen k_j^1 und k_{j+1}^1 auf dem Rande eines wohlbestimmten logarithmischen oder algebraischen Elementargebietes E. Die beiden 1-Knoten k_j^1 und k_{j+1}^1 verbinden wir in E durch genau einen Jordanbogen Γ_j^1 mit folgenden Eigenschaften: Γ_j^1 verläuft vollständig in E und trifft S nur in den Endpunkten k_j^1 und k_{j+1}^1. Er bildet zusammen mit je einem bestimmten Außenglied der Bündel b_j^1 und b_{j+1}^1 ein einfach zusammenhängendes endliches Gebiet, das keine Knoten und Glieder im Innern enthält und auf dessen Rande nur die Knoten k_1^0, k_j^1 und k_{j+1}^1 liegen. Eine solche Kurve Γ_j^1 läßt sich sicher angeben. Sie ist durch diese Eigenschaften nicht eindeutig bestimmt. Von allen zulässigen Verbindungskurven zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten soll hier und im folgenden stets nur eine berücksichtigt werden.

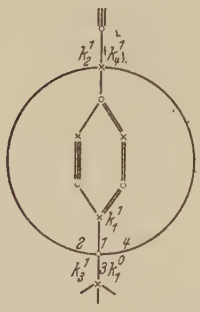


Fig. 2.

In dem ausgeschlossenen Falle $p_1 = 2$ gehen von k_1^0 zwei Bündel aus, die zu den Knoten k_1^1 und k_2^1 führen. Die Knoten k_1^1, k_1^0 und k_2^1 sind dann gemeinsame Randknoten zweier Elementargebiete E_1 und E_2. Dabei bezeichnen wir mit E_1 dasjenige Elementargebiet, das bei Bewegung in der Richtung k_1^1, k_1^0, k_2^1 auf S zur Rechten liegt. In E_1 und E_2 lassen sich sofort zulässige Jordanbögen Γ_1^1 und Γ_2^1 mit den geforderten Eigenschaften angeben. Die allgemein für alle j vorhandenen Bögen Γ_j^1 fügen sich offenbar zu einer geschlossenen Kurve Γ_1 zusammen, der durch die festgelegte Anordnung der 1-Knoten $k_1^1, \ldots, k_{p_1}^1$ ein bestimmter Durchlaufungssinn aufgeprägt ist. Γ_1 braucht keine Jordankurve zu sein; die allenfalls auftretenden Kurvenpunkte höherer Ordnung auf Γ_1 können aber nur in den 1-Knoten liegen. Man bemerkt, daß sich im allgemeinsten Falle Γ_1 aus einer endlichen Anzahl von Jordankurven zusammensetzt. Durch passend gewählte Schnitte in den mehrfachen Punkten zerfällt Γ_1 in endlich viele Jordankurven (geschlossene Zweige oder kurz Zweige).

Wir behaupten nun: Das Sytem Γ_1 enthält einen geschlossenen Zweig Γ_1^0, der $z = 0$ von $z = \infty$ trennt; jeder nicht auf Γ_1^0 gelegene 1-Knoten wird durch diesen Zweig ebenfalls von $z = \infty$ getrennt. Zum Nachweis nehmen wir eine Klasseneinteilung der 1-Bündel b_j^1 vor. Zur ersten Klasse K_1 gehören alle Bündel b_μ^1, die sich von $z = \infty$ längs eines Weges erreichen lassen, ohne daß ein 1-Bündel zu überschritten werden braucht. Zur zweiten Klasse K_2 gehören alle anderen 1-Bündel b_ν^1, die diese Eigenschaft nicht besitzen. Offen-

bar gehört jedes 1-Bündel b_j^1 genau zu einer dieser Klassen. Wir nehmen zunächst an, daß K_2 nicht leer ist; für K_1 ist diese Voraussetzung von selber erfüllt. Von k_1^1 ausgehend kommt man bei Umlauf um k_1^0 in mathematisch positivem Sinne zu einer Anordnung aller Bündel aus K_1. Diese Anordnung bedeutet gleichzeitig eine solche der zu diesen Bündeln gehörigen 1-Knoten; die in dieser Weise geordneten Knoten werden mit $P_1, P_2, \ldots, P_r$ bezeichnet, wobei wir $r > 1$ voraussetzen. Die Bündel aus K_1 ordnen jedem P_n zwei Bezeichnungen $k_{\mu_n}^1$ und $k_{\mu_n'}^1$ zu; dabei kann auch $\mu_n = \mu_n'$ sein. Weiter gilt $\mu_{n+1} = \mu_n' + 1$. Nach Konstruktion ist nun $k_{\mu_n'}^1$ mit $k_{\mu_{n+1}}^1$ durch genau einen Jordanbogen $\Gamma_{\mu_n'}^1$ verbunden. Die $r+1$ Bögen $\Gamma_{\mu_n'}^1$, $n = 1, 2, \ldots, r$, bilden zusammen eine Jordankurve Γ_1^0, die $z = 0$ von $z = \infty$ trennt. Weiter bemerkt man, daß außerhalb Γ_1^0 kein 1-Knoten liegen kann. Damit sind für $r > 1$ die Behauptungen bewiesen. Die Annahme $r = 1$ gestattet Folgerungen, die mit den auf S. 644 angegebenen Eigenschaften des Streckenkomplexes nicht verträglich sind. Da weiter $r = 0$ ebenfalls unmöglich ist, muß $r > 1$ sein. Gehören schließlich schon alle 1-Bündel zu K_1, ist also K_2 leer, dann erschließt man ohne Mühe die Richtigkeit der Behauptungen aus der Konstruktion. Dann ist $\Gamma_1^0 = \Gamma_1$; Γ_1 besteht also aus genau einem geschlossenen Zweig.

Durch die Konstruktion ist Γ_1 und damit auch Γ_1^0 ein bestimmter Richtungssinn aufgeprägt worden. Bei Bewegung auf Γ_1^0 in der Richtung $P_1, P_2, \ldots, P_r, P_1$ liegt der Punkt $z = 0$ zur Linken; Γ_1^0 wird also in mathematisch positivem Sinne durchlaufen. Aus der Antithese folgert man nämlich Eigenschaften des Streckenkomplexes, die den angegebenen widersprechen.

Es sei nun Γ_1' ein beliebiger der von Γ_1^0 verschiedenen Zweige von Γ_1. Da nach Konstruktion k_j^1 und k_{j+1}^1 (falls sie verschiedene 1-Knoten bedeuten) stets durch einen Jordanbogen verbunden sind, muß Γ_1' in mindestens einem 1-Knoten mit $\Gamma_1 - \Gamma_1'$ zusammenhängen; keiner der Zweige Γ_1' kann also isoliert liegen. Auf Γ_1' ist ein bestimmter Richtungssinn festgelegt. Man zeigt, daß bei Umlauf auf Γ_1' in der aufgeprägten Richtung $z = 0$ zur Linken liegt.

Die Kurve Γ_1 berandet ein endliches zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{D}$, das $z = \infty$ nicht enthält. Der einzige Knoten des Streckenkomplexes, der in $\mathfrak{D}$ liegt, ist der 0-Knoten k_1^0. Falls also links von Γ_1^0 noch Knoten liegen — solche Fälle kommen tatsächlich vor, wie man an Hand von Beispielen sofort zeigen kann — dann können diese nur in den von den Zweigen Γ_1' umschlossenen endlichen Gebieten liegen.

Von Γ_1 ausgehend läßt sich nun die Konstruktion, abgesehen von einigen gleich zu besprechenden geringfügigen Änderungen, in entsprechender Weise

fortsetzen. Bei diesem zweiten Schritt werden endlich viele neue Bündel und Knoten erfaßt. Wir nennen sie 2-Bündel bzw. 2-Knoten und bezeichnen sie mit b_j^2 bzw. k_j^2. Man erhält ein System Γ_2, das im wesentlichen dieselben Eigenschaften hat wie Γ_1. Dann legt man Γ_2 zugrunde und gewinnt durch einen weiteren Schritt die 3-Bündel, b_j^3, die 3-Knoten k_j^3 und ein Kurvensystem Γ_3 usw.

3. Um nun allgemein gültige Aussagen über die Struktur der Systeme $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ zu gewinnen, nehmen wir an, daß n-malige sukzessive Wiederholung der Konstruktion i-Bündel, i-Knoten und Kurvensysteme Γ_i, $i \leqq n$, mit folgenden Eigenschaften ergeben hätte:

a) Das Kurvensystem Γ_i wird von einer endlichen Anzahl Jordankurven gebildet; einzelne dieser geschlossenen Zweige dürfen isoliert liegen. Auf Γ_i liegen alle i-Knoten und nur diese Knoten. Auf jedem geschlossenen Zweig von Γ_i liegen mindestens zwei verschiedene i-Knoten. Ein von den i-Knoten verschiedener Punkt auf Γ_i ist nie mehrfacher Punkt des Systems Γ_i. Zu Γ_i gehört ein geschlossener Zweig Γ_i^0, der Γ_{i-1} von $z = \infty$ trennt; er umschließt alle anderen Zweige von Γ_i (d. h. jeder andere Zweig Γ_i' liegt in jenem von Γ_i^0 berandeten Gebiet, das $z = 0$ enthält).

b) Auf Γ_i ist (durch die Konstruktion) für jeden Zweig ein Umlaufsinn festgelegt: Wird ein beliebiger der geschlossenen Zweige Γ_i' oder Γ_i^0 in der festgelegten Richtung durchlaufen, so liegt $z = 0$ zur Linken.

c) Das System Γ_i umschließt ein endliches zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{D}_i$, das bei Umlauf auf Γ_i in der nach b) festgelegten Richtung zur Linken liegt. Durch die i ersten Schritte ist jedem Knoten in $\mathfrak{D}_i$ mindestens eine Bezeichnung k_j^ν zugeordnet worden. Zu jedem Knoten in $\mathfrak{D}_i$ gehört eine und nur eine Zahl ν, d. h. ein Knoten in $\mathfrak{D}_i$ kann bei $\nu \neq \nu'$ nicht zugleich ν-Knoten und ν'-Knoten sein. Dabei ist $0 \leqq \nu < i$.

Offenbar hat Γ_1 die in a), b), c) ausgesprochenen Eigenschaften.

Wir führen nun den $(n+1)$-ten Konstruktionsschritt durch und zeigen, daß er zu einem Kurvensystem Γ_{n+1} mit den genannten Eigenschaften führt. Dabei können wir uns meist auf Andeutungen beschränken, weil gegenüber dem ersten Schritt keine wesentlichen Änderungen eintreten.

Zunächst betrachten wir den Zweig Γ_n^0; G_∞ bezeichne das von Γ_n^0 berandete Gebiet mit $z = \infty$ als innerem Punkt, G_0 das Komplementärgebiet. Von den $r \geqq 2$ n-Knoten auf Γ_n^0 wird ein beliebiger ausgewählt und mit k_1^n bezeichnet. Danach gewinnt man bei Umlauf auf Γ_n^0 (in der durch b) festgelegten Richtung) eine Anordnung aller auf Γ_n^0 liegenden Knoten in der Form: $k_1^n, k_2^n, \ldots, k_r^n$. Von k_1^n ausgehend trifft man bei der genannten Bewegung auf Γ_n^0 auf ein erstes Bündel b_1^{n+1}, das von einem Knoten k_i^n, $i \geqq 1$, aus in das Gebiet G_∞ hineinragt. Nach Festlegung dieses Anfangsbündels ergibt sich dann wie

früher eine eindeutige Anordnung $b_1^{n+1}, b_2^{n+1}, \ldots, b_p^{n+1}$ aller Bündel, die von den n-Knoten k_j^n ausgehen und in G_∞ liegen. Zu diesen Bündeln gehören als zweite Endpunkte die Knoten $k_1^{n+1}, k_2^{n+1}, \ldots, k_p^{n+1}$. Da nach a) in G_∞ keine ν-Knoten $\nu \leqq n$ liegen, sind diese Knoten k_j^{n+1} bei keinem der n ersten Konstruktionsschritte erfaßt worden. Die Bündel b_j^{n+1} bzw. Knoten k_j^{n+1} heißen $(n+1)$-Bündel bzw. $(n+1)$-Knoten. Genau wie früher können demselben $(n+1)$-Knoten zwei oder mehr verschiedene Bezeichnungen $k_j^{n+1}, k_{j'}^{n+1}, \ldots, j \neq j' \neq j'' \neq \ldots$, zugeordnet sein. In G_∞ müssen mindestens zwei verschiedene $(n+1)$-Knoten liegen; die gegenteilige Annahme führt nämlich zu der Folgerung, daß schon alle Knoten in G_0 liegen. Das ist aber, da S unendlich viele Knoten besitzt, die sich nur in $z = \infty$ häufen, unmöglich. Danach muß auch $p \geqq 2$ sein.

Es seien nun k_j^{n+1} und k_{j+1}^{n+1} zwei verschiedene beliebige aufeinanderfolgende Knoten mit den zugehörigen Bündeln b_j^{n+1} und b_{j+1}^{n+1}. Diese Bündel gehen entweder von demselben Knoten k_i^n oder von zwei verschiedenen Knoten k_i^n und $k_{i'}^n$ aus, wobei aber jetzt nicht immer $i' = i+1$ zu gelten braucht. Im ersten Falle werden die Jordanbögen Γ_j^{n+1}, die k_j^{n+1} mit k_{j+1}^{n+1} verbinden, genau wie früher bestimmt. Dabei kann man erreichen, daß Γ_j^{n+1} mit keinem der Systeme Γ_i einen Punkt gemeinsam hat. Im zweiten Falle verfahren wir so: Es bezeichne $\Gamma_n^0(k_i^n, k_{i'}^n)$ denjenigen Teilbogen von Γ_n^0, der bei Bewegung auf Γ_n^0 von k_i^n nach $k_{i'}^n$ in der festgelegten Richtung durchlaufen wird. Dieser Bogen fällt in das Innere eines Elementargebietes E, auf dessen Rande die Knoten k_j^{n+1} und k_{j+1}^{n+1} liegen. Nun wählen wir als Verbindungslinie dieser beiden $(n+1)$-Knoten einen vollständig in E gelegenen Jordanbogen Γ_{j+1}^{n+1}, der S nur in k_j^{n+1} und k_{j+1}^{n+1} trifft, keines der Kurvensysteme Γ_i in einem Punkte schneidet und der zusammen mit je einem bestimmten Außenglied von b_j^{n+1}, b_{j+1}^{n+1} und mit der Kurve $\Gamma_n^0(k_i^n, k_{i'}^n)$ ein endliches einfach zusammenhängendes Gebiet umschließt, das keine Knoten zu inneren Punkten hat und auf dessen Rande nur die Knoten $k_i^n, k_{i'}^n, k_{j+1}^{n+1}, k_j^{n+1}$ liegen. In beiden Fällen kann man für alle j eine solche Verbindungskurve Γ_j^{n+1} mit den geforderten Eigenschaften angeben. Diese Bögen bilden zusammen eine geschlossene Kurve $\overline{\Gamma}_{n+1}$; sie braucht nicht frei von Kurvenpunkten höherer Ordnung zu sein. Da jedes Teilstück Γ_j^{n+1} von $\overline{\Gamma}_{n+1}$ ein Jordanbogen ist, kann ein Kurvenpunkt, der nicht gerade $(n+1)$-Knoten ist, nie ein mehrfacher Punkt auf der Kurve sein. $\overline{\Gamma}_{n+1}$ kann aus endlich vielen Jordankurven (Zweigen) zusammengesetzt werden; keiner dieser Zweige liegt vollständig getrennt von den anderen Zweigen. Der gegebenen Anordnung der $(n+1)$-Knoten zufolge, liegen alle $(n+1)$-Knoten in G_∞ auf $\overline{\Gamma}_{n+1}$; das sind aber auch die einzigen Knoten des Streckenkomplexes S auf $\overline{\Gamma}_{n+1}$. Genau wie früher zeigt man die Existenz eines ge-

schlossenen Zweiges Γ_{n+1}^0 mit den in a) genannten Eigenschaften. Das von Γ_n^0 und $\overline{\Gamma}_{n+1}$ umschlossene endliche Gebiet ist nach Konstruktion frei von Knoten. Jeder Zweig von $\overline{\Gamma}_{n+1}$ hat auch die in b) genannten Eigenschaften. Entsprechende Antithesen führen nämlich zu Folgerungen, die den bekannten Eigenschaften von S widersprechen. Schließlich bemerkt man noch, daß die Wahl des Knotens k_1^n auf Γ_n^0 für die Konstruktion von $\overline{\Gamma}_{n+1}$ ganz belanglos ist. Bei einer anderen Wahl des Bezugsknotens kommt man zu derselben Kurve $\overline{\Gamma}_{n+1}$.

Wir betrachten jetzt einen beliebigen der Zweige Γ_n'. Er umschließt ein endliches einfach zusammenhängendes Gebiet G_n'. Falls in G_0 Knoten existieren, die bei den n ersten Schritten noch nicht erfaßt sind, können sie, den Voraussetzungen gemäß, nur in den Gebieten G_n' liegen. Danach brauchen wir also nur diejenigen Gebiete G_n' zu berücksichtigen, die solche Knoten enthalten. Es sei jetzt G_n' ein beliebiges Gebiet mit diesen Eigenschaften. Nach Wahl eines Knotens k_1^n auf Γ_n' gewinnt man, bei Berücksichtigung des nach b) auf Γ_n' festgelegten Richtungssinnes, eine Anordnung aller n-Knoten auf Γ_n': $k_1^n, k_2^n, \ldots, k_r^n$, wobei $r \geqq 2$ ist. Daraus entspringt dann eine entsprechende Anordnung aller zugehörigen $(n+1)$-Bündel bzw. $(n+1)$-Knoten in der Form: $b_1^{n+1}, b_2^{n+1}, \ldots, b_p^{n+1}$ bzw. $k_1^{n+1}, k_2^{n+1}, \ldots, k_p^{n+1}$. Die Zahlen r und p brauchen natürlich nicht mit den für Γ_n^0 und $\overline{\Gamma}_{n+1}$ gefundenen übereinzustimmen. Wenn in G_n' nur ein $(n+1)$-Knoten liegt, sind wir schon fertig; G_n' enthalte also mindestens zwei verschiedene $(n+1)$-Knoten. Dann werden die Verbindungslinien zwischen zwei aufeinanderfolgenden (verschiedenen) Knoten k_j^{n+1} und k_{j+1}^{n+1} genau wie oben gewählt. Diese einzelnen Jordanbögen ergeben zusammen eine geschlossene Kurve $\overline{\Gamma}_{n+1}'$, die durch passend gewählte Schnitte in den mehrfach zu zählenden Kurvenpunkten ($(n+1)$-Knoten auf $\overline{\Gamma}_{n+1}'$) in endlich viele Jordankurven zerfällt. Offenbar ist die Wahl des Knotens k_1^n wieder ohne Einfluß auf den Verlauf von $\overline{\Gamma}_{n+1}'$.

Nun zeigt man, daß auch jeder geschlossene Zweig von $\overline{\Gamma}_{n+1}'$ die in a) und b) ausgesprochenen Eigenschaften hat. Γ_n' und $\overline{\Gamma}_{n+1}'$ beranden ein endliches zusammenhängendes Gebiet, das, wegen der Wahl der Verbindungskurven zwischen den $(n+1)$-Knoten, keine Knoten zu inneren Punkten haben kann.

Bei diesem Konstruktionsschritt sind *alle* $(n+1)$-Knoten erfaßt worden, d. h. *alle noch nicht abgezählten* Knoten, die Endpunkte gewisser, von den n-Knoten ausgehender Bündel sind. Solche Knoten können nämlich nur in den Gebieten G_∞ und G_n' liegen; sie sind daher als Endpunkte der von den n-Knoten k_i^n ausgehenden und in G_∞ bzw. G_n' gelegenen Bündel b_j^{n+1} im Verlaufe des $(n+1)$-ten Schrittes mindestens einmal von gewissen der n-Knoten

aus erreicht worden. Jedem dieser Knoten wird also die Zahl $\nu = n + 1$ und nur diese zugeordnet. Die Indizes j in den Bezeichnungen k_j^{n+1} können natürlich für denselben $(n + 1)$-Knoten verschiedene sein. Auf dem aus Γ_{n+1}^0 und allen Γ_{n+1}' gebildeten Kurvensystem Γ_{n+1} liegen also alle $(n + 1)$-Knoten und nur diese. Das System Γ_{n+1} umschließt wieder ein endliches zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{D}_{n+1}$. Daß alle in $\mathfrak{D}_{n+1}$ gelegenen Knoten die in c) ausgesprochenen Eigenschaften besitzen, ist klar. Man zeigt weiter, daß *jeder* Knoten von S schließlich einmal eine oder mehrere Bezeichnungen k_j^n mit gleichem n aber möglicherweise verschiedenen j erhält, wenn man nur die Konstruktion genügend oft wiederholt.

Da jeder Knoten von S ein Halbblatt $\mathfrak{Z}$ oder $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ vertritt, entspricht der Knotenanordnung eine gewisse Anordnung der Halbblätter auf der Fläche: Dem Knoten k_1^0 entspricht ein Halbblatt $\mathfrak{Z}$; es heißt die nullte Generation. Diejenigen Halbblätter, die mit diesem Halbblatt über gewisse Bögen von $\mathfrak{c}$ verheftet sind, heißen die erste Generation. Zur $(n + 1)$-ten Generation gehören alle Halbblätter, die mit solchen der n-ten Generation zusammenhängen und nicht schon niedrigeren Generationen angehören. Entsprechend den Beziehungen zwischen S und $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ wollen wir jetzt auch sagen: Die n-Knoten gehören zur n-ten Generation, oder ein Knoten k_j^n besitzt die Generationszahl n. Die generationsweise Ausschöpfung der Knoten von S bedeutet eine kranzförmige Ausschöpfung der Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ durch die Halbblätter $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{A}$.

4. Es ist nun von Vorteil, sich kurz einen Überblick über den Verlauf der einzelnen Bögen von Γ_i in den Elementargebieten zu verschaffen. Die regulären Elementargebiete brauchen wir dabei nicht zu betrachten. In diese Gebiete dringt kein Bogen von Γ_i ein.

E_l sei ein beliebiges logarithmisches Elementargebiet. Wir dürfen annehmen, daß sein Rand e_l mit der reellen Achse und sein Inneres etwa mit der oberen z-Halbebene zusammenfällt. Auf e_l gibt es stets einen oder mehrere (aber endlich viele) Knoten mit kleinster Generationszahl n_0 und stets Knoten mit beliebig großer Generationszahl n. Nach Konstruktion verläuft kein Bogen von Γ_{n_0-1} in E_l. Γ_{n_0} hat also mit E_l keinen inneren Punkt gemeinsam, sondern geht nur durch die n_0-Knoten auf e_l. Wir behaupten: Alle n_0-Knoten auf e_l gehören dem geschlossenen Zweig Γ_{n_0} des Systems Γ_{n_0} an. Wäre das nicht der Fall, dann gäbe es mindestens einen n_0-Knoten P auf e_l, der diese Eigenschaft nicht hat. Nach a) ist dann P ein innerer Punkt des von $\Gamma_{n_0}^0$ umschlossenen Gebietes G_0; jeder Jordanbogen, der P mit $z = \infty$ verbindet, schneidet also $\Gamma_{n_0}^0$. Andererseits gibt es aber, da $\Gamma_{n_0}^0$ nicht in E_l eindringt, in E_l ein Jordanbogen, der P mit $z = \infty$ verbindet und Γ_{n_0}, also auch $\Gamma_{n_0}^0$, nirgends schneidet. Das ist aber ein Widerspruch; jeder der n_0-Knoten auf e_l muß also auf $\Gamma_{n_0}^0$ liegen. Der $(n_0 + 1)$-te

Schritt der Konstruktion führt zu endlich vielen (n_0+1)-Knoten auf e_l: sie seien $P_1, P_2, \ldots, P_r$, wobei dieser Numerierung etwa die Richtung der negativ reellen z-Achse zugrunde gelegt ist. Da auf e_l mindestens ein n_0-Knoten liegt, muß $r \geqq 2$ sein. Je zwei (in diesem Sinne) aufeinanderfolgende Knoten P_j und P_{j+1}, $1 \leqq j \leqq r-1$, bilden auf e_l ein endliches Intervall Δ_j, das mindestens einen Knoten enthält. Nun zeigen die Konstruktionsvorschriften, daß P_j und P_{j+1} dann und nur dann durch einen in E_l gelegenen Jordanbogen von Γ_{n_0+1} verbunden sein können, wenn es auf Δ_j nur Knoten mit Generationszahlen $\leqq n_0+1$ gibt; das bedeutet im vorliegenden Falle, daß in Δ_j nur ein n_0-Knoten liegt. Alle Knoten P_j auf e_l sind auch wieder Punkte von $\Gamma^0_{n_0+1}$. Durch Induktionsschluß überzeugt man sich davon, daß alle n-Knoten, $n = (n_0 + n')$, $n' > 1$, auf e_l die entsprechenden Eigenschaften besitzen. Da E_l ganz beliebig ausgewählt war, sind diese Feststellungen über den Verlauf der Kurven Γ_i in den Gebieten E_l für alle logarithmischen Elementargebiete verbindlich.

Schließlich bedeute E_a ein beliebiges der algebraischen Elementargebiete. Wir dürfen annehmen, daß E_a das Innere eines Kreises, sein Rand e_a also eine Kreislinie ist. Auf e_a liegen 2λ-Knoten, $\lambda > 1$. Unter diesen 2λ-Knoten gibt es einen oder mehrere mit kleinster bzw. größter Generationszahl n_0 bzw. $n_1 = n_0 + n'$, $n' \geqq 1$. Die n_0-Knoten sind Punkte von Γ_{n_0}, aber kein Bogen dieses Kurvensystems dringt in das Gebiet E_a ein. Es sei P^1_1 ein beliebiger der (n_0+1)-Knoten auf e_a. Davon ausgehend ergibt sich bei Umlauf auf e_a in mathematisch positivem Sinne eine bestimmte Anordnung aller (n_0+1)-Knoten auf e_a in der Form: $P^1_1, P^1_2, \ldots, P^1_{r_1}$; dabei ist $r_1 \geqq 2$, weil mindestens ein n_0-Knoten auf e_a liegt. Jedes Knotenpaar P^1_j, P^1_{j+1} bestimmt, unter Beachtung des festgelegten Richtungssinnes, in eindeutiger Weise ein Intervall Δ^1_j, $j = 1, 2, \ldots, r_1 - 1$. Gewisse dieser Intervalle enthalten genau einen Knoten und zwar einen n_0-Knoten. Ihre Endpunkte P^1_j und P^1_{j+1} sind dann nach Konstruktion durch einen Jordanbogen verbunden, der alle anderen Knoten auf e_a von dem n_0-Knoten trennt. Alle anderen (n_0+1)-Knoten werden nur von n_0-Knoten aus erreicht, die außerhalb E_a liegen; von diesen Knoten aus kann also kein Bogen des Systems Γ_{n_0+1} in E_a einmünden. Nun ordnen wir die (n_0+2)-Knoten von einem Knoten P^2_1 ausgehend in gleicher Weise an: $P^2_1, P^2_2, \ldots, P^2_{r_2}$ $r_2 \geqq 2$; die entsprechenden Intervalle seien Δ^2_j. Dann sind die Endpunkte derjenigen Intervalle Δ^2_j, die genau ein Δ^1_i, also nur die Knoten P^1_i, ein n_0-Knoten und P^1_{i+1} enthalten, in E_a durch einen zu Γ_{n_0+2} gehörigen Jordanbogen verbunden. Wenn ein Intervall Δ^2_j mehrere Intervalle Δ^1_i enthält, bemerkt man zunächst, daß diese Δ^1_i lückenlos nebeneinander liegen. Im anderen Falle müßte noch mindestens ein (n_0+2)-Knoten in Δ^2_j liegen, entgegen der Annahme. Die in Δ^2_j gelegenen (n_0+1)-Knoten seien $P^1_s, P^1_{s+1}, \ldots, P^1_{s+r}$, und der durch diese Punkte

bestimmte Teilbogen von Γ_{n_0+1} sei $\Gamma(P^1_\varkappa, P^1_{\varkappa+\tau})$. Von den Knoten $P^1_{\varkappa+\lambda}$ können (n_0+2)-Bündel in das Äußere von E_a ausgehen. Man zeigt durch einfache Betrachtungen, daß die zugehörigen (n_0+2)-Knoten innerhalb geschlossener Zweige liegen müssen, die mit $\Gamma(P^1_\varkappa, P^1_{\varkappa+\tau})$ nur gewisse der Knoten $P^1_{\varkappa+\lambda}$ gemeinsam haben. Dann sind aber nach Konstruktion P^2_j und P^2_{j+1} aufeinanderfolgende Knoten, also durch einen zu Γ_{n_0+2} gehörigen Jordanbogen verbunden, der Δ^2_j von allen anderen 2-Intervallen auf e_a trennt. Schließlich kann es auf e_a noch (n_0+2)-Knoten geben, die nur von Knoten der Generation n_0+1 außerhalb E_a erreicht werden. Durch sie gehen gewisse Bögen von Γ_{n_0+2}, die aber nicht in E_a eindringen. Diese Überlegungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf die (n_0+3)-, (n_0+4)-, ..., (n_0+n')-Knoten übertragen. Bei dem (n_0+n')-ten Schritt werden die letzten Knoten auf e_a erfaßt.

Danach ergibt sich also, daß zu jedem in E_a gelegenen Jordanbogen von Γ_n, $n_0 < n < (n_0+n')$, ein von den Endpunkten P^n_j, P^n_{j+1} dieses Bogens gebildetes Intervall Δ^n_j gehört, das nur Knoten mit Generationszahlen $\leqq n$ enthält. Auf jedem solchen Intervall liegen stets $2\mu+1$-Knoten; Δ^n_j setzt sich also aus einer geraden Anzahl von Knotenintervallen zusammen.

Alle Aussagen über Knotenanordnung und Verlauf der Kurvensysteme Γ_i behalten auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn wir den Streckenkomplex betrachten, der durch schlichte konforme Abbildung der Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ in das Gebiet $\mathfrak{D}_z$ gewonnen wird.

III.

1. Wir legen den folgenden Betrachtungen den ursprünglich mit S bezeichneten Streckenkomplex zugrunde. Unsere Aufgabe soll sein, die in starkem Maße willkürlichen Kurven Γ_i in zweckmäßiger Weise festzulegen. Dazu bilden wir die einzelnen Elementargebiete von S in schlichte Gebiete von bekannter Struktur ab. In diesen Gebieten werden die Bilder der in den Elementargebieten liegenden Teilbögen von Γ_n in passender Weise so abgeändert, daß ihre Urbilder in der z-Ebene zulässige Verbindungslinien Γ^n_j sind.

a) Abbildung der logarithmischen Elementargebiete. Die eindeutige analytische Funktion $w = w(z)$, die als Umkehrung der Abbildungsfunktion $z = z(w)$ entsteht, erzeugt als Bild eines logarithmischen Elementargebietes E_l ein unendlich vielblättriges Flächenstück $\mathfrak{W}_l$, das echter Teil der Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ ist. Die Randkomponenten von $\mathfrak{W}_l$ sind neben einem logarithmischen Windungspunkt über $w = a_\varkappa$ die Gliedkurven, die die Strahlen $\gamma_\varkappa$ und $\gamma_{\varkappa+1}$ als Spur haben. Als Bild eines algebraischen Elementargebietes E_a entsteht ein endlich vielblättriges Flächenstück $\mathfrak{W}_a$ mit einem algebraischen

Windungspunkt über $w = a_\varkappa$. Es ist nun vorteilhaft, diese Flächenstücke $\mathfrak{W}_l$ und $\mathfrak{W}_a$ auf einfachere der gleichen Struktur abzubilden.

Dazu gehen wir von dem durch $\gamma_\varkappa$, $\gamma_{\varkappa+1}$ gebildeten Winkelraum Ω der Breite $\frac{2\pi}{q}$ in der w-Ebene aus. Für jeden von $w = 0, \infty$ verschiedenen Punkt von Ω sei $|w| = r$ und φ das auf den durch $w = 0, w = a_\varkappa$ bestimmten Strahl bezogene Argument von w; es ist also $0 < r < \infty$ und $-\frac{\pi}{q} \leqq \varphi \leqq +\frac{\pi}{q}$. Durch

$$w_1 = \varrho e^{i\vartheta} = r e^{i\frac{q}{2}\varphi} \tag{1}$$

wird Ω umkehrbar eindeutig auf einen Winkelraum $\Omega_1 : -\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq +\frac{\pi}{2}$ abgebildet. Die durch (1) definierte Abbildung ist, wie man sofort nachrechnet, in jedem inneren Punkt von Ω stetig differenzierbar. In der Umgebung der Randpunkte von Ω bleiben die Ableitungen ($u_x, \ldots, v_y$, wenn $w_1 = u + iv$, $w = x + iy$ gesetzt wird) beschränkt. Die durch (1) gegebene Abbildung läßt sich nun auf jeden inneren Punkt von $\mathfrak{W}_l$ bzw. $\mathfrak{W}_a$ übertragen. $w_1 = w_1(w)$ bildet dann $\mathfrak{W}_l$ bzw. $\mathfrak{W}_a$ in andere Flächenstücke $\mathfrak{W}_l^1$ bzw. $\mathfrak{W}_a^1$ ab, deren Windungspunkte wieder über $w_1 = a_\varkappa$ liegen. Randstrahlen sind jetzt $\arg w_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\arg w_1 = -\frac{\pi}{2}$.

$\mathfrak{W}_l^1$ wird durch die Funktion

$$g(w_1) = \frac{1}{\pi} \log \frac{a_\varkappa + w_1}{a_\nu - w_1} \tag{2}$$

schlicht konform in die Halbebene $\Re g > 0$ abgebildet. Den Randkomponenten von $\mathfrak{W}_l^1$ entsprechen $g = \infty$ und die imaginäre Achse $\Re g = 0$. $g(w_1) = g(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{a_\varkappa + w_1(w(z))}{a_\varkappa - w_1(w(z))}$ bildet also das logarithmische Elementargebiet E_l in das Gebiet $\mathfrak{E}_l : \Re g > 0$ ab. Die Abbildungsfunktion soll so normiert sein, daß ein fest gewählter n_0-Knoten z_{n_0} auf e_l in den Punkt $g = 0$ oder $g = i$ übergeht, je nachdem z_{n_0} ein Innen- oder ein Außenknoten ist. Die Knoten auf e_l gehen in die Punkte $g(z) = i\mu$ über, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Es seien nun $i\mu_1$ und $i\mu_2$ Bilder zweier n-Knoten (wir nennen sie im folgenden auch kurz n-Knoten), die durch einen Jordanbogen in $\mathfrak{E}_l$ verbunden sind. Sie bilden auf $\Re g = 0$ ein endliches Intervall, das eine ungerade Anzahl von Bildknoten mit Generationszahlen $< n$ enthält. Innerhalb dieses Intervalles gibt es also einen Knoten $i\mu^*$ mit der Eigenschaft $|\mu_1 - \mu^*| = |\mu_2 - \mu^*|$. Die ursprüngliche Verbindungslinie zwischen $i\mu_1$ und $i\mu_2$ ersetzen wir nun durch den in $\mathfrak{E}_l$ liegenden Bogen K_n des Kreises $|g - \mu^*| = |\mu_1 - \mu^*|$. Das z-Bild dieses Halbkreises K_n ist offenbar eine zulässige Kurve Γ_j^n. In dieser Weise werden alle Bildkurven der in E_l liegenden Bögen

Γ_j^n von Γ_n für jedes n abgeändert. Dadurch werden in jedem logarithmischen Elementargebiet E_l die Kurven Γ_j^n für alle natürlichen Zahlen festgelegt.

Die später anzuwendende Beweismethode macht es erforderlich, die Konstruktion der Kurvensysteme Γ_n dahin zu erweitern, daß auch für unganzes $\varrho = n > 0$ passende Systeme Γ_ϱ bestimmt werden, die für ganzzahliges ϱ mit den bereits bestimmten Γ_n zusammenfallen. Für die Gebiete E_l lösen wir diese Aufgabe so: Es sei ϱ eine beliebige positive Zahl, die der Bedingung $n < \varrho < n + 1$ genügt. Weiter sei K_{n+1} ein beliebiger der Halbkreise, die die Bilder $g = i\mu_1$ und $g = i\mu_2$ aufeinanderfolgender $(n+1)$-Knoten verbinden. Der Radius von K_{n+1} ist durch $|\mu_1 - \mu_2|/2$ gegeben, sein Mittelpunkt ein Knoten $i\mu^*$. In dem durch $i\mu_1$ und $i\mu_2$ bestimmten endlichen Intervall auf $\Re g = 0$ liegt eine ungerade Zahl von Bildknoten mit Generationszahlen $\leqq n$. Um den Punkt $i\mu^*$ schlagen wir den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}|\mu_1 - \mu_2| - (n + 1 - \varrho)$; der zu $\mathfrak{E}_l$ gehörige Halbkreis wird mit K_ϱ bezeichnet. $\varrho = (n+1)$ ergibt K_{n+1}. Für $\varrho = n$ sind verschiedene Fälle zu beachten. Wenn in dem genannten Intervall Δ nur ein Bildknoten (Bild eines n-Knotens) liegt, dann zieht sich K_ϱ für $\varrho \to n$ auf den Punkt $i\mu^*$ zusammen. Enthält Δ nur zwei n-Knoten, dann geht K_ϱ in die Kurve K_n über; liegen schließlich mehrere n-Knoten in Δ, dann bekommt man aus K_ϱ bei $\varrho \to n$ einen Halbkreis K_n', der die beiden äußersten n-Knoten in Δ verbindet. Diese Kurve ist unter den für $\varrho = n$ gefundenen Kurven noch nicht vorhanden. Mit Rücksicht auf eine spätere Integration ist es zweckmäßig, diese zusätzlichen Verbindungslinien mit in das System Γ_n aufzunehmen. Jeder zu einem beliebigen $\varrho, n < \varrho < n + 1$, gehörige Halbkreis K_ϱ liegt vollständig in dem von der Kurve K_{n+1} und K_n bzw. K_n' begrenzten Teilgebiet von $\mathfrak{E}_l$. Die Halbkreise K_ϱ sind für alle ϱ in $\mathfrak{E}_l$ punktfremd. Bei $\varrho \to \infty$ schöpfen die Kurven das Gebiet $\mathfrak{E}_l$ aus, abgesehen von gewissen durch K_{n+1} und K_n' begrenzten Teilgebieten von $\mathfrak{E}_l$, die unter Umständen auftreten können. Die Kurven K_ϱ und K_n' übertragen wir in die Gebiete E_l der z-Ebene.

Alle zum Parameterwert ϱ gehörigen Kurven in einem Gebiet $\mathfrak{E}_l^{(\nu)}$ bezeichnen wir zusammenfassend mit $L_\varrho^{(\nu)}$, ihre Länge mit $L^{(\nu)}(\varrho)$. Nach der angegebenen Konstruktion gewinnt man für $L^{(\nu)}(\varrho)$, $n < \varrho \leqq n + 1$, die Abschätzung:

$$L^{(\nu)}(\varrho) < \pi\sigma^{(\nu)}(n+1). \tag{2'}$$

Dabei bedeutet $\sigma^{(\nu)}(n+1)$ die Anzahl der Bildknoten von $\mathfrak{E}_l^{(\nu)}$ oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Knoten auf $e_l^{(\nu)}$ mit Generationszahlen $\leqq (n+1)$. In (2') sind die allenfalls mitzunehmenden zusätzlichen Bögen K_n' schon berücksichtigt.

b) Algebraische Elementargebiete. Es bedeute E_a ein beliebiges algebraisches Elementargebiet des Streckenkomplexes S mit 2λ-Gliedern, $\lambda \geqq 1$; alle folgenden Betrachtungen sind also auch für die regulären Elementargebiete gültig. Die Funktion $w = w(z)$ erzeugt als Bild von E_a ein einfach zusammenhängendes Flächenstück $\mathfrak{W}_a$ mit einem algebraischen Windungspunkt $(\lambda - 1)$-ter Ordnung über $w = a_\varkappa$. $\lambda = 1$ bedeutet, daß das Bild von E_a den Punkt $w = a_\varkappa$ schlicht überdeckt. Der Rand von $\mathfrak{W}_a$ wird von 2λ-Gliedkurven gebildet, von denen je λ die Halbstrahlen $\gamma_\varkappa$ und $\gamma_{\varkappa+1}$ zur Spur haben. Durch (1) wird $\mathfrak{W}_a$ in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück $\mathfrak{W}_a^1$ mit einem Windungspunkt $(\lambda - 1)$-ter Ordnung über $w_1 = a_\varkappa$ abgebildet. Je λ Halbstrahlen über $\arg w_1 = \pi$ und $\arg w_1 = -\pi$ (wenn für alle Punkte des durch $w_1 = 0$ und $w_1 = a_\varkappa$ bestimmten Strahles $\arg w_1 = 0$ gesetzt wird) bilden den Rand von $\mathfrak{W}_a^1$. Durch die Funktion

$$h(w_1) = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt[\lambda]{\frac{a_\varkappa - w_1}{a_\varkappa + w_1}} \tag{3}$$

wird $\mathfrak{W}_a^1$ schlicht und, abgesehen von dem einzigen algebraischen Windungspunkt über $w_1 = a_\varkappa$, konform in den Kreis $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$ abgebildet.

Ersetzt man w_1 durch $w_1(w(z))$, so vermittelt die nach (1) und (3) bestimmte Funktion $h(w_1(w(z))) = h(z)$ eine stetig differenzierbare Abbildung von E_a auf das schlichte Gebiet $\mathfrak{E}_a : |h(z)| \leqq \frac{\lambda}{\pi}$. Den Knoten auf e_a entsprechen die Bildknoten $h(z) = \frac{\lambda}{\pi} e^{i\frac{\pi}{\lambda}\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, (\lambda - 1)$. In (3) werde festgesetzt, daß ein gegebener n_0-Knoten z_{n_0} auf e_a in $h = \frac{\lambda}{\pi}$ oder $h = \frac{\lambda}{\pi} e^{i\frac{\pi}{\lambda}}$ übergehen soll, je nachdem z_{n_0} ein Innen- oder Außenknoten ist. Der auf $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$ gemessene Abstand zweier Bildknoten $\frac{\lambda}{\pi} e^{i\frac{\pi}{\lambda}\nu}$ und $\frac{\lambda}{\pi} e^{i\frac{\pi}{\lambda}(\nu+1)}$ beträgt 1.

Nun ersetzen wir die Verbindungslinie zweier n-Knoten durch den in $\mathfrak{E}_a$ verlaufenden Bogen B_n jenes Kreises, der $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$ in diesen beiden Punkten rechtwinklig schneidet. Diese Bögen B_n ergeben in E_a offenbar zulässige Jordanbögen Γ_j^n. Für beliebige Parameterwerte ϱ, $n < \varrho < n + 1$, werden entsprechende Bögen B_ϱ so definiert: Wir gehen von einem beliebigen der Bögen B_{n+1} (B_{n+1} kann sich auch auf einen $(n+1)$-Knoten reduzieren) aus. Die zugehörigen Endpunkte P_{n+1} und Q_{n+1} bestimmen nach II, 4. auf $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$ ein Intervall Δ, das nur Bildknoten mit Generationszahlen $\leqq n$ enthält. Unter diesen gibt es zwei Bilder P_n bzw. Q_n von n-Knoten ($P_n \equiv Q_n$ ist möglich), die von P_{n+1} bzw. Q_{n+1} um eine Bogeneinheit entfernt sind.

Auf den durch die Punkte $P_n P_{n+1}$, $Q_n Q_{n+1}$ bestimmten Teilbögen von $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$ der Länge 1 wird von P_n und Q_n aus die Bogenlänge $s = \varrho - n$ abgetragen, $0 < s < 1$. Dadurch werden eindeutig zwei „zwischen" P_n und P_{n+1} bzw. Q_n und Q_{n+1} liegende Punkte P_ϱ bzw. Q_ϱ festgelegt. Diese Punkte bestimmen genau einen in $\mathfrak{E}_a$ gelegenen Bogen B_ϱ des Kreises, der $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$ in P_ϱ und Q_ϱ orthogonal schneidet. $\varrho \to n+1$ ergibt den Bogen B_{n+1}, $\varrho \to n$ einen Bogen B_n (er kann sich auf einen n-Knoten zusammenziehen) oder aber einen zusätzlichen Bogen B_n', der bei der zunächst nur für $\varrho = n$ erklärten Abänderungsvorschrift noch nicht konstruiert wurde. Wie bei den Gebieten E_l bzw. $\mathfrak{E}_l$ sollen auch hier diese zusätzlichen Bögen B_n' mit berücksichtigt werden. Man erkennt, daß alle in $\mathfrak{E}_a$ vorhandenen B_ϱ keine Punkte gemeinsam haben. Nur für ganzzahliges ϱ können gewisse der B_ϱ gemeinsame Endpunkte, also Bildknoten, besitzen. Für $\varrho \to (n_0 + n')$ schöpfen die Kurven B_ϱ das Gebiet $\mathfrak{E}_a$ aus, möglicherweise abgesehen von gewissen Teilgebieten, die aber zusammen $\mathfrak{E}_a$ nicht vollständig ausfüllen können.

Die Länge der Bögen B_ϱ läßt sich nun in einfacher Weise abschätzen. Dazu betrachten wir einen beliebigen der Bögen B_ϱ mit den Endpunkten P_ϱ, Q_ϱ auf $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$. Diese Punkte bestimmen auf der Kreislinie einen Teilbogen Δ, der nur Bildknoten mit Generationszahlen $\leqq [\varrho]$ enthält. Bedeutet $s(\varrho)$ die Länge von Δ, dann findet man für den zugehörigen Zentriwinkel $2\varphi = \measuredangle (P_\varrho, 0, Q_\varrho) : 2\varphi = \frac{\pi}{\lambda} s(\varrho)$. Die Länge des Bogens B_ϱ wird durch $2\frac{\lambda}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \operatorname{tg} \varphi$ gegeben, wobei $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Für $(\pi/2 - \varphi) \operatorname{tg} \varphi$ gilt die einfache Abschätzung: $(\pi/2 - \varphi) \operatorname{tg} \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \cdot \varphi$. Die Länge des Bogens B_ϱ ist also $\leqq 2\frac{\lambda}{\pi}\frac{\pi}{2}\varphi = \frac{\lambda}{\pi}\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{\lambda} s(\varrho) = \frac{\pi}{2} s(\varrho)$. Nun ist für $n < \varrho \leqq n+1$ $s(\varrho)$ stets kleiner als die Anzahl der Knoten auf Δ. Alle zu einem Wert ϱ gehörigen Kurven in einem Gebiet $\mathfrak{E}_n^{(\mu)}$ bezeichnen wir zusammenfassend mit $L_\varrho^{(\mu)}$, ihre Länge mit $L^{(\mu)}(\varrho)$. Aus den angegebenen Abschätzungen folgt dann, bei Berücksichtigung der Zusatzkurven B_n':

$$L^{(\mu)}(\varrho) < \pi\, \sigma^{(\mu)}(n+1), \qquad n < \varrho \leqq n+1. \tag{3'}$$

wobei $\sigma^{(\mu)}(n+1)$ die Anzahl der Knoten mit Generationszahlen $\leqq n+1$ auf $E_a^{(\mu)}$ bedeutet.

Es seien B_ϱ und $B_{\varrho'}$, $\varrho' = \varrho + \Delta\varrho$, $\Delta\varrho > 0$, zwei Bögen die in dem von den beiden Kurven B_{n+1} und B_n bzw. B_n' umschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{E}_a$ liegen. B_ϱ und $B_{\varrho'}$ sind also Teilbögen zweier Steinerscher Kreise, deren Mittelpunkt auf derselben durch $h = 0$ gehenden Geraden liegen. 2φ bzw. $2\varphi' = 2(\varphi + \Delta\varphi)$, $\Delta\varphi > 0$, seien wieder die zu den Punkten

P_ϱ, Q_ϱ bzw. $P_{\varrho'}, Q_{\varrho'}$ gehörigen Zentriwinkel. Die minimale Entfernung der beiden Kurven B_ϱ und $B_{\varrho'}$ in $\mathfrak{E}_a$ werde mit Δt bezeichnet. Für diesen Abstand findet man durch einfache Rechnung:

$$\Delta t = \frac{\lambda}{\pi}\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{\cos\varphi'} + \operatorname{tg}\varphi'\right), \qquad \varphi, \varphi' \neq \frac{\pi}{2}.$$

Indem man $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$ setzt und nach bekannten Formeln vereinfacht, folgt daraus:

$$\Delta t = \frac{\lambda}{\pi}\Delta\varphi\left(\frac{1-\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + (\Delta\varphi)\right) \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta t}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{1+\sin\varphi} + (\Delta\varphi),$$

wobei $(\Delta\varphi)$ eine Größe bedeutet, die mit $\Delta\varphi$ verschwindet. $\Delta\varphi \to 0$ liefert also

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{1+\sin\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{d\varphi} \geqq \frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{2},$$

weil $\sin\varphi$ in dem genannten Intervall positiv ist. Man zeigt nun, daß diese Beziehung auch für den bisher ausgeschlossenen Fall $\varphi = \pi/2$ gültig ist. Da $\frac{\lambda}{\pi}d\varphi = ds$ und $ds = d(\varrho - n) = d\varrho$ gilt, kann man dafür schreiben

$$dt \geqq \frac{d\varrho}{2}. \tag{3''}$$

Diese Relation werden wir im nächsten Abschnitt benutzen.

Für ganzzahliges ϱ setzen sich die auf dem Wege über die Gebiete $\mathfrak{E}_l$ und $\mathfrak{E}_a$ gefundenen Kurven Γ_j^n zu einem System von geschlossenen Kurven zusammen. Insbesondere gehört zu Γ_n ein geschlossener Zweig Γ_n^0, der $z = 0$ umschlingt. Wir behaupten, daß auch für unganzes ϱ entsprechende Systeme Γ_ϱ entstehen.

Zum Nachweis gehen wir etwa von der Kurve Γ_n^0 aus. Es sei b_j^{n+1} ein beliebiges in G_∞ gelegenes $(n+1)$-Bündel und γ ein Glied aus diesem Bündel. γ gehört zum gemeinsamen Rand zweier angrenzender Elementargebiete, z. B. eines Gebietes E_l und eines Gebietes E_a. Auf γ sind durch die Konstruktionen in $\mathfrak{E}_l$ und $\mathfrak{E}_a$ zwei Punkte l_ϱ und a_ϱ festgelegt, die für $n < \varrho < n+1$ nicht mit den Endpunkten von γ zusammenfallen. Wir zeigen, daß diese beiden Punkte l_ϱ und a_ϱ identisch sind; daraus ergeben sich dann mühelos alle Eigenschaften von Γ_ϱ.

Die Endpunkte von γ sind ein n-Knoten und ein $(n+1)$-Knoten. Wir dürfen annehmen, daß der n-Knoten ein Innenknoten ist; im anderen Falle sind die folgenden Überlegungen nur in geringer Weise zu modifizieren. Dem n-Knoten entspricht auf dem Rande von $\mathfrak{E}_l$ bzw. $\mathfrak{E}_a$ ein Bildknoten $g = i\mu$ bzw. $h = \frac{\lambda}{\pi}e^{i\frac{\pi}{\lambda}\nu}$; l_ϱ bzw. a_ϱ ist Bild eines gewissen Punktes g_ϱ bzw. h_ϱ auf $\Re g = 0$ bzw. $|h| = \frac{\lambda}{\pi}$, der von $g = i\mu$ bzw. $h = \frac{\lambda}{\pi}e^{i\frac{\pi}{\lambda}\nu}$ um den auf dem

Rande von $\mathfrak{E}_l$ bzw. $\mathfrak{E}_a$ gemessenen Abstand $(\varrho - n)$ entfernt ist. Aus den Eigenschaften von $e^{\pi g}$ und h^{λ} ergibt sich bei Berücksichtigung der festgelegten Normierung von (2) und (3), daß den Punkten l_ϱ und a_ϱ auf der Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ Punkte $\mathfrak{w}_l(\varrho)$ und $\mathfrak{w}_a(\varrho)$ entsprechen, deren Spurpunkte von $w = 0$ den gleichen Abstand haben. Da aber die Punkte $\mathfrak{w}_l(\varrho)$ und $\mathfrak{w}_a(\varrho)$ auf der gleichen Gliedkurve über $\gamma_\varkappa$ liegen, muß $\mathfrak{w}_l(\varrho) \equiv \mathfrak{w}_a(\varrho)$ d. h. $l_\varrho \equiv a_\varrho$ sein. In gleicher Weise erledigen sich die Fälle, wo γ zum Rande anderer benachbarter Elementargebiete gehört. Die weiteren Eigenschaften von Γ_ϱ ergeben sich nun sofort aus denen von Γ_n und Γ_{n+1}, wenn $n < \varrho \leqq n+1$. Zu jedem Γ'_ϱ gehört ein geschlossener Zweig Γ^0_ϱ, der $z = 0$ umschlingt. In $G_\infty(\varrho)$ liegen keine Punkte mit zugehörigen Parameterwerten $\leqq \varrho$.

2. Beweis des Satzes.

Nach III, 1. trennt die Jordankurve Γ^0_1 alle anderen Kurven Γ^0_ϱ mit $\varrho > 1$ von $z = 0$; sie liegen also, da Γ^0_1 den Kreis $|z| \leqq r_0$, $r_0 > 0$, umschlingt, alle außerhalb dieses Kreises. Bedeutet $\Gamma(\varrho)$ die Gesamtlänge aller Kurven, die Γ_ϱ ausmachen, so gilt mithin für jedes $\varrho > 1$

$$2\pi r_0 \leqq \Gamma(\varrho) = \int_{\Gamma_\varrho} |dz|.$$

Γ_ϱ besteht aus einer endlichen Anzahl von Jordanbögen, die in gewissen der Gebiete E_l und E_a liegen. Dabei sind reguläre Elementargebiete in den E_a einbegriffen. Diese Gebiete bezeichnen wir mit E_ν, ihre Bilder mit $\mathfrak{E}_\nu$ und die zugehörigen Abbildungsfunktionen, die sich aus (2) oder (3) ergeben, kurz mit $z = z(\zeta_\nu)$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. In den Gebieten $\mathfrak{E}_\nu$ sind die Funktionen $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ stetig differenzierbar und die Ableitungen bleiben in der Umgebung der Randpunkte von $\mathfrak{E}_\nu$ beschränkt. Die Fundamentalgrößen E, F, G sind also in jedem der Gebiete $\mathfrak{E}_\nu$ stetige Funktionen von $\xi, \eta: E = x_\xi^2 + y_\xi^2, \ldots$. Unter $\Gamma^{(\nu)}_\varrho$ verstehen wir alle in den Gebieten E_ν gelegenen Teilbögen von Γ_ϱ; $\Gamma^{(\nu)}_{(\varrho)}$ sei die Länge der Kurve $\Gamma^{(\nu)}_\varrho$. Dann gilt $\Gamma(\varrho) = \sum_\nu \Gamma^{(\nu)}_{(\varrho)}$, wobei über alle von Γ_ϱ getroffenen Gebiete E_ν zu summieren ist. Die Anzahl dieser Gebiete ist i. a. von ϱ abhängig. Mit diesen Bezeichnungen erhält man für alle $\varrho > 1$:

4) $$2\pi r_0 \leqq \Gamma(\varrho) = \sum_\nu \Gamma^{(\nu)}_{(\varrho)} = \sum_\nu \int_{L^{(\nu)}_\varrho} \left|\frac{dz}{d\zeta_\nu}\right| |d\zeta_\nu|,$$

wobei mit $L^{(\nu)}_\varrho$ die ζ-Bilder von $\Gamma^{(\nu)}_\varrho$ gemeint sind. Daraus ergibt sich durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

4') $$c_1 = 4\pi^2 r_0^2 \leqq \sum_\nu \int_{L^{(\nu)}_\varrho} \|d\zeta_\nu| \cdot \sum_\nu \int_{L^{(\nu)}_\varrho} \left|\frac{dz}{d\zeta_\nu}\right|^2 |d\zeta_\nu| = \sum_\nu L^{(\nu)}_{(\varrho)} \sum_\nu \int_{L^{(\nu)}_\varrho} \left|\frac{dz}{d\zeta_\nu}\right|^2 |d\zeta_\nu|$$

oder, weil $L(\varrho) = \sum_{\nu}' L_{(\varrho)}^{(\nu)} > 0$,

$$(4'') \qquad c_1 \frac{1}{L(\varrho)} \leqq \sum_{\nu} \int_{L_\varrho^{(\nu)}} \left| \frac{dz}{d\zeta_\nu} \right|^2 |d\zeta_\nu| .$$

Nun ist $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 = \frac{E\,d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + G\,d\eta^2}{d\xi^2 + d\eta^2}$; dieser Ausdruck ist aber für jeden Wert $\frac{d\eta}{d\xi}$ kleinergleich $\frac{1}{2}[E + G + \sqrt{(E+G)^2 - 4(EG - F^2)}]$. Da hier wegen (1) $\frac{E+G}{\sqrt{EG-F^2}} \leqq \frac{q}{2} + \frac{2}{q}$ ist, gilt für jedes der Gebiete $\mathfrak{E}_\nu$, weil $q > 2$

$$\left| \frac{dz}{d\zeta_\nu} \right|^2 \leqq \frac{1}{2}\left[\frac{q}{2} + \frac{2}{q} + \sqrt{\left(\frac{q}{2} - \frac{2}{q}\right)^2}\right] \cdot \sqrt{EG - F^2} \leqq \frac{q}{2}\sqrt{EG - F^2} .$$

Daher erhält man aus (4'')

$$(4''') \qquad c_1 \frac{1}{L(\varrho)} \leqq \frac{q}{2} \sum_{\nu} \int_{L_\varrho^{(\nu)}} \sqrt{EG - F^2}\,|d\zeta_\nu| .$$

Nun ist für jedes ϱ, $n < \varrho \leqq n+1$, die Anzahl der von Γ_ϱ getroffenen Elementargebiete die gleiche. Integration von (4''') nach ϱ zwischen den Grenzen n und $n+1$ liefert also

$$(5) \qquad c_1 \int_n^{n+1} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} \leqq \frac{q}{2} \sum_{\nu} \int_n^{n+1} \int_{L_\varrho^{(\nu)}} \sqrt{EG - F^2}\,|d\zeta_\nu|\,d\varrho .$$

Nach Konstruktion ist in jedem Gebiet $\mathfrak{E}_\nu$, das Bild eines logarithmischen Elementargebietes ist, $|d\zeta_\nu|\,d\varrho$ ein Flächenelement dF_ζ. In den Gebieten $\mathfrak{E}_\nu$, die Bilder algebraischer Elementargebiete sind, werden durch die Bogenelemente $|d\zeta_\nu|$ in jedem von benachbarten Kurven B_ϱ und $B_{\varrho+d\varrho}$ gebildeten Streifen Flächenelemente dF_ζ bestimmt, für die nach (3'') $dF_\zeta \geqq |d\zeta_\nu| \cdot \frac{d\varrho}{2}$ gilt. Für alle Gebiete $\mathfrak{E}_\nu$ ist also die Beziehung $|d\zeta_\nu|\,d\varrho \leqq 2\,dF_\zeta$ sicher richtig. Daher nimmt wegen $\sqrt{EG - F^2} = \frac{dF_z}{dF_\zeta}$ (5) die Form an:

$$(5') \qquad c_2 \int_n^{n+1} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} \leqq \sum_{\nu} \int_n^{n+1} \int_{L_\varrho^{(\nu)}} \frac{dF_z}{dF_{\zeta_\nu}} \cdot dF_{\zeta_\nu} = \sum_{\nu} \iint dF_z , \quad c_2 = \frac{c_1}{q} .$$

Die rechte Seite ist höchstens gleich dem Inhalt des durch Γ_n und Γ_{n+1} gebildeten Gebietes $\mathfrak{D}(n, n+1) = \mathfrak{D}_{n+1} - \mathfrak{D}_n$.

Aus $L(\varrho) = \sum_{\nu} L^{(\nu)}(\varrho)$ folgt für $n < \varrho \leqq n+1$ nach (2') und (3')

$$L(\varrho) < \pi \sum_{\nu} \sigma_{(n+1)}^{(\nu)} + \pi \sum_{\mu} \sigma_{(n+1)}^{(\mu)} = \pi \left(\sum_{\nu} \sigma_{(n+1)}^{(\nu)} + \sum_{\mu} \sigma_{(n+1)}^{(\mu)} \right) .$$

Diese Abschätzung liefert mit (5′) zusammen für alle $n > 1$:

$$(5'') \qquad \frac{c_3}{\pi\left(\sum_{\nu} \sigma_{(n+1)}^{(\nu)} + \sum_{\mu} \sigma_{(n+1)}^{(\mu)}\right)} < J(n, n+1);$$

dabei bedeutet $J(n, n+1)$ den Inhalt des Gebietes $\mathfrak{D}(n, n+1)$.

Dem Ausdruck $\beta(n+1) = \sum_{\nu} \sigma_{(n+1)}^{(\nu)} + \sum_{\mu} \sigma_{(n+1)}^{(\mu)}$ geben wir zunächst eine etwas handlichere Gestalt. Jedes zu den $(n+1)$-Bündeln k_j^{n+1} gehörige Glied wird in einem von seinen Endpunkten verschiedenen Punkte durchschnitten. Dadurch entsteht aus S ein zusammenhängender Teil S_n, zu dem nur endlich viele Knoten mit Generationszahlen $\leqq n$ gehören. Auf dem Rande von S_n liegen $\sigma(n)$ Knoten. $\beta(n+1)$ läßt sich nun durch die $\sigma(n)$-Randknoten abschätzen. Dazu bemerkt man, daß jeder der $\beta(n+1)$-Knoten, von den $(n+1)$-Knoten abgesehen, ein Randknoten von S_n ist. Ein solcher i-Knoten, $i \leqq n$, kann zu mehreren Elementargebieten E gehören und ist daher bei der Berechnung von $\beta(n+1)$ in entsprechender Weise mehrfach zu zählen, aber höchstens q-fach. Weiter werden alle bei $\beta(n+1)$ mitgezählten $(n+1)$-Knoten von n-Knoten aus erreicht, die schon in der Anzahl $\sigma(n)$ berücksichtigt sind; die Zahl dieser $(n+1)$-Knoten ist sicher nicht größer als $q\sigma(n)$. Damit finden wir also:

$L(\varrho) < \pi\beta(n+1) < 2\pi q\sigma(n)$, also für (5″) $\frac{c_3}{\sigma(n)} < J(n, n+1)$, $c_3 = \frac{c_2}{2q\pi}$;

dabei gibt $\sigma(n)$ die Zahl der Randknoten von S_n an, jeder Randknoten nur einfach gezählt.

Da diese Beziehung für jedes $n > 1$ gilt, darf über n von einem $n = N_0$ an bis zu einem $n = N$ summiert werden:

$$(6) \qquad c_3 \cdot \sum_{n=N_0}^{N} \frac{1}{\sigma(n)} < \sum_{n=N_0}^{N} J(n, n+1).$$

Wir nehmen nun an, daß $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ in einen endlichen Kreis $|z| < R < \infty$ schlicht abgebildet wird, also zum hyperbolischen Typus gehört. Da alle Γ_ϱ in $|z| < R$ liegen und bei $\varrho \to \infty$ jedes Teilgebiet von $|z| < R$ höchstens einmal überstrichen wird, gilt für jedes noch so große N

$$\sum_{n=N_0}^{N} J(n, n+1) \leqq \pi R^2,$$

also

$$(6') \qquad c_3 \sum_{n=N_0}^{N} \frac{1}{\sigma(n)} < \pi R^2 = K < \infty.$$

Weil N eine beliebige ganze Zahl > 1 sein darf, besagt (6′), daß im Grenzkreisfalle die Reihe $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$ konvergiert. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit der des Satzes

Satz 1. *Es sei $\sigma(n)$ die Zahl der Randknoten von S_n, jeder nur einfach gezählt. Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)}$$

divergiert, dann gehört die Fläche $\mathfrak{W}(a_x)$ zum parabolischen Typus.

3. Wesentlich für den Beweis des Satzes war die Existenz der Kurven Γ_ϱ^0. Sie führte zu der Bezeichnung (4), auf die sich dann alle weiteren Rechnungen gründeten. Danach liegt es nahe, überhaupt nur diese Kurven Γ_ϱ^0 zum Beweis zu benutzen, d. h. bei der dort ausgeführten Integration nur die Γ_ϱ^0 als Integrationswege zuzulassen. Das ist in der Tat möglich und führt zu einer Verschärfung von Satz 1.

Γ_ϱ^0, $n < \varrho < n+1$, verläuft in endlich vielen Elementargebieten E_ν^0 und E_μ^0. Die Länge der entsprechenden Bildkurven in $\mathfrak{E}_\nu^0$ und $\mathfrak{E}_\mu^0$ bezeichnen wir mit $L_0^{(\nu)}(\varrho)$ und $L_0^{\mu}(\varrho)$ und setzen weiter $L_0(\varrho) = \sum_\nu L_0^{(\nu)}(\varrho) + \sum_\mu L_0^{(\mu)}(\varrho)$. Dann liefert eine analoge Rechnung, statt (5′), die Beziehung

$$c_4 \int_n^{n+1} \frac{d\varrho}{L_0(\varrho)} < J_0(n, n+1) \leqq J(n, n+1). \tag{7}$$

Ist $\sigma_0^{(\nu)}(n+1)$ bzw. $\sigma_0^{(\mu)}(n+1)$ die Zahl der Knoten auf dem Rande der Gebiete E_ν^0 und E_μ^0 mit Generationszahlen $\leqq n+1$, dann gilt für $L_0(\varrho)$:

$$L_0(\varrho) < \pi\left(\sum_\nu \sigma_0^{(\nu)}(n+1) + \sum_\mu \sigma_0^{(\mu)}(n+1)\right).$$

Γ_n^0 bestimmt ein Gebiet G_∞. Jedes in G_∞ gelegene und zu $(n+1)$-Bündeln k_j^{n+1} gehörige Glied wird in einem von seinen Endpunkten verschiedenen Punkte durchschnitten. Dadurch entsteht ein aus endlich vielen Gliedern gebildeter Restkomplex S_n^0, auf dem aber jetzt auch i-Knoten mit $i > n$ liegen können. Die Zahl der Randknoten von S_n^0 sei $\sigma_0(n)$. Diese Randknoten besitzen alle Generationszahlen $\leqq n$. Man findet ähnlich wie oben $L_0(\varrho) < 2q\pi\sigma_0(n)$. also

$$\frac{c_4}{2q\pi}\frac{1}{\sigma_0(n)} < J(n, n+1).$$

Wenn die Fläche $\mathfrak{W}(a_x)$ zum hyperbolischen Typus gehört, gilt daher für jedes noch so große N

$$c_5 \sum_{n=N_0}^{N} \frac{1}{\sigma_0(n)} < R^2\pi = K < \infty. \tag{7′}$$

Daraus gewinnt man den

Satz 2. *Es bedeute $\sigma_0(n)$ die Zahl der Randknoten von S_n^0, wobei jeder Knoten nur einfach gezählt ist. Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0(n)}$$

divergiert, dann gehört die Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ sicher zum parabolischen Typus.

IV.

1. Die angegebenen Sätze enthalten einen Spezialfall, über den an anderer Stelle [8]) berichtet wurde.

Eine Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ der genannten Flächenklasse besitze einen Streckenkomplex mit den folgenden Eigenschaften:

Zu jedem Elementargebiet gehört genau ein Knoten mit niedrigster Generationszahl n_0. Auf jedem Elementargebiet gilt für die den Knoten zugeordneten Generationszahlen die Anordnung

e_l: $\ldots, (n_0+j), \ldots, (n_0+1), n_0, (n_0+1), \ldots, (n_0+j), \ldots, j = 1, 2, \ldots$

e_a: $\underline{n_0}\ (n_0+1), (n_0+2), \ldots, (n_0+\lambda-1)\ (n_0+\lambda).$
$\quad\quad\ (n_0+1), (n_0+2), \ldots, (n_0+\lambda-1)$

Dann besteht jedes Kurvensystem Γ_ϱ aus einem einzigen geschlossenen Zweig Γ_ϱ^0, also $S(n) \equiv S_0(n)$, und $\sigma(n) \equiv \sigma_0(n)$ für alle n. Die Kurve Γ_n treffe $\sigma_1(n)$ logarithmische und $\sigma_2(n)$ algebraische Elementargebiete. Die zu diesen Gebieten E_l und E_a gehörigen kleinsten Generationszahlen seien $N_{\nu(n)}$ und $N_{\mu(n)}$; $2\lambda_{\mu(n)}$ bedeute die Zahl der Glieder, die den Rand e_a des μ-ten Elementargebietes E_a bilden, $\mu = 1, 2, \ldots, \sigma_2(n)$. Dann gilt, wenn c eine passende endliche positive Konstante bezeichnet,

$$\sigma(n) = \sigma_0(n) < c\left[\sum_{\nu=1}^{\sigma_1(n)} (n - N_{\nu(n)}) + \sum_{\mu=1}^{\sigma_2(n)} (n - N_{\mu(n)})\right]$$
$$< c\left[n\,\sigma_1(n) + \sum_{\mu=1}^{\sigma_2(n)} \lambda_\mu\right] \quad \text{mit} \quad \lambda_\mu = \lambda_{\mu(n)}.$$

Aus Satz 2 folgt mithin

Satz 2'. *Wenn die Reihe*

$$\sum_n \left(n\,\sigma_1(n) + \sum_{\mu=1}^{\sigma_2(n)} \lambda_\mu\right)^{-1}$$

divergiert, dann gehört jede Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$, deren Streckenkomplex die angegebenen Eigenschaften besitzt, zum parabolischen Typus.

---

[8]) Wittich [2].

Besitzt $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ keine algebraischen Windungspunkte, dann erhält man aus Satz 2′ für $q = 3$ ein von R. Nevanlinna [9]) und für $q > 3$ ein vom Verfasser [10]) angegebenes hinreichendes Kriterium für das Eintreffen des Grenzpunktfalles.

Für eine von G. Elfving betrachtete Flächenklasse [11]) mit endlich vielen logarithmischen und algebraischen Windungspunkten liefert Satz 2 das bekannte Ergebnis: Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche mit endlich vielen logarithmischen und endlich vielen algebraischen Windungspunkten gehört zum parabolischen Typus.

2. Als leichte Folgerung aus Satz 1 (oder Satz 2) ergibt sich der zuerst von E. Ullrich [12]) ausgesprochene

Satz. *Jede Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ mit endlich vielen periodischen Enden läßt sich schlicht und, bis auf innere Windungspunkte endlicher Ordnung, konform in die punktierte Ebene abbilden.*

Zum Beweis benutzen wir Satz 1 und schätzen die dort eingeführte Größe $\sigma(n)$ ab. Dazu betrachten wir ein beliebiges der p periodischen Enden. An den Kern schließt sich eine erste Periode, daran eine zweite usw. an. Jede Periode des i-ten Endes besitzt die gleiche endliche Anzahl Knoten; diese Zahl sei c_i. Für genügend große n liegen auf Γ_n^0 nur Knoten, die zu den periodischen Enden gehören, und zwar liegt von jedem periodischen Ende mindestens ein Knoten auf Γ_n^0. Zu dem i-ten periodischen Ende gehört eine Zahl μ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, mit folgender Eigenschaft: Γ_n^0 verläuft höchstens in den μ_i ersten Perioden des i-ten periodischen Endes. Danach schließt man wegen der Periodizität, daß Γ_{n+1}^0 höchstens in den $2\,\mu_i$ ersten Perioden, $\ldots$, Γ_{n+j}^0 höchstens in den $(j+1)\,\mu_i$ ersten Perioden des i-ten Endes liegt. Wenn K die Anzahl der Knoten des endlichen Kernes bedeutet, dann gilt für $\sigma(n)$ die sehr rohe, aber für unsere Zwecke völlig ausreichende Abschätzung:

$$\sigma(n+j) < K + \sum_{i=1}^{p} (j+1)\,\mu_i c_i < K + \sum_{i=1}^{p} C_i (n+j), \quad C_i = c_i \mu_i .$$

Setzen wir noch $C = \operatorname{Max}_{i=1}^{p} C_i$, so erhalten wir für alle $n \geqq N$, N hinreichend groß:

$$\sigma(n) < K + Cpn \leqq An.$$

---

[9]) R. Nevanlinna [3].

[10]) Wittich [1]; man vergleiche zu diesen Sätzen E. Ullrich [1].

[11]) Elfving [1], auch R. Nevanlinna [2].

[12]) Ullrich [2], [3].

Da hiernach mit $\frac{1}{A}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}$ auch die Reihe $\sum_{N}^{\infty}\frac{1}{\sigma(n)}$ divergiert, gehört nach Satz 1 die Fläche zum parabolischen Typus.

2. R. Nevanlinna [13]) betrachtet als Verallgemeinerung der Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ diejenigen Flächen $\mathfrak{W}(\mathfrak{D}_\varkappa)$, deren Windungspunkte durch die Gebiete $\mathfrak{D}_\varkappa$ getrennt werden. Jede Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{D}_\varkappa)$ wird aus einer Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ so erzeugt: Um jeden Grundpunkt $w = a_\varkappa$ von $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ wird ein Gebiet $\mathfrak{D}_\varkappa$ abgegrenzt; diese Gebiete sollen punktfremd sein. Dann wird die Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ so deformiert, daß die Windungspunkte stetig aus ihren Lagen über den Grundpunkten $w = a_\varkappa$ verschoben werden. Die neuen Spurpunkte sollen aber in den Gebieten $\mathfrak{D}_\varkappa$ liegen. Einem Windungspunkt über $w = a_\varkappa$ entspricht also nach der Deformation ein Windungspunkt gleicher Ordnung über einem Grundpunkt, der in $\mathfrak{D}_\varkappa$ liegt. Man zeigt [14]), daß jede gegebene Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{D}_\varkappa)$ quasikonform in eine passende Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ abgebildet werden kann. Beide Flächen sind also vom gleichen Typus, nach Hilfssatz 2.

Nach R. Nevanlinna gehört zu jeder Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{D}_\varkappa)$ ein Streckenkomplex $\overline{S}$. Den Gebieten $\mathfrak{D}_\varkappa$ entsprechen in der z-Ebene „Eckengebiete" $\mathfrak{D}_\varkappa^{(z)}$. Zieht man die Gebiete $\mathfrak{D}_\varkappa$ auf die Punkte $w = a_\varkappa$ zusammen, so entsteht aus $\overline{S}$ ein Streckenkomplex S, der zu der Fläche $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ gehört, aus der $\mathfrak{W}(\mathfrak{D}_\varkappa)$ durch die angegebene Deformation erzeugt wurde. Zu jeder Generationszahl n gehört auch ein Restkomplex $\overline{S}(n)$ bzw. $\overline{S}_0(n)$ von S; auf dem Rande von $\overline{S}(n)$ bzw. $\overline{S}_0(n)$ liegen $\bar{\sigma}(n)$ bzw. $\bar{\sigma}_0(n)$ Randknoten. Da nun für alle n $\bar{\sigma}(n) \equiv \sigma(n)$ bzw. $\bar{\sigma}_0(n) \equiv \sigma_0(n)$ gilt, und da die entsprechenden Flächen zum gleichen Typus gehören, finden wir den

Satz 3. *Es bedeute $\mathfrak{W}(\mathfrak{D}_\varkappa)$ eine einfach zusammenhängende, unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche, deren Windungspunkte durch q punktfremde Gebiete $\mathfrak{D}_\varkappa$ getrennt werden. Die Zahl der einfach zu zählenden Randknoten von $\overline{S}(n)$ bzw. $\overline{S}_0(n)$ sei $\bar{\sigma}(n)$ bzw. $\bar{\sigma}_0(n)$. Wenn dann die Reihe*

$$\sum_n \frac{1}{\bar{\sigma}(n)} \quad \text{bzw.} \quad \sum_n \frac{1}{\bar{\sigma}_0(n)}$$

divergiert, gehört die Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{D}_\varkappa)$ sicher zum parabolischen Typus.

3. Wir wollen nun zum Schluß noch die Tragweite der Kriterien an einigen Beispielen erproben.

---

[13]) R. Nevanlinna [4], S. 285—287.

[14]) Der Beweis dieser Behauptung ist leicht zu erbringen; eine Beweisskizze findet man bei Kakutani [1].

Zur Beurteilung von Typenkriterien der angegebenen Art pflegt man gern die von der Pe-Funktion erzeugte Riemannsche Fläche heranzuziehen. Die Fig. 3 zeigt den zu dieser Fläche gehörigen Streckenkomplex. Es gilt $\sigma(n) = \sigma_0(n) = 8n - 4$. Satz 1 oder 2 liefert also das bekannte Resultat, daß die von der Pe-Funktion erzeugte Fläche zum parabolischen Typus gehört.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die zu der ganzen Funktion $e^{e^z} = w(z)$ gehörige Fläche. Aus dem entsprechenden Streckenkomplex (Fig. 4) liest man sofort ab: $\sigma(n) = \sigma_0(n) = n^2$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, gibt weder Satz 1 noch Satz 2 eine Aussage über den Typus der betrachteten Fläche. Sie gehört, wie man weiß, zum parabolischen Typus. Man kann auch Flächen mit endlich vielen logarithmischen und unendlich vielen algebraischen Windungspunkten angeben, für die die Sätze 1 und 2 keinerlei Schlüsse auf den Typus gestatten. Auch sie gehören, wie man auf anderem Wege zeigen kann, zum parabolischen Typus.

Fig. 3.

Fig. 4.

Diese Vorkommnisse geben Anlaß zu der Frage: Wie kommt es, daß die abgeleiteten Kriterien bei manchen Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ versagen? Zunächst kann man daran denken, die angegebenen Abschätzungen durch schärfere und den speziellen Streckenkomplexen besser angepaßte Abschätzungen zu ersetzen. Auf diesem Wege kann man tatsächlich einige Ausnahmefälle erledigen. Der Grund des Versagens scheint aber darin zu liegen, daß die Größe $\sigma(n)$ bzw. $\sigma_0(n)$ wenig geeignet ist, das Verhalten der Flächen $\mathfrak{W}(a_\varkappa)$ hinsichtlich ihres Typenverhaltens zu charakterisieren. Nach neueren Ergebnissen scheint es vielmehr so, als ob neben der Verzweigungsstärke der Fläche — dafür sind $\sigma(n)$ und $\sigma_0(n)$ in gewisser Weise ein Maßstab — beim Typenproblem noch andere Komponenten [15]) berücksichtigt werden müssen.

Literaturverzeichnis.

Ahlfors, L.

[1] Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche, Comment. math. Helvet. **3** (1931).

[2] Sur le type d'une surface de Riemann, C. r. Acad. Sci. Paris **201** (1935).

[3] Über eine Klasse von Riemannschen Flächen, Soc. Sci. Fenn. Comment. phys.-math. **9** (1936), Nr. 6, S. 1—5.

[15]) Vgl. die Bemerkung von R. Nevanlinna in [4], Seite 311—312; dazu Blanc [2], Myrberg [1] und Speiser [4].

Ch. Blanc.

[1] Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes, Comment. math. Helvet. 9 (1937).

[2] Une décomposition du probléme des surfaces de Riemann, C. r. Acad. Sci. Paris 206, (1938).

G. Elfving.

[1] Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung, Acta Soc. Sci. fenn. N. s. 2, Nr. 3 (1934).

S. Kakutani.

[1] Applications of the theory of pseudo-regular functions to the type-problem of Riemann surfaces. Japan. J. Math. 13.

[2] Einführung einer Metrik auf die Riemannsche Fläche und der Typus der Riemannschen Fläche, Proc. Imp. Acad. Tokyo 13, S. 89—92.

Z. Kobayashi.

[1] Theorems on the Conformal Representation of Riemann surfaces, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, sect. A, Nr. 39 (1935).

[2] On the Type of Riemann surfaces, Sci. Rep. Tokyo Bunr. Daigaku, sect A, Nr. 42 (1935).

[3] Ein Satz über ein Problem von Herrn Speiser, ebenda Nr. 49 (1935).

[4] A Remark on the Type of Riemann Surfaces, ebenda, Nr. 62 (1937).

P. J. Myrberg.

[1] Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche, Ann. Acad. sci. fenn. A 45. Nr. 3 (1935).

R. Nevanlinna.

[1] Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion, Verh. Internat. Math-Kongr. 1, Zürich 1932.

[2] Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, Acta math. 58 (1932).

[3] Ein Satz über die konforme Abbildung von Riemannschen Flächen, Comment. math. Helvet. 5 (1933).

[4] Eindeutige analytische Funktionen, Grundlehr. d. Math. Wiss. 46, Berlin 1936.

A. Speiser.

[1] Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen, Comment. math. Helvet. 1 (1929).

[2] Über Riemannsche Flächen, ebenda 2 (1930).

[3] Über beschränkte automorphe Funktionen, ebenda 4 (1932).

[4] Riemannsche Flächen vom hyperbolischen Typus, ebenda 10 (1938).

O. Teichmüller.

[1] Eine Anwendung quasikonformer Abbildungen auf das Typenproblem, Deutsche Mathematik, Jahrg. 2, Heft 2.

E. Ullrich.

[1] Über ein Problem von Herrn Speiser, Comment. math. Helvet. 7 (1934).

[2] Zum Umkehrproblem der Werverteilungslehre, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. 1, Nr. 9 (1936).

[3] Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen, Jahresbericht der D. M. V. **46** (1936).

H. Wittich.

[1] Ein Kriterium zur Typenbestimmung von Riemannschen Flächen. Mh. Math. Phys. **44** (1936).

[2] Zur konformen Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Vortrag auf der Jahrestagung der D. M. V. 1936 in Bad Salzbrunn. (Hinweis in Jahresbericht der D. M. V. **47** (1937) und bei Ullrich [3]).

(Eingegangen am 20. Mai 1939.)

Differentialgeometrie der Kugelkomplexe. I.*)

Von

Gerhard Paetz in Berlin.

Inhaltsübersicht.

§ 1. Algebraische Vorbemerkungen. Lineare Kugelkomplexe 670
§ 2. Die Ableitungsgleichungen 674
§ 3. Umgebung erster Ordnung einer Komplexkugel. Invarianten . . 679
§ 4. Der Normalkomplex und der Fall $K = 0$ 684
§ 5. Allgemeine Formeln für Kugelscharen 687
§ 6. Kugelscharen im Komplex 689
§ 7. Reguläre Scharen im Komplex 693
§ 8. Berührungsscharen im Komplex 695
§ 9. Krümmungskomplexe 697
§ 10. Reguläre Hauptkrümmungskomplexe 703

Es handelt sich in der folgenden Arbeit um den Aufbau einer *konformen Differentialgeometrie der Kugelkomplexe* (d. h. der dreiparametrigen Kugelmannigfaltigkeiten); es soll ein Überblick gewonnen werden über die Differentialinvarianten eines Kugelkomplexes gegenüber den konformen Abbildungen des Raumes.

Zur Darstellung einer Kugel des Komplexes werden ihre pentasphärischen wie auch gelegentlich ihre hexasphärischen Koordinaten benutzt, die zu Fünfer- und Sechservektoren zusammengefaßt werden. Man gelangt zu einer begleitenden Basis für diese Vektoren und leitet hieraus zwei quadratische Formen ab, die nur von Ableitungen erster und zweiter Ordnung abhängen, und die den Komplex festlegen. Die Arbeit beschränkt sich auf den Fall, daß eine dieser Formen nichtentartet ist; diese wird dann als Grundform des Riccikalküls benutzt. Es zeigt sich, daß im allgemeinen diese Form allein schon zur Festlegung des Komplexes ausreicht (§ 2).

Der Komplex hat drei unabhängige Invarianten zweiter Ordnung (*Hauptkrümmungen*), sie bestimmen im allgemeinen zusammen mit sechs Invarianten dritter Ordnung ebenfalls den Komplex (§ 3).

---

*) Von der Technischen Hochschule Berlin angenommene Dr.-Ing.-Dissertation (D 83). Referenten: Prof. Dr. R. Rothe und Prof. Dr. W. Haack. Herrn Prof. Rothe und Herrn Prof. Haack, welch letzterer diese Arbeit anregte, möchte ich auch an dieser Stelle für die vielen Förderungen, die sie mir zuteil werden ließen, aufrichtig danken.

Die Untersuchung der „*Krümmung*“ (d. h. der Eigenschaften erster und zweiter Ordnung des Komplexes in gegebener Richtung) erfolgt mit Hilfe von Kugelscharen, die von der Komplexkugel in der gegebenen Richtung ausgehen und ganz im Komplex verlaufen (Analoga des Meusnierschen Satzes in § 6, § 7, § 8). Zur Festlegung einer solchen Schar genügen zwei Invarianten. Man wird hierbei auf gewisse lineare Kugelkomplexe geführt (*Berührungskomplexe*), die den Komplex in der betreffenden Richtung in zweiter Ordnung berühren.

Jedem Kugelkomplex ist eindeutig ein zweiter (der *Normalkomplex*) zugeordnet, dessen Entarten das Verschwinden einer Hauptkrümmung anzeigt (§ 3). Der Begriff des „Normalkomplexes“ wird derart erweitert, daß jeder Kongruenz von Kugelscharen im Komplex eindeutig ein Kugelkomplex zugeordnet werden kann (*Krümmungskomplexe* in § 9). Diese Komplexe erlauben eine invariante Klassifizierung der Stellen eines Komplexes; unter ihnen heben sich drei hervor (*Hauptkrümmungskomplexe*), die zu den Kongruenzen der *Hauptscharen* gehören (§ 6) und zu den Hauptkrümmungen in einfacher Beziehung stehen.

§ 1.

Algebraische Vorbemerkungen. Lineare Kugelkomplexe.

1. Pentasphärische Koordinaten und Fünfervektoren. Um konforme Geometrie treiben zu können, wird der dreidimensionale euklidische Raum durch Einführung eines unendlich fernen Punktes zum Möbiusschen Raume erweitert, so daß man die Ebenen mit zu den Kugeln rechnen kann. Stellt man dann die *regulären und singulären Kugeln* (d. h. die eigentlichen Kugeln und Punkte dieses Raumes) durch *pentasphärische Koordinaten* dar, so kann die konforme (oder Möbiussche) Kugelgeometrie aufgefaßt werden als Invariantentheorie aller linearen homogenen Transformationen dieser pentasphärischen Koordinaten x_i, die die Gleichung

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$$

in sich überführen (Möbiussche Transformationen [1]). Ein System von fünf Größen x_i, die sich bei diesen Transformationen homogen und linear transformieren, heißt ein *Fünfervektor* $\mathfrak{x}$ [2]), dessen einzige Invariante gegenüber den reellen dieser Transformationen das Vorzeichen des Skalarprodukts

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} \equiv -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \tag{1}$$

ist. Diese Fünfervektoren sind eindeutig den Kugeln zugeordnet, und zwar stellt $\mathfrak{x}$ geometrisch einen Punkt dar, wenn $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 0$ ist (*singulärer oder para-*

[1]) W. Blaschke, Vorl. über Differ.-Geom. III (1929) (später zitiert als „Blaschke III“) S. 259.

[2]) Mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet.

bolischer Fünfervektor), sonst eine reelle oder nullteilige Kugel je nach dem Vorzeichen von $\mathfrak{x}\mathfrak{x}$ (*reguläre* (*elliptische und hyperbolische*) *Fünfervektoren*). Die Polarform von (1) bestimmt den Schnittwinkel zweier Kugeln:

$$\cos^2\varphi = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})\cdot(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}. \tag{2}$$

2. Lineare Kugelkomplexe und Sechservektoren. ∞^3 Kugeln bilden einen *linearen Kugelkomplex* (im engeren Sinne, auch *involutorisch* genannt), wenn ihre pentasphärischen Koordinaten x_i einer linearen Gleichung genügen

$$-x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5 \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{a} = 0. \tag{3}$$

Man sieht leicht, daß das System der Koeffizienten a_i ein Fünfervektor ist, womit sich die Bezeichnung $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_5)$ rechtfertigt. Ein solcher Komplex besteht aus allen Kugeln, die eine feste Kugel senkrecht schneiden ($\mathfrak{a}\mathfrak{a} \neq 0$) oder durch einen festen Punkt gehen ($\mathfrak{a}\mathfrak{a} = 0$).

Um nun auch diejenigen Gesamtheiten von Kugeln $\mathfrak{x}$ zu erfassen, die eine feste Kugel unter einem beliebigen, aber festen Winkel schneiden, erweitert man nach (2) die Betrachtung auf eine Gleichung der Form

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{a})^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x})\cdot A^2 = 0, \tag{4}$$

die man bei einer bestimmten Wahl des Vorzeichens der Wurzel auch

$$\mathfrak{x}\mathfrak{a} - \sqrt{\mathfrak{x}\mathfrak{x}}\cdot A = 0 \tag{5}$$

schreiben kann; aus der Invarianz von (4) folgt, daß $\mathfrak{a}$ ein Fünfervektor ist, und daß A sich wie $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ transformiert. Zur weiteren Umformung von (5) führt man Systeme aus sechs Bestimmungsgrößen ein:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}, A) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, A), \quad \mathfrak{B} = (\mathfrak{b}, B) \text{ usw.}, \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Fünfervektoren sind; für diese Systeme wird durch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} - AB \tag{7}$$

ein Skalarprodukt definiert. Verhält sich bei Möbiusschen Transformationen A wie $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$, so transformieren sich die Komponenten von $\mathfrak{A}$ linear und homogen: $\mathfrak{A}$ bildet dann einen *Sechservektor* [3]). Die Sechservektoren entstehen also aus den Fünfervektoren durch Orientierung und durch Hinzufügen einer sechsten Koordinate; um daher eine Schreibweise

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + A\,\mathfrak{P} \tag{8}$$

zu ermöglichen, adjungiert man zu den Fünfervektoren einen „*absoluten*" *Vektor* $\mathfrak{P}$, der bei allen Möbiusschen Transformationen invariant bleibt, und für den zur Wahrung der formalen Gesetze

$$\boxed{\mathfrak{a}\,\mathfrak{P} = 0 \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{P} = -1} \tag{9}$$

[3]) Mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet.

gelten muß. Zwei Arten von Sechservektoren heben sich hervor: das sind erstens die Fünfervektoren mit $\mathfrak{A}\mathfrak{P} = 0$ (*involutorische Sechservektoren*) und zweitens diejenigen mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = 0$ (*singuläre Sechservektoren*). Für letztere gilt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \pm \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}\,\mathfrak{P}. \tag{10}$$

Den beiden Vorzeichen der Wurzel entsprechend gibt es also zu jeder Kugel $\mathfrak{a}$ zwei singuläre Sechservektoren. Um nun auch diese Vektoren eindeutig den Kugeln zuzuordnen, denkt man sich die Kugeln orientiert, so daß jeder nichtorientierten Kugel $\mathfrak{a}$ zwei orientierte entsprechen; die *hexasphärischen Koordinaten* dieser beiden orientierten Kugeln sind gerade die Komponenten von (10) [4]). Die Orientierung, d. h. die Wahl eines Vorzeichens von $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$, ermöglicht auch, statt mit dem unnormierten Vektor $\mathfrak{a}$ mit

$$\hat{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}} \tag{11}$$

zu rechnen.

Mit Hilfe der Sechservektoren kann man (5) vektorisch schreiben:

$$(\mathfrak{x}, \sqrt{\mathfrak{x}\mathfrak{x}})\,(\mathfrak{a}, A) \equiv \mathfrak{X}\mathfrak{A} = 0. \tag{12}$$

Die Gesamtheit aller orientierten Kugeln $\mathfrak{X}$, deren Koordinaten einer solchen Gleichung genügen, wird ebenfalls ein *linearer Kugelkomplex* (im erweiterten Sinne) genannt; ein solcher besteht entweder aus allen Kugeln, die die feste Kugel $\mathfrak{a}$ (*Grundkugel* des Komplexes) unter festem Winkel $\left(\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}}\right)$ schneiden ($\mathfrak{a}\mathfrak{a} \neq 0$), oder aus allen Kugeln mit derselben, von der Normierung von $\mathfrak{a}$ abhängigen Invariante $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{a})^2} = \frac{1}{A^2}$ ($\mathfrak{a}\mathfrak{a} = 0$, $A \neq 0$) oder aus allen Kugeln durch den Punkt $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}\mathfrak{a} = 0$, $A = 0$). Unter diesen Komplexen sind als Sonderfall die Komplexe (3) enthalten. Jeder Sechservektor definiert demnach einen linearen Komplex, dem die orientierte Kugel $\mathfrak{x}$ angehört, wenn (12) gilt.

Hebt man den Charakter von $\mathfrak{P}$ als absoluten Vektor auf, und läßt man alle homogenen linearen Transformationen der hexasphärischen Koordinaten a_i zu, die die Gleichung

$$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 = 0$$

invariant lassen, so geht man zur Lieschen Kugelgeometrie über. Von dieser Erweiterung wird jedoch im folgenden kein Gebrauch gemacht; zugrunde liegt stets die Möbiussche Kugelgeometrie, in der die Sechservektoren zwar entbehrlich, aber doch zur Vereinfachung mancher Rechnungen und Überlegungen nützlich sind.

---

[4]) Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} - \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}\,\mathfrak{P}$ sollen durch zusammengehörige kleine und große deutsche Buchstaben bezeichnet werden.

3. Lineare Mannigfaltigkeiten. Eine *lineare involutorische Kugelmannigfaltigkeit* (*lineare involutorische Kugel-V_n*) wird durch die Gesamtheit aller Fünfervektoren $\mathfrak{x}$ gegeben, die einer Darstellung

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i \mathfrak{x}_i \tag{13}$$

mit den homogenen Parametern λ^i und festen, linear unabhängigen Fünfervektoren $\mathfrak{x}_i$ genügen; $n = 0$ stellt eine Einzelkugel dar, $n = 1$ ein *Kugelbüschel*, $n = 2$ ein *Kugelbündel* und $n = 3$ ein *Kugelgebüsch* [5]). Das überträgt man auch auf Sechservektoren und spricht analog von *linearen Komplex-V_n*

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i \mathfrak{A}_i, \tag{14}$$

wobei wieder $n = 0$ einen einzelnen linearen Komplex gibt, $n = 1$ ein *Komplexbüschel* usw. Der Fall $n = 4$ gibt den *Komplexwald*.

Die singulären Elemente unter den $\mathfrak{x}$ in (13) bzw. unter den $\mathfrak{A}$ in (14) werden durch die Gleichungen $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 0$ bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = 0$ gegeben. Rang r und Trägheitsindex der hierbei auftretenden quadratischen Formen

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \sum_{i,k=1}^{n+1} (\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k)\, \lambda^i \lambda^k, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \sum_{i,k=1}^{n+1} (\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k)\, \lambda^i \lambda^k \tag{15}$$

sind Invarianten gegenüber reellen linearen homogenen Transformationen der $\mathfrak{x}_i$ bzw. $\mathfrak{A}_i$; ist $r = n + 1$, so heißt die Mannigfaltigkeit *regulär*, sonst *singulär*. Die singulären Elemente unter den $\mathfrak{x}$ in (13) sind Punkte, und zwar sind im Kugelbüschel zwei vorhanden, im Kugelbündel ∞^1 (die gemeinsamen Punkte zweier Kugeln) und im Kugelgebüsch ∞^2 (die Punkte einer Kugel). Die singulären Elemente unter den $\mathfrak{A}$ in (14) sind Kugeln und Punkte; ihre Anzahl ist im Komplexbüschel zwei, im Komplexbündel ∞^1 (diese hüllen in allgemeinen eine Dupinsche Zyklide ein: *lineare Kugelschar*), im Komplexgebüsch ∞^2 (alle Kugeln, die zwei feste Kugeln berühren: *lineares Kugelsystem*) und im Komplexwald ∞^3 (alle Kugeln eines linearen Kugelkomplexes). Diese Kugelmannigfaltigkeiten zählt man im erweiterten Sinne ebenfalls zu den linearen; zu ihnen gehören die obengenannten involutorischen linearen Kugel-V_n.

Zwei Kugeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ stehen *senkrecht zueinander*, wenn $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$ ist. Man sieht leicht, daß die Gesamtheit aller Kugeln, die zu den Kugeln einer linearen involutorischen Kugel-V_n orthogonal sind, eine lineare involutorische Kugel-V_{3-n} ist, die mit der ersten zugleich regulär oder singulär ist. Entsprechend heißen zwei lineare Komplexe $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ *zueinander involutorisch*, und man findet analog, daß zu einer linearen Komplex-V_n

[5]) Das Wort „Kugelgebüsch" ist eine andere Bezeichnung für den linearen involutorischen Kugelkomplex. Vgl. R. Sauer, Proj. Liniengeometrie (1937), S. 43 f.

eine lineare Komplex-V_{4-n} involutorisch ist. $\mathfrak{A}$ heißt *schlechthin involutorisch* wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{P} = 0$ gilt; dann ist $\mathfrak{A}$ nach dem obigen ein Fünfervektor.

4. Allgemeine Kugelmannigfaltigkeiten. Eine Gesamtheit von Kugeln deren pentasphärische Koordinaten von n Parametern abhängen, heißt eine *Kugel-*V_n ($n = 0$: Einzelkugel, $n = 1$: *Kugelschar*, $n = 2$: *Kugelsystem*, $n = 3$ *Kugelkomplex*); sind die Parameter unabhängig voneinander, so heißt sie *nichtentartet*, sonst *entartet*. Beispiele bieten die linearen Kugel-V_n. Kann man an einer Stelle eine nichtentartete Kugel-V_n in erster Ordnung durch eine lineare involutorische Kugel-V_n annähern, so heißt erstere an der betreffenden Stelle mit letzterer zugleich *regulär* oder *singulär* (*parabolisch*).

§ 2.

Die Ableitungsgleichungen.

Zunächst werde die in § 1 gegebene Definition für die Zwecke der Differentialgeometrie verschärft:

Definition. *Unter einem Kugelkomplex* ($\mathfrak{x}$) *sei eine von drei Parametern* $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) *abhängige Gesamtheit von Kugeln* $\mathfrak{x}$ *verstanden* ($\mathfrak{x}\mathfrak{x} > 0$); *die fünf Funktionen* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ *sollen in einem Gebiet der* $u^{(i)}$ *wenigstens dreimal stetig differenzierbar sein.*

Wegen der Orientierung der Kugeln hat $\sqrt{\mathfrak{x}\mathfrak{x}}$ ein festes Zeichen, so daß man mit dem normierten Fünfervektor $\mathfrak{x} : \sqrt{\mathfrak{x}\mathfrak{x}}$ rechnen kann. Es sei daher von vornherein $\mathfrak{x}$ in der Normierung $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1$ angenommen, womit auch die Ableitungen $\mathfrak{x}_i = \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i}$ festliegen. Sind diese linear unabhängig, so heißt der Komplex an der betreffenden Stelle *nichtentartet*, andernfalls *entartet*; der letztere Fall werde ausgeschlossen. Die Parameter von $\mathfrak{x}$ werden also voneinander unabhängig angenommen [6]).

Parametertransformationen des Komplexes erscheinen als lineare homogene Transformationen der $\mathfrak{x}_i$ mit nichtverschwindender Determinante; sie lassen die ternäre quadratische Differentialform (*erste Grundform des Komplexes*)

$$(1) \qquad \boxed{(G) \equiv G_{ik}\, du^i du^k = (\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k)\, du^i du^k = d\mathfrak{x} d\mathfrak{x}}$$

sowie den Rang r von deren Diskriminante unverändert. Im allgemeinen ist beim nichtentarteten Komplex $r = 3$ (*regulärer Komplex*); ist $r =$

[6]) Sind die $\mathfrak{x}_i$ für ein Wertetripel der $u^{(i)}$ linear abhängig, so ist der Rang r von $|(\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k)|$ zwei oder eins, und das Bündel $\Sigma \lambda^i \mathfrak{x}_i$ entartet in ein Büschel oder in eine Einzelkugel. Gilt die lineare Abhängigkeit in einem Bereiche der $u^{(i)}$, so entartet der Komplex in ein System ($r = 2$) oder in eine Schar ($r = 1$) oder in eine Einzelkugel ($r = 0$).

singulärer oder parabolischer Komplex), so enthält das Kugelbündel $\sum \lambda^i \mathfrak{x}_i$ einen Punkt, durch den alle anderen Kugeln des Bündels gehen. Man sieht dies sofort, wenn man (G) durch eine lineare Transformation der $\mathfrak{x}_i$ in eine Summe von Quadraten überführt; hierbei erkennt man auch, daß andere Singularitäten als $r = 2$ nicht auftreten können.

Zu den vier Kugeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ steht eine fünfte, $\mathfrak{y}$, senkrecht, die im regulären Fall eine wirkliche Kugel und im singulären ein Punkt ist. $\mathfrak{y}$ heißt die *Normalkugel* und die Kugeln des Bündels $\sum \lambda^i \mathfrak{x}_i$ die *Querkugeln* von $\mathfrak{x}$. Durchläuft $\mathfrak{x}$ den Kugelkomplex $(\mathfrak{x})$ (*Hauptkomplex, abgekürzt HK*), so durchläuft $\mathfrak{y}$ ebenfalls einen Kugelkomplex (*Normalkomplex, abgekürzt NK*); er wird eindeutig aus den Ableitungen erster Ordnung von $\mathfrak{x}$ bestimmt.

Wir nehmen den Fall des nichtentarteten singulären Kugelkomplexes vorweg; es sei also $r = 2$. Durch eine Parametertransformation läßt sich dann stets erreichen, daß G_{13}, G_{23}, G_{33} verschwinden [7]). Man folgert hieraus, daß $\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^3 \partial u^3}$ zu $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ orthogonal ist, und daß $\mathfrak{x}_3$ mit $\mathfrak{y}$ zusammenfällt. Ersteres ist aber nur möglich für

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_3}{\partial u^3} = \lambda \mathfrak{x}_3.$$

Es sind daher die Parameterscharen $u^{(1)} = \text{const}$, $u^{(2)} = \text{const}$ singuläre Kugelbüschel: sie bestehen aus allen Kugeln, die sich im Punkte $\mathfrak{x}_3$ im selben Flächenelement berühren; zu den ∞^3 Kugeln $\mathfrak{x}$ gehören demnach höchstens ∞^2 Punkte $\mathfrak{x}_3$. Wir erhalten so für $\mathfrak{x}$ eine Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0(u^{(1)}, u^{(2)}) + u^{(3)}\, \mathfrak{x}_3(u^{(1)}, u^{(2)}), \quad \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_0 = 1, \quad \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_3 = 0, \quad \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_3 = 0.$$

Wegen

$$\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}_3 = 0, \qquad \mathfrak{x} \frac{\partial \mathfrak{x}_3}{\partial u^1} = 0, \qquad \mathfrak{x} \frac{\partial \mathfrak{x}_3}{\partial u^2} = 0$$

enthält $\mathfrak{x}$ in erster Ordnung alle zu $\mathfrak{x}_3$ benachbarten Punkte. Untersucht man, wann die $\mathfrak{x}_3$ eine Fläche bzw. eine Kurve bilden und wann $\mathfrak{x}_3$ konstant ist, so gelangt man zu

Satz 1. *Ein nichtentarteter singulärer Kugelkomplex besteht aus allen Kugeln, die entweder eine Fläche oder eine Kurve berühren oder die alle durch einen festen Punkt gehen. Die Umkehrungen gelten ebenfalls.*

---

[7]) Bei Übergang von den $u^{(i)}$ zu anderen Parametern $\bar{u}^{(i)}$ transformieren sich die G_{ik} in $\bar{G}_{pq} = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^p} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^q} G_{ik}$. G_{13}, G_{23}, G_{33} verschwinden, wenn man die $\bar{u}^{(i)}$ als Funktionen der $u^{(i)}$ aus folgendem System von partiellen Differentialgleichungen bestimmt: $\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^3} = Q_3^i(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$, worin die rechten Seiten aus $Q_3^i G_{ik} = 0$ wegen $r = 2$ als nicht identisch verschwindende Funktionen der $u^{(i)}$ berechnet werden. Vgl. R. Sauer, Proj. Liniengeometrie (1937), S. 166.

Im folgenden wird von den nichtentarteten nur der reguläre Kugelkomplex untersucht, so daß der Rang von (G) an jeder Stelle drei ist. Um die Wahl der Parameter frei zu halten, kann also (G) als Grundform des Riccikalküls benutzt werden; das soll im folgenden ebenfalls geschehen [8]). Beschränkt man sich auf reelle Parametertransformationen, so gabelt sich bei reellem $\mathfrak{x}$ der reguläre Fall nach dem Trägheitsindex t von (1). Für $t = 1$ enthält das Kugelbündel $\sum \lambda^i \mathfrak{x}_i$ reelle Punkte (*hyperbolischer Komplex*), für $t = 0$ nicht (*elliptischer Komplex*). *Um nun für die regulären Komplexe die Formeln durch Berücksichtigung der Realität nicht unnötig zu spezialisieren, werde der Vektor der Normalkugel durch*

$$\mathfrak{y}\mathfrak{y} = \iota = \pm 1 \tag{2}$$

normiert, so daß $\iota = +1$ den hyperbolischen und $\iota = -1$ den elliptischen Fall kennzeichnet; *die geometrische Deutung wird sich jedoch stets auf den hyperbolischen Komplex beziehen.*

Wegen ihrer linearen Unabhängigkeit bilden $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}_i$, eine *begleitende Basis* des Kugelkomplexes für alle Fünfervektoren, zu der wir nach § 1 noch den Sechservektor $\mathfrak{P}$ hinzufügen. Für die skalaren Produkte besteht folgende Tabelle:

(3)

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{x}_k$	$\mathfrak{P}$
$\mathfrak{x}$	1	0	0	0
$\mathfrak{y}$	0	ι	0	0
$\mathfrak{x}_i$	0	0	G_{ik}	0
$\mathfrak{P}$	0	0	0	-1

Beachtet man, daß nach dem Satze von Ricci $\mathfrak{x}_{ik}\,\mathfrak{x}_l = 0$ gilt, so folgert man aus dieser Tabelle die *Ableitungsgleichungen* der Basisvektoren:

(4)

$$\boxed{\begin{aligned} \iota\,\mathfrak{y}_i &= H_{ik}\,\mathfrak{x}^k, \\ \mathfrak{x}_{ik} &= -G_{ik}\,\mathfrak{x} - H_{ik}\,\mathfrak{y}, \end{aligned}}$$

wobei die ersten Gleichungen die Definition des symmetrischen Tensors H_{ik} geben. Es tritt also neben der quadratischen Differentialform (G) eine zweite auf (*zweite Grundform des Komplexes*)

(5)

$$\boxed{(H) \equiv H_{ik}\,du^i\,du^k = \iota\,(\mathfrak{y}_i\,\mathfrak{x}_k)\,du^i\,du^k = \iota\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{x}.}$$

Zu den Ableitungsgleichungen sind die Integrabilitätsbedingungen

(6)

$$\begin{aligned} &\mathfrak{y}_{ik} = \mathfrak{y}_{ki} \\ &\mathfrak{x}_{ikl} = \mathfrak{x}_{ilk} + R_{lkim}\,\mathfrak{x}^m \end{aligned}$$

---

[8]) Die kovariante Ableitung einer Größe Φ wird mit $\nabla_i \Phi$ oder mit Φ_i bezeichnet. Über zweimal in einem Produkt vorkommende *lateinische* Indizes wird wie üblich summiert; Hinauf- und Herunterziehen der Indizes bezieht sich stets auf den Tensor G_{ik}.

ufzustellen, wo R_{iklm} der Riemannsche Krümmungstensor der Form (G) ist,

7) $$R_{iklm} = \frac{\partial \Gamma_{ilk}}{\partial u^m} - \frac{\partial \Gamma_{imk}}{\partial u^l} + \Gamma_{ims}\,\Gamma^s_{kl} - \Gamma_{ils}\,\Gamma^s_{km},$$

nd Γ_{ikl} das Christoffelsche Dreizeigersymbol darstellt:

8) $$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial G_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial G_{ik}}{\partial u^l}\right), \qquad \Gamma^s_{ik} = G^{sl}\Gamma_{ikl}.$$

Man folgert aus den Ableitungsgleichungen (4)

9) $$\begin{cases} \iota\mathfrak{y}_{ik} = -H_{il}H^l_k\,\mathfrak{y} - H_{ik}\,\mathfrak{x} + H_{ilk}\,\mathfrak{x}^l, \\ \mathfrak{x}_{ikl} = -H_{ikl}\,\mathfrak{y} - (G_{ik}G_{lm} + \iota H_{ik}H_{lm})\,\mathfrak{x}^m. \end{cases}$$

Verglichen mit (6) gibt (9_1), außer der schon bekannten Symmetrie von H_{ik}, die sieben Gleichungen

10) $$\boxed{H_{ilk} = H_{ikl} = H_{lik}.}$$

Der Tensor H_{ikl} ist daher in allen Indizes symmetrisch, er hat höchstens zehn verschiedene Komponenten. Weiter gibt (6) aus (9_2) an neuen Forderungen

11) $$R_{iklm} = (G_{il}G_{km} - G_{im}G_{kl}) + \iota\,(H_{il}H_{km} - H_{im}H_{kl}).$$

R_{iklm} hat im Dreidimensionalen, vom Vorzeichen abgesehen, höchstens sechs verschiedene Komponenten, die man in dem symmetrischen Tensor von Ricci

12) $$R^{st} = \tfrac{1}{4}\,E^{sik}E^{tlm}R_{iklm}$$

zusammenfaßt. E^{ikl} ist der ε-Tensor des Riccikalküls:

$$E^{ikl} = [ikl]:\sqrt{-\iota\,|G_{ik}|},$$

wo $[ikl] = 0, +1, -1$ ist, je nachdem, ob zwei der Indizes i, k, l einander gleich sind, oder ob die Permutation (ikl) gerade oder ungerade ist. Für diesen Tensor gilt die Identität

13) $$E^{ikl}E_{mnl} = -\iota\,(G^i_m G^k_n - G^i_n G^k_m),$$

mit deren Hilfe aus (11)

14) $$R^{st} = -\iota G^{st} + \frac{\iota}{2}\,E^{sik}E^{tlm}H_{il}H_{km}$$

folgt. Die Komponenten des zweiten Tensors rechts sind die Unterdeterminanten von $|H_{ik}|$, dividiert durch $|G_{ik}|$. Denn führt man die Bezeichnung

15) $$\boxed{\underline{H}^{st} = -\frac{\iota}{2}\,E^{sik}E^{tlm}H_{il}H_{km}}$$

ein, so wird

16) $$K \equiv \frac{|H_{ik}|}{|G_{ik}|} = \frac{1}{3}\,H_{rs}\underline{H}^{rs}.$$

Die Integrabilitätsbedingung (14) nimmt damit die endgültige Form an:

$$-R_{ik} = \iota G_{ik} + \underline{H}_{ik}, \tag{17}$$

Man kann jetzt den *Fundamentalsatz* aussprechen:

Satz 2. *Der reguläre Kugelkomplex wird bis auf Möbiussche Transformationen durch zwei quadratische Formen* (G) *und* (H) *mit* $|G_{ik}| \neq 0$ *bestimmt, sofern deren Koeffizienten den Bedingungen* (10) *und* (17) *genügen.*

D. h. es gibt bei derartig gegebenen G_{ik} und H_{ik} als Funktionen der $u^{(i)}$ genau einen regulären Kugelkomplex durch eine gegebene Anfangslage der Basis (3), der (G) und (H) als erste und zweite Grundform hat. Gilt dann für die Anfangslage die Tabelle (3), so gilt sie für alle $u^{(i)}$: es wird also zugleich die Normierung von $\mathfrak{x}$ festgelegt. Die G_{ik} seien als wenigstens zweimal, die H_{ik} als wenigstens einmal, also die $\mathfrak{x}$ als wenigstens dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Der Beweis wird in bekannter Weise geführt, indem man mit Hilfe von (4) ein System von linearen Differentialgleichungen für die Basisvektoren aufstellt; die Bedingungen (10) und (17) erweisen sich als die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems.

Man wird danach fragen, wann ein Komplex verbiegbar ist, und wann er schon durch die eine Form (G) bestimmt ist. Die Bedingung (17) erlaubt, $\underline{H}_{ik}$ (d. h. die Unterdeterminanten von $|H_{ik}|$) allein aus den G_{ik} und deren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung zu berechnen. Für $K \neq 0$ ist hieraus die Bestimmung der H_{ik} möglich:

$$K \cdot H_{ik} = -\frac{\iota}{2} E_{ipq} E_{klm} H^{pl} \underline{H}^{qm}, \tag{18}$$

wobei K sich aus

$$K^2 = |\underline{H}_{ik}| : |G_{ik}|$$

berechnet. Hier erscheint noch das Vorzeichen von H_{ik} unbestimmt; der Übergang von H_{ik} zu $-H_{ik}$ bedeutet aber nach (5) einen Vorzeichenwechsel von $d\mathfrak{x}$, also eine Umorientierung aller Kugeln $\mathfrak{x}$, was für die Möbiussche Geometrie nur formale Bedeutung hat. $K = 0$ dagegen besagt, daß die Vektoren $\mathfrak{y}_i$ linear abhängig sind: d. h. der Normalkomplex ist entartet.

Satz 3. *Ein regulärer Kugelkomplex, dessen NK. nicht entartet ist, wird schon durch seine erste Grundform* (G) *allein bestimmt (bis auf konforme Abbildungen).* (G) *ist aber nicht willkürlich, da die Bedingungen* (10) *erfüllt sein müssen. Die* G_{ik} *müssen hierbei als wenigstens dreimal stetig differenzierbar angenommen werden.*

Verbiegung ist also nur für $K = 0$ möglich.

Kennzeichnend dafür, daß die dreidimensionale Mannigfaltigkeit des Parameterraumes der $u^{(i)}$ konstante Riemannsche Krümmung hat, ist

$$R_{ik} = -\left(\iota + \frac{J}{3}\right) G_{ik} \tag{19}$$

mit konstantem J [9]), woraus wegen (17) folgt

$$\underline{H}_{ik} = \frac{J}{3} G_{ik}, \quad K = \sqrt{\frac{J^3}{27}},$$

und für $J \neq 0$

(20) $$H_{ik} = \sqrt{\frac{J}{3}} G_{ik}.$$

Komplexstellen, an denen die Fundamentaltensoren einander proportional sind, seien *Flachstellen* genannt; unser Komplex hat also nur solche. Nach (4) ergibt sich mit konstantem $\mathfrak{c}$:

(21) $$\mathfrak{y} = \iota \sqrt{\frac{J}{3}}\, \mathfrak{x} - \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{c}\mathfrak{x} = \iota \sqrt{\frac{J}{3}}, \qquad \mathfrak{c}\mathfrak{c} = \iota + \frac{J}{3}.$$

$(\mathfrak{x})$ ist also ein linearer Kugelkomplex; umgekehrt folgt für einen solchen wieder (19). Gilt andererseits für einen Komplex stets (20), so folgt mit Hilfe von (10), daß J konstant sein muß:

Satz 4. *Die einzigen regulären Kugelkomplexe, die nur Flachstellen aufweisen, sind die regulären linearen Kugelkomplexe.*

Der Krümmungstensor R_{iklm} verschwindet identisch, wenn $J = -3\iota$ ist: dann ist $\mathfrak{c}$ ein Punkt, den wir mit irgendeiner Normierung als unendlich fernen Punkt wählen können (bei Übergang zur metrischen Kugelgeometrie), so daß $(\mathfrak{x})$ als Komplex aller Kugeln mit demselben Radius erscheint, also im wesentlichen mit dem euklidischen Raum identisch ist.

Den noch ausstehenden Fall $K = J = 0$ betrachten wir in § 4.

§ 3.

Umgebung erster Ordnung einer Komplexkugel. Invarianten.

Die *Umgebung erster Ordnung* von $(\mathfrak{x})$ wird durch $\mathfrak{x}$ und seine Ableitungen $\mathfrak{x}_i$ bestimmt. An linearen Kugelmannigfaltigkeiten, die zu $\mathfrak{x}$ und in erster Ordnung auch zu allen Nachbarkugeln senkrecht stehen, gibt es nach § 2 nur eine: die Normalkugel $\mathfrak{y}$. Für diejenigen linearen Kugelkomplexe durch $\mathfrak{x}$, die alle Nachbarkugeln in erster Ordnung enthalten, findet man

(1) $$\mathfrak{B} = \alpha\mathfrak{X} + \beta\mathfrak{y} = \alpha(\mathfrak{x} - \mathfrak{P}) + \beta\mathfrak{y}$$ [10])

(α, β sind homogene Parameter). *Die linearen Berührungskomplexe von $\mathfrak{x}$ bilden also ein Komplexbüschel, dessen einziger involutorischer (also Möbiusgeometrisch ausgezeichneter) Komplex durch den Fünfervektor $\mathfrak{y}$ dargestellt wird*; dieser ausgezeichnete lineare Kugelkomplex besteht aus den Orthogonal-

[9]) T. Levi-Cività, Absol. Differ.-Kalkül (1928), S. 135.

[10]) Die Berührungskomplexe sind in ihrer Gesamtheit (aber i. a. nicht einzeln) ie-geometrisch invariant mit $\mathfrak{x}$ verbunden. Bei singulärem $(\mathfrak{x})$ werden die linearen erührungskomplexe auch durch (1) gegeben mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \iota = 0$.

kugeln der Normalkugel $\mathfrak{y}$. Das Büschel (1) bestimmt ein *Berührungssystem*, bestehend aus allen Kugeln, die in allen $\mathfrak{B}$ enthalten sind: das sind die Kugeln, die $\mathfrak{x}$ im Schnittkreis mit $\mathfrak{y}$ (*Trajektorienkreis* [11])) berühren. Hierzu gehören auch die Punkte des Trajektorienkreises, d. h. die singulären Kugeln des Querkugelbündels $\Sigma \lambda^i \mathfrak{x}_i$. Nach § 2 sind alle Querkugeln zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ senkrecht, sie gehen also auch durch die singulären Kugeln $\mathfrak{x} \pm \sqrt{-\iota}\,\mathfrak{y}$ des durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmten Kugelbüschels (*Zentralpunkte*).

Eine *Fortschreitungsrichtung* im Komplex wird analytisch durch den Vektor du^i, geometrisch durch die Querkugel $d\mathfrak{x} = du^i \mathfrak{x}_i$ festgelegt, die zu $\mathfrak{x}$ senkrecht ist und $\mathfrak{x}$ im *Querkreis* schneidet. Zwei Richtungen du^i, $\overline{du^i}$ heißen insbesondere *orthogonal*, wenn $du^i G_{ik} \overline{du^k} = 0$, und *konjugiert*, wenn $du^i H_{ik} \overline{du^k} = 0$ gilt. Für die Schnittwinkel φ und ψ mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ einer zu $\mathfrak{x}$ in Richtung du^i benachbarten Komplexkugel findet man bis auf Größen von höherer als erster Ordnung

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi^2 \approx du^i G_{ik}\, du^k = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}, \\ \dfrac{\pi}{2} - \psi \approx -\dfrac{\sqrt{\iota}}{2} du^i H_{ik}\, du^k = -\iota \dfrac{\sqrt{\iota}}{2} d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}. \end{cases}$$

Man hat daher bei den Fortschreitungsrichtungen zu unterscheiden, ob die Querkugel eine wirkliche Kugel ist (*reguläre Richtung*) oder ein Punkt (*singuläre, parabolische oder Berührungsrichtung*). In einer regulären Richtung schneiden sich benachbarte Komplexkugeln unter dem Winkel $\varphi \neq 0$ (φ reell oder imaginär: *elliptische* oder *hyperbolische Richtung*), und ihr Schnittkreis ist der Querkreis; längs einer parabolischen Richtung berühren sich benachbarte Komplexkugeln im Punkte $d\mathfrak{x}$.

Für die ∞^2 Fortschreitungsrichtung, die von $\mathfrak{x}$ ausgehen, gewinnt man eine bequeme Übersicht, wenn man die du^i als homogene Punktkoordinaten in einer Hilfsebene E auffaßt, so daß eine Parametertransformation des Komplexes als eine Kollineation dieser Ebene erscheint [12]). Diese Hilfskonstruktion ist vor allem dann von Nutzen, wenn man nach den unabhängigen Invarianten des Komplexes bis zur n-ten Ordnung fragt, wozu man alle in den Ableitungen entsprechend hoher Ordnung von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}_i$ auftretenden Tensoren $T_{i_1 \ldots i_m}$ zu betrachten hat. Jedem solchen symmetrischen Tensor z. B. entspricht in E eine Kurve

$$(3) \qquad T_{i_1 \ldots i_m}\, du^{i_1} \ldots du^{i_m} = 0,$$

und da von erster Ordnung allein der Kegelschnitt

$$(4) \qquad (G) \equiv G_{ik}\, du^i\, du^k = 0$$

---

[11]) F. Klein, Vorl. über Höh. Geom. (3. Aufl. 1926), S. 258.

[12]) W. Haack, Differ.-Geom. d. Strahl.-Komplexe I, Math. Zeitschr. **40**, S. 563.

ist, sind die Invarianten des Komplexes bis zur n-ten Ordnung die Invarianten und Simultaninvarianten aller bis zu dieser Ordnung auftretenden Kurven (3) gegenüber projektiven Abbildungen von E, die (4) invariant lassen. Damit ist die Invariantentheorie des Komplexes auf ein Problem der ebenen hyperbolischen [13]) Geometrie zurückgeführt. Die Hilfsebene E findet ihre geometrische Darstellung in der Hauptkugel $\mathfrak{x}$. Denn halten wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vorübergehend fest, so können wir spezielle pentasphärische Koordinaten einführen mit $\mathfrak{x} = (0, 0, 0, 0, 1)$, $\mathfrak{y} = (0, 0, 0, 1, 0)$, wodurch die Koordinaten du^i der Querkugeln $du^i \mathfrak{x}_i$ nicht berührt werden: sie werden tetrazyklische Koordinaten der Querkreise auf $\mathfrak{x}$. Da nun die du^i in E sowohl als Koordinaten eines Punktes als auch als Koordinaten von dessen Polaren in bezug auf (4) aufgefaßt werden können, so folgt, *daß die Gruppe der Parametertransformationen des Komplexes auf $\mathfrak{x}$ die Gruppe der hyperbolischen* [13]) *Bewegungen mit dem Trajektorienkreis als absoluten Kreis erzeugt. $\mathfrak{x}$ ist daher das Poincarésche Bild der hyperbolischen Ebene E* [14]).

Von zweiter Ordnung sind die Ableitungsgleichungen (2. 4), sie geben den Kegelschnitt

$$(H) \equiv H_{ik}\, du^i\, du^k = 0. \tag{5}$$

Die beiden Kegelschnitte (4) und (5) haben drei Simultaninvarianten; denn betrachtet man das Kegelschnittbüschel

$$(-\nu G_{ik} + H_{ik})\, du^i\, du^k = 0, \tag{6}$$

so kann man bekanntlich als vollständiges Invariantensystem von (4) und (5) die Wurzeln ν ($\alpha = 1, 2, 3$; *Hauptkrümmungen des Komplexes*) der charakteristischen Gleichung von H_{ik},

$$|-\underset{\alpha}{\nu} G_{ik} + H_{ik}| = 0 \tag{7}$$

oder

$$\underset{\alpha}{\nu}{}^3 - H \underset{\alpha}{\nu}{}^2 + J \underset{\alpha}{\nu} - K = 0 \tag{8}$$

wählen. Die in (8) auftretenden *mittleren Krümmungen des Komplexes*

$$\boxed{\begin{aligned} H &= H_{ik} G^{ik} = \underset{1}{\nu} + \underset{2}{\nu} + \underset{3}{\nu}, \\ J &= \underline{H}_{ik} G^{ik} = \underset{1\,2}{\nu\,\nu} + \underset{2\,3}{\nu\,\nu} + \underset{3\,1}{\nu\,\nu}, \\ K &= \tfrac{1}{3} \underline{H}_{ik} H^{ik} = \underset{1\,2\,3}{\nu\,\nu\,\nu} \end{aligned}} \tag{9}$$

bilden ein vollständiges *rationales* Invariantensystem, ebenso die drei ersten Potenzsummen der $\underset{\alpha}{\nu}$,

$$A = H_i^i = H, \quad B = H_{ik} H^{ik}, \quad C = H_{ik} H^{kl} H_l^i, \tag{10}$$

[13]) Für $\iota = +1$, elliptischen für $\iota = -1$.

[14]) Blaschke III, S. 76 f.

die sich ganz rational durch H, J, K (und umgekehrt diese durch A, B, C) ausdrücken lassen. Die Hauptkrümmungen bestimmen durch die Gleichungen

$$\underset{\alpha}{n^i}\,(-\underset{\alpha}{\nu} G_{ik} + H_{ik}) = 0 \tag{11}$$

in der Ebene E den Schnittpunkt des zu $\underset{\alpha}{\nu}$ gehörenden Geradenpaares des genannten Kegelschnittbüschels; die Richtungen $\underset{\alpha}{n^i}$ des Komplexes, die diesen Punkten entsprechen, heißen *Hauptrichtungen*. Man erkennt leicht, daß zu verschiedenen Hauptkrümmungen verschiedene Hauptrichtungen gehören, und daß Hauptrichtungen zu verschiedenem $\underset{\alpha}{\nu}$ zueinander orthogonal und konjugiert sind.

Wir werden im folgenden öfters die Bezeichnung

$$\underset{\alpha}{B_{ik}} = -\underset{\alpha}{\nu} G_{ik} + H_{ik} \tag{12}$$

verwenden. Wegen (7) muß es Hilfsgrößen a_i, b_k geben, so daß man auch

$$\underset{\alpha}{B_{ik}} = \tfrac{1}{2}(a_i b_k + a_k b_i) \tag{13}$$

schreiben kann; setzt man dann noch

$$\begin{cases} \underset{\alpha}{h} \equiv \underset{\alpha}{B^{ik}} G_{ik} = a_i b^i, \\ \underset{\alpha}{j} \equiv \underset{\alpha}{\underline{B}^{ik}} G_{ik} = -\tfrac{1}{4}[(a_i a^i)(b_k b^k) - (a_i b^i)^2], \end{cases} \tag{14}$$

so folgt unter Benutzung von (2. 15)

$$\underset{\alpha}{\underline{B}_{ik}} \equiv -\frac{\iota}{2} E_{ipq} E_{klm} \underset{\alpha}{B^{pl}} \underset{\alpha}{B^{qm}} = \frac{\iota}{4} E_{ipq} E_{klm} a^p b^l a^q b^m,$$

$$\underset{\alpha}{B_{il}\underline{B}^l_k} \equiv -\frac{\iota}{2} E_{ipq} E_{klm} \underset{\alpha}{B^{pn}} \underset{\alpha}{B^l_n} \underset{\alpha}{B^{qv}} \underset{\alpha}{B^m_v} = \underset{\alpha}{j} \cdot \underset{\alpha}{\underline{B}_{ik}}.$$

Man gewinnt hieraus eine parameterinvariante *Einteilung der Komplexstellen*:

(15)

	Rang $\underset{1}{B_{ik}}$	Rang $\underset{1}{B_{il}}\underset{1}{B^l_k}$	Anzahl der $\underset{1}{n^i}$		Art des Kegelschnittes $(B)=0$ in E
Gewöhnliche Stellen: $\underset{1}{j} \neq 0$.					
a) $\underset{1}{\nu} \neq \underset{2}{\nu} \neq \underset{3}{\nu}$	2	2	1		Einfaches Geradenpaar
Außergewöhnliche Stellen: $\underset{1}{j} = 0$.					
b_1) $\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} \neq \underset{3}{\nu}$	2	1	1	$\underset{1}{h} \neq 0$	Doppeltzählendes Geradenpaar
b_2) $\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} \neq \underset{3}{\nu}$	1	1	Büschel	$\underset{1}{h} \neq 0$	Doppeltzählende Doppelgerade
b_3) $\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} = \underset{3}{\nu}$	2	1	1	$\underset{1}{h} = 0$	Dreifachzählendes Geradenpaar
b_4) $\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} = \underset{3}{\nu}$	1	0	Büschel	$\underset{1}{h} = 0$	Dreifachzählende Doppelgerade
Flachstellen: $\underset{1}{j} = \underset{1}{h} = 0$, $H_{ik} = \underset{1}{\nu} G_{ik}$.					
c) $\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} = \underset{3}{\nu}$	0	0	∞^2		

Fig. 1 zeigt die Ebene E für eine gewöhnliche Stelle. Kennzeichnend für außergewöhnliche Stellen ist, daß wenigstens eine Hauptrichtung parabolisch ist. An gewöhnlichen Stellen vertauscht eine Parametertransformation im allgemeinen die Hauptkrümmungen untereinander; die Größen $\underset{\alpha}{B}_{ik}$ sind also keine Tensoren gegenüber der vollen Gruppe der Parametersubstitutionen. Dagegen ist in den Fällen $b_1)$, ... $b_4)$, $c)$ $\underset{1}{B}_{ik}$ ein echter Tensor.

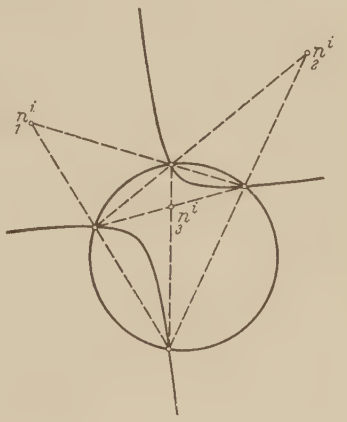


Fig. 1.

Die Einteilung der Fortschreitungsrichtungen des Komplexes in elliptische, parabolische und hyperbolische entspricht der Einteilung der Punkte von E in solche außerhalb, auf und innerhalb $(G) = 0$. Die Berührungsrichtungen sind also die Nullrichtungen von G_{ik}; ebenso entsprechen den Punkten von (5) die Nullrichtungen des Tensors H_{ik}. Die Hauptrichtungen erscheinen als die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks der Kegelschnitte (4) und (5); die Schnittpunkte dieser Kegelschnitte geben besondere Berührungsrichtungen des Komplexes (*Schmiegungsrichtungen*).

Um Invarianten dritter Ordnung zu erhalten, muß man die Ableitungen (2. 9) für $\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{x}_{ik}$ hinzunehmen, wobei an neuen Tensoren nur H_{ikl} auftritt. Überschiebt man diesen der Reihe nach mit $G^{ik}, H^{ik}, H^{im}H^k_m$, so erhält man drei Vektoren, die nach (10) die Ableitungen von A, B, C sind:

$$A_l = H_{ikl}G^{ik}, \qquad B_l = 2\,H_{ikl}H^{ik}, \qquad C_l = 3\,H_{ikl}H^{im}H^k_m. \tag{16}$$

In den gegenseitigen Überschiebungen dieser Vektoren,

$$A^lA_l = A_lG^{lk}A_k, \qquad A^lB_l = A_lG^{lk}B_k \quad \text{usw.}, \tag{17}$$

erhalten wir die einfachsten Invarianten dritter Ordnung. Sind nun A, B, C voneinander unabhängige Funktionen der $u^{(i)}$, so bilden A_l, B_l, C_l in der Ebene E die Seiten eines Koordinatendreiecks, auf das bezogen G^{ik} gerade die Komponenten (17) hat. Da im Falle $K = 0$ bestimmt nicht die Unabhängigkeit von A, B, C gilt, läßt sich Satz 3 anwenden:

Satz 5. *Ein regulärer Kugelkomplex ist (bis auf konforme Abbildungen) festgelegt, wenn man die Invarianten A, B, C und alle Skalarprodukte ihrer Ableitungen als Funktionen der $u^{(i)}$ kennt, falls nur erstere voneinander unabhängig sind.*

Eine ähnliche Aussage gilt für die $\underset{\alpha}{\nu}$: ein regulärer Komplex mit nur gewöhnlichen Stellen wird durch seine Hauptkrümmungen und durch deren

Ableitungen nach den Hauptrichtungen, $\underset{\alpha}{n^i} \nabla_i \underset{\beta}{y}$, festgelegt, falls nur $|\underset{\alpha}{n^i} \nabla_i \underset{\beta}{y}| \neq 0$ ist. Die beiden Voraussetzungen dieser Aussage sind identisch mit der Bedingung von Satz 5; beide Behauptungen treffen also gleichzeitig zu. Daß hier neun Invarianten dritter Ordnung auftreten und in Satz 5 nur sechs, liegt daran, daß mit den $\underset{\alpha}{n^i} \nabla_i \underset{\beta}{y}$ zugleich eine Normierung der Hauptrichtungen festgelegt wird. Satz 5 setzt A, B, C als wenigstens viermal, die Invarianten (17) als wenigstens dreimal stetig differenzierbar voraus.

§ 4.

Der Normalkomplex und der Fall $K = 0$.

Wir wissen, daß der HK. eindeutig den NK. bestimmt; es soll untersucht werden, inwieweit das Umgekehrte gilt, und welche Kugelkomplexe überhaupt Normalkomplexe sein können. Gegeben sei also eine Kugelmannigfaltigkeit mit $n \leqq 3$ unabhängigen Parametern

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}), \qquad \mathfrak{y}\mathfrak{y} \neq 0;$$

wir wollen hierzu alle Kugelkomplexe $(\mathfrak{x})$ bestimmen, für die $(\mathfrak{y})$ NK. ist. Dazu müssen nach § 2 die Bedingungen gelten

$$(1) \qquad \mathfrak{y}\mathfrak{x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v^\beta}\mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1 \qquad (\beta = 1, \ldots, n).$$

Es seien die Fünfervektoren $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{4-n}$ linear unabhängig und orthogonal zu $\mathfrak{y}$ und $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v^\beta}$; dann wird (1) gelöst durch

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = \sum_{\lambda=1}^{4-n} b^\lambda \mathfrak{b}_\lambda (v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}).$$

Die Bedingung $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1$ läßt unter den Parametern b^λ genau $3 - n$ unabhängig, so daß $\mathfrak{x}$ von drei Parametern abhängt. Sind diese Parameter unabhängig (d. h. sind die Ableitungen von $\mathfrak{x}$ nach ihnen linear unabhängige Vektoren), so ist $(\mathfrak{x})$ ein nichtentarteter Komplex, der wegen $\mathfrak{y}\mathfrak{y} \neq 0$ auch regulär ist. Sein NK. ist $(\mathfrak{y})$, und umgekehrt ist er NK. von $(\mathfrak{y})$:

Satz 6. *Von den beiden Kugelkomplexen* $(\mathfrak{x})$ *und* $(\mathfrak{y})$ *ist jeder der Normalkomplex des andern, falls wenigstens einer regulär ist.*

Der Fall entarteten Normalkomplexes, also $K = 0$, liefert nach § 2 die verbiegbaren Komplexe, so daß er besonderes Interesse beansprucht. Man findet, wenn man (2) für $n = 0, 1, 2, 3$ einzeln aufstellt:

Satz 7. *Entartet der NK., so zerfällt der HK. in lineare involutorische Kugelmannigfaltigkeiten.* Genauer: *Ist* $(\mathfrak{y})$ *eine Einzelkugel, so besteht* $(\mathfrak{x})$ *aus den zu* $\mathfrak{y}$ *senkrechten Kugeln. Ist* $(\mathfrak{y})$ *eine Schar, so besteht* $(\mathfrak{x})$ *aus den Normal-*

bündeln dieser Schar. Ist (𝔶) *ein System, so besteht* (𝔵) *aus den Normalbüscheln dieses Systems. Die Umkehrungen gelten ebenfalls* [15]).

Ist (𝔶) nichtentartet, so ist das Entsprechen von (𝔵) und (𝔶) vollkommen: (𝔵) besteht aus den Normalkugeln von (𝔶), und (𝔶) aus denen von (𝔵). Man hat in Satz 7 eine Möglichkeit zur Herleitung der verbiegbaren Kugelkomplexe aus Kugelmannigfaltigkeiten niederer Dimension. Damit (𝔵) nicht entartet, sind für die einzelnen Dimensionen von (𝔶) folgende Fälle auszuschließen:

$n = 1$: (𝔶) darf keine Schar aus einem Kugelgebüsch sein;

$n = 2$: (𝔶) darf weder ein System in einem Kugelgebüsch sein, noch darf es aus ∞^1 Kugelscharen aus Kugelbündeln bestehen;

$n = 3$: (𝔶) darf kein Kugelgebüsch oder ein singulärer nichtentarteter Komplex sein, es darf weder aus den Normalbündeln einer Kugelschar noch aus den Normalbüscheln eines Kugelsystems bestehen.

Jede andere Kugelmannigfaltigkeit als die aufgezählten ist NK. eines regulären Komplexes.

Den Zusammenhang mit den Invarianten von § 3 stellt folgender Satz her:

Satz 8. *Der NK. entartet, wenn mindestens eine Hauptkrümmung verschwindet.* Genauer: *Es sei r der Rang von H_{ik}. Ist $r = 2$, so entartet der NK. in ein System mit zwei Hüllflächen, wenn genau eine, mit einer Hüllfläche, wenn genau zwei, und mit einem Hüllstreifen, wenn genau drei Hauptkrümmungen verschwinden. Ist $r = 1$, so entartet der NK. in eine Schar mit einer Hüllfläche, wenn genau zwei, und mit einem Hüllstreifen, wenn alle Hauptkrümmungen verschwinden. Ist $r = 0$, so entartet der NK. in eine Einzelkugel. Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend.*

Soll (𝔶) entarten, so muß nach § 2 K und damit nach § 3 eine Hauptkrümmung $\underset{1}{\nu}$ verschwinden. H_{ik} und H, J fallen dann mit den in § 3 eingeführten Größen $\underset{1}{B_{ik}}$, $\underset{1}{h}$, $\underset{1}{j}$ zusammen:

$$H_{ik} = \underset{1}{B_{ik}} \equiv \tfrac{1}{2}(a_i b_k + a_k b_i);$$

wir können daher die dort gegebene Tabelle benutzen.

a) Ist zunächst $r = 2$, also (𝔶) ein Kugelsystem, und verschwindet nur $\underset{1}{\nu}$, so ist $J \neq 0$ und der Rang von $d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{y}$ gleich zwei: das Kugelsystem ist regulär, es hat zwei Hüllflächen, die von den Punkten $\mathfrak{q} = \pm 2\sqrt{-\iota J}\,\mathfrak{x} + E^{ikl} a_k b_l \mathfrak{x}_i$ beschrieben werden. Verschwinden dagegen zwei Hauptkrümmungen, so ist das System singulär: es besteht aus den Krümmungskugeln einer Fläche oder aus den Hüllkugeln eines Flächenstreifens. Zur

[15]) Das *Normalkugelbündel* einer Schar $\mathfrak{y}(t)$ besteht aus allen zu $\mathfrak{y}$ und $\dot{\mathfrak{y}}$ senkrechten Kugeln, entsprechendes gilt für das *Normalkugelbüschel* eines Systems.

Untersuchung dieser Fälle berechnen wir die Krümmungskugeln und Hauptkrümmungsrichtungen der Hüllfläche des Kugelsystems ($\mathfrak{y}$). Die eine Krümmungskugel ist $\mathfrak{y}$; für die zugehörige Richtung muß $d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y}$ verschwinden. Wegen

$$d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y} = \tfrac{1}{4}[(a_i\sqrt{b^l b_l} + b_i\sqrt{a^l a_l})\,du^i]^2 \equiv \tfrac{1}{4}(m_i\,du^i)^2 \tag{3}$$

hat man in m^i eine der gesuchten Richtungen schon gefunden. Für die zweite Krümmungskugel $\mathfrak{k} = \mathfrak{y} + \alpha\mathfrak{q}$ ($\alpha \neq 0$) muß längs der zweiten Hauptkrümmungsrichtung $d\mathfrak{k}\,d\mathfrak{k} = 0$ gelten; insbesondere ist $\mathfrak{x}\,d\mathfrak{k} = 0$, woraus die zweite Richtung

$$n^i \equiv E^{ikl}a_k b_l = a^i\sqrt{b^l b_l} - b^i\sqrt{a^l a_l} \tag{4}$$

folgt. $\mathfrak{q}$ beschreibt nur dann eine Fläche, wenn die Richtungen (3) und (4) verschieden sind, was nur für $H \neq 0$ der Fall ist.

b) Ist $r = 1$, also $\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} = 0$, so entartet der NK. in eine Kugelschar, die regulär oder singulär ist, je nachdem, ob die Form $d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y}$ den Rang 1 oder 0 hat.

c) Für $r = 0$ schließlich ist $H_{ik} = 0$ und $\mathfrak{y}$ konstant. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Wir kehren zu den Komplexen mit *nichtentartetem* NK. zurück. Wegen Satz 6 hat letzterer die Fundamentalformen

$$\boxed{\begin{aligned}(\overset{*}{G}) &\equiv \overset{*}{G}_{ik}\,du^i\,du^k \equiv d\mathfrak{y}\,a\mathfrak{y} = H_{il}H^l_k\,du^i\,du^k,\\ (\overset{*}{H}) &\equiv \iota\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{x} = (H) = H_{ik}\,du^i\,du^k,\end{aligned}} \tag{5}$$

seine Hauptrichtungen und Hauptkrümmungen definieren sich daher durch

$$\begin{cases}(-\underset{\alpha}{\overset{*}{\nu}}\overset{*}{G}_{ik} + \overset{*}{H}_{ik})\,\underset{\alpha}{\overset{*}{n}}{}^i \equiv H^l_k(G_{li} - \underset{\alpha}{\overset{*}{\nu}}H_{li})\,\underset{\alpha}{\overset{*}{n}}{}^i = 0,\\ |G_{il} - \underset{\alpha}{\overset{*}{\nu}}H_{il}| = 0,\end{cases} \tag{6}$$

woraus

$$\boxed{\begin{gathered}\underset{\alpha}{\overset{*}{n}}{}^i = n^i, \qquad \underset{\alpha}{\overset{*}{\nu}} = \frac{1}{\underset{\alpha}{\nu}},\\ \overset{*}{K} = \frac{1}{K}, \qquad \overset{*}{J} = \frac{H}{K}, \qquad \overset{*}{H} = \frac{J}{K}\end{gathered}} \tag{7}$$

folgt.

Satz 9. *Die Hauptkrümmungen des nichtentarteten NK. sind die reziproken des HK.; die Hauptrichtungen sind in beiden Komplexen einander zugeordnet.*

Auch die Art der Komplexstellen ist dieselbe. Ergänzend zu Satz 9 läßt sich zeigen: *Sind nicht nur die Hauptkrümmungen, sondern auch ihre Quadrate voneinander verschieden, so bilden die Hauptrichtungen das einzige Tripel zueinander orthogonaler Richtungen, denen im nichtentarteten NK. wieder*

zueinander orthogonale Richtungen entsprechen. Drei derartige Richtungen seien mit $\underset{\alpha}{m^i}$ bezeichnet:

$$\underset{\alpha}{m^i}\,\underset{\beta}{m^k}\,G_{ik} = 0, \qquad \underset{\alpha}{m^i}\,\underset{\beta}{m^k}\,\overset{*}{G}_{ik} = 0 \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3;\ \alpha \neq \beta).$$

In der Ebene E müssen ihnen daher die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks der Kegelschnitte $(G) = 0$ und $(\overset{*}{G}) = 0$ entsprechen. Nun ist nach (6)

$$(-\underset{\alpha}{\mu}\,G_{il} + \overset{*}{G}_{il})\,\underset{\alpha}{m^l} \equiv (-\sqrt{\underset{\alpha}{\mu}}\,G_{ik} + H_{ik})\,G^{kp}\,(+\sqrt{\underset{\alpha}{\mu}}\,G_{pl} + H_{pl})\,\underset{\alpha}{m^l} = 0,$$

jedes $\underset{\alpha}{m^i}$ ist also unter der genannten Voraussetzung (und nur unter dieser) eine Hauptrichtung $\underset{\alpha}{n^i}$ des HK. und umgekehrt.

Der NK. gestattet auch eine *Kennzeichnung der konjugierten Richtungen des HK.* Jeder Richtung und jeder Querkugel des HK. entspricht auch eine im NK.; sind also du^i, $\overline{du^i}$ konjugiert, $du^i H_{ik}\,\overline{du^k} = 0$, so sind die zugehörigen Querkugeln $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$ usw. nach (2. 4) kreuzweise zueinander orthogonal. Da die Nullrichtungen von H_{ik} zu sich selbst konjugiert sind, stehen nur bei ihnen $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Querkugel derselben Richtung aufeinander senkrecht. Die Hauptrichtungen sind zueinander sowohl konjugiert als auch orthogonal; *nur bei den Hauptrichtungen fallen daher die Querkugeln von HK. und NK. zusammen*: $\iota\,d\mathfrak{y} = \underset{\alpha}{\nu}\,d\mathfrak{x}$ (Analogon zur Rodriguesschen Formel).

§ 5.

Allgemeine Formeln für Kugelscharen.[16])

Es sei $\mathfrak{x}$ (normiert durch $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1$) eine hinreichend oft differenzierbare Funktion eines Parameters t. Die Invariante niedrigster Ordnung ist die *Konformbogenlänge*

$$\sigma = \int \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}}\,dt; \tag{1}$$

je nachdem, ob $\dot{\sigma} \neq 0$ ist oder nicht, heißt die Kugelschar *regulär* oder *singulär* (*parabolisch, Berührungsschar*)[17]).

Eine Größe ${}_n a$, für die das Differential ${}_n a\,(dt)^n$ invariant bleibt bei Übergang zu einem anderen Parameter, sei als *n-mal t-kovariant* bezeichnet, was wir, wenn nötig, durch den Index n ausdrücken. Für diese Größen definieren wir mit Hilfe einer nirgends verschwindenden t-Kovariante ${}_1\gamma$ *eine kovariante Ableitung nach* t:

$$\boxed{\nabla_n a = {}_n\dot{a} - n \cdot \Gamma \cdot {}_n a, \qquad \Gamma = (\log {}_1\gamma)^{\cdot}.} \tag{2}$$

---

[16]) Blaschke III, S. 265.

[17]) Reguläre Scharen hüllen eine Kanalfläche ein, Berührungsscharen nur einen Flächenstreifen. — Ableitungen nach t werden mit einem Punkt bezeichnet.

deren wichtigste Eigenschaft, außer den üblichen Ableitungsregeln für Summe und Produkt, $\nabla_1 \gamma = 0$ ist. Wir legen dieser Ableitung die Bedingung

$$\dot{\mathfrak{x}} \nabla \dot{\mathfrak{x}} = \nabla \dot{\sigma} = 0 \tag{3}$$

auf, womit sie für reguläre Scharen schon festliegt. Für parabolische Scharen bleibt Γ noch frei; es soll später aus einer zweiten Bedingung bestimmt werden.

$\dot{\mathfrak{x}}$ ist die *Querkugel* der Schar, sie schneidet $\mathfrak{x}$ im *Querkreis*. Drei benachbarte Kugeln der Schar bestimmen ein Kugelbündel, dem $\mathfrak{x}$ und $\dot{\mathfrak{x}}$ angehören; die zu beiden senkrechte Kugel des Bündels, die *Hauptnormalkugel*, bestimmt sich aus dem Ansatz $\mathfrak{h} = \ddot{\mathfrak{x}} + \alpha \dot{\mathfrak{x}} + \beta \mathfrak{x}$ zu

$$\boxed{\mathfrak{h} = \nabla \nabla \mathfrak{x} - \zeta \dot{\mathfrak{x}} + \dot{\sigma}^2 \mathfrak{x}} \tag{4}$$

($\zeta = 0$ für $\dot{\sigma} \neq 0$, beliebig für $\dot{\sigma} = 0$); sie ist nur bei regulären Scharen eindeutig bestimmt, bei singulären gibt es deren ein ganzes Büschel. Der Betrag des Fünfervektors $\mathfrak{h}$,

$$\boxed{k = \sqrt{\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}}} \tag{5}$$

heißt die *t-Kovariante der absoluten Krümmung* [18]).

Die *Umgebung n-ter Ordnung* einer Kugelschar wird von $\mathfrak{x}$ und seinen Ableitungen bis zur n-ten Ordnung bestimmt. Die Umgebung erster Ordnung bestimmt das *Normal-Kugelbündel*, dessen Kugeln zu $\mathfrak{x}$ und $\dot{\mathfrak{x}}$ senkrecht stehen; es enthält $\mathfrak{h}$. Analog bestimmt die Umgebung zweiter Ordnung das *Binormal-Kugelbüschel*, das zwei Punkte (*Binormalpunkte*) enthält; zu vier benachbarten Kugeln der Schar schließlich steht noch die *Trinormalkugel* senkrecht.

Zur Untersuchung der linearen Kugelmannigfaltigkeiten, welche die Schar berühren, suchen wir diejenigen linearen Komplexe durch $\mathfrak{x}$ (dargestellt durch den Sechservektor $\mathfrak{R}$), die alle benachbarten Kugeln in erster Näherung enthalten:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{X} = \mathfrak{R}\dot{\mathfrak{X}} = 0;$$

diese *Berührungskomplexe der Schar* bilden also ein Komplexgebüsch [19]). Unter diesen Komplexen gibt es ∞^2 *Schmiegungskomplexe*, die die Nachbarkugeln von $\mathfrak{x}$ auch noch in zweiter Näherung enthalten:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{S}\dot{\mathfrak{X}} = \mathfrak{S}\ddot{\mathfrak{X}} = 0.$$

Die ∞^1 Kugeln $\mathfrak{t}$, die in allen $\mathfrak{S}$ enthalten sind, bilden die *lineare Schmiegungsschar* von $\mathfrak{x}(t)$; die $\mathfrak{t}$ berühren die Grundkugeln $\mathfrak{s}$ der singulären $\mathfrak{S}$, ferner

[18]) Ist $\mathfrak{h} = -\zeta \dot{\mathfrak{x}}$ (also $k = 0$), so ist die Schar ein Kugelbüschel; ist $\mathfrak{h} \neq -\zeta \dot{\mathfrak{x}}$ ein Punkt, so besteht die Schar aus den Schmiegungskugeln der Kurve $\mathfrak{h}(t)$ für $\dot{\sigma} \neq 0$ bzw. $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ für $\dot{\sigma} = 0$. k ist unabhängig von ζ.

[19]) Die Grundkugeln der singulären $\mathfrak{R}$ bilden ein lineares Kugelsystem; sie berühren $\mathfrak{x}$ in denjenigen Flächenelementen, in denen $\mathfrak{x}$ die Hüllfläche von $\mathfrak{x}(t)$ berührt.

sind sie selber die Grundkugeln der singulären unter den zu den $\mathfrak{S}$ involutorischen Komplexen

$$\mathfrak{T} = \alpha\mathfrak{X} + \beta\dot{\mathfrak{x}} + \gamma\ddot{\mathfrak{x}} \tag{6}$$

(α, β, γ sind homogene Parameter) [20]).

Es seien noch für $k \neq 0$ die *unabhängigen Invarianten* einer Kugelschar angegeben. Bei *regulären Scharen* sind dann die Binormalpunkte $\bar{\mathfrak{u}}, \underline{\mathfrak{u}}$ voneinander verschieden; wir normieren $\bar{\mathfrak{u}}\,\underline{\mathfrak{u}} = 1$. Sie bilden mit $\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{h}$ eine begleitende Basis der Schar. Die Schar wird festgelegt sowohl durch die Größen

$$\dot{\sigma}, k, \quad \bar{\mathfrak{u}}\,\dot{\underline{\mathfrak{u}}}, \quad \bar{d} = \frac{1}{k}\,\bar{\mathfrak{u}}\,\nabla\mathfrak{h}, \quad \underline{d} = \frac{1}{k}\,\underline{\mathfrak{u}}\,\nabla\mathfrak{h}, \tag{7}$$

als auch durch die Invarianten 2., 3. und 4. Ordnung

$$'k = \frac{k}{\dot{\sigma}^2}, \quad l = \frac{\bar{d}\,\underline{d}}{\dot{\sigma}^2}, \quad m = \frac{1}{\dot{\sigma}^3}(\underline{d}\,\nabla\bar{d} - \bar{d}\,\nabla\underline{d}) + 2\,\frac{\bar{\mathfrak{u}}\,\dot{\underline{\mathfrak{u}}}}{\dot{\sigma}}\,l \tag{8}$$

mit ihren Ableitungen nach t. Bei den *Berührungsscharen* werde die t-kovariante Ableitung durch

$$\ddot{\mathfrak{x}}\,'\nabla\ddot{\mathfrak{x}} = {}'\nabla k = 0 \tag{9}$$

festgelegt, womit aus dem Büschel der Hauptnormalkugeln eine ausgezeichnet wird:

$$'\mathfrak{h} = {}'\nabla\,'\nabla\mathfrak{x}; \tag{10}$$

sie bildet mit $\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}$, der Trinormalkugel $\mathfrak{r}$ und dem von $\dot{\mathfrak{x}}$ verschiedenen Schnittpunkt (*Gegenpunkt*) $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{x}$, $'\mathfrak{h}, \mathfrak{r}$ eine Vektorbasis. Die Berührungsschar wird durch die Invarianten 3. und 4. Ordnung

$$l = \frac{1}{k}\,\frac{\mathfrak{q}}{(\mathfrak{x}\,\mathfrak{q})}\,'\nabla\,'\mathfrak{h}, \qquad m = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}}}\,\frac{\mathfrak{q}}{(\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{q})}\,'\nabla\mathfrak{r} \tag{11}$$

und durch deren Ableitungen festgelegt.

§ 6.

Kugelscharen im Komplex.

Die Parameter $u^{(i)}$ seien hinreichend oft differenzierbare Funktionen einer Variablen t: dann beschreibt $\mathfrak{x}(u^{(i)}(t))$ im Komplex eine Kugelschar. Sie hat die Fortschreitungsrichtung $du^i = \dot{u}^i\,dt$ und die Querkugel $\dot{\mathfrak{x}} = \dot{u}^i\,\mathfrak{x}_i$. Kugelscharen nach den Nullrichtungen des Tensors G_{ik}, $\dot{u}^i G_{ik}\,\dot{u}^k = 0$, sind die Berührungsscharen des Komplexes. Wir wollen in diesem Paragraphen

---

[20]) Bei den regulären Scharen hüllen die $\mathfrak{t}$ eine Dupinsche Zyklide ein, die auch Einhüllende der Kugeln $\mathfrak{s}$ ist. Mit der Zyklide ist die Gegenkugel $\mathfrak{g} = \frac{1}{2}(k^2 - \dot{\sigma}^4)\,\mathfrak{x} + \dot{\sigma}^2\mathfrak{h}$ invariant verbunden: es ist diejenige Kugel unter den $\mathfrak{t}$, die zu $\dot{\mathfrak{x}}$ senkrecht steht und von $\mathfrak{x}$ verschieden ist. — Bei den Berührungsscharen fallen die $\mathfrak{t}$ mit den $\mathfrak{s}$ zusammen; die Schmiegungsschar ist ein parabolisches Büschel, dessen Kugeln $\mathfrak{x}$ in $\dot{\mathfrak{x}}$ berühren.

die wichtigsten Eigenschaften der Kugelscharen im Komplex zusammenstellen, die unabhängig sind von der Einteilung in reguläre und singuläre.

Für die Ableitung nach t wird die in § 5 definierte kovariante Ableitung nach t benutzt, die durch

$$(1) \qquad \nabla\, {}_n a^{i_1 \dots i_m} = \dot{u}^i \nabla_i\, {}_n a^{i_1 \dots i_m} - n \cdot \Gamma \cdot {}_n a^{i_1 \dots i_m}$$

auf Tensoren erweitert wird. Die einfachsten t-Kovarianten erster Ordnung einer Schar sind die *t-Kovarianten des Konformbogenelements und der Normalkrümmung*

$$(2) \qquad \boxed{\dot{\sigma} = \sqrt{\dot{u}^i G_{ik} \dot{u}^k}, \quad \bar{\nu} = \dot{u}^i H_{ik} \dot{u}^k,}$$

die als einfachste Invariante die *Normalkrümmung*

$$(3) \qquad \boxed{\nu = \frac{\dot{u}^i H_{ik} \dot{u}^k}{\dot{u}^i G_{ik} \dot{u}^k}}$$

bestimmen. Für die Nullscharen von H_{ik} verschwindet $\bar{\nu}$, für die von G_{ik} verschwindet $\dot{\sigma}$ identisch; eine Schar, die sowohl Nullschar von G_{ik} als auch von H_{ik} ist, soll in Übereinstimmung mit der Bezeichnung der Richtungen in § 3 eine *Schmiegungsschar* heißen.

t-Kovarianten höherer Ordnung erhält man aus den höheren Ableitungen von $\dot{u}^i$. Wir nennen

$$(4) \qquad \varkappa^i = \nabla \dot{u}^i, \quad \lambda^i = \nabla \nabla \dot{u}^i$$

die *Vektoren der ersten und zweiten geodätischen Krümmung* und ihre Beträge

$$(5) \qquad \boxed{\varkappa = \sqrt{\nabla \dot{u}^i \nabla \dot{u}_i}, \quad \lambda = \sqrt{\nabla \nabla \dot{u}^i \nabla \nabla \dot{u}_i},}$$

die *t-Kovarianten der ersten und zweiten geodätischen Krümmung.* Für diese gilt, wie wir in § 7 und § 8 beweisen wollen:

Satz 10. *Eine Kugelschar des Komplexes mit $\varkappa \neq 0$ wird durch die voneinander unabhängigen t-Kovarianten $\dot{\sigma}$, $\varkappa$, λ als Funktionen von t bestimmt.* (Hierbei soll bei Berührungsscharen ∇ durch die Vorschrift $\nabla \varkappa = 0$ festgelegt werden.)

Aus den Ableitungen der Basisvektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}_i$ nach t berechnen wir zunächst die Hauptnormalkugel

$$(6_1) \qquad \boxed{\mathfrak{h} = -\dot{u}^i H_{ik} \dot{u}^k \mathfrak{y} + (\nabla \dot{u}^i - \zeta \dot{u}^i) \mathfrak{x}^i}$$

und die absolute Krümmung

$$(6_2) \qquad \boxed{k^2 = \iota \bar{\nu}^2 + \varkappa^2,}$$

wobei $\zeta = 0$ für $\dot{\sigma} \neq 0$ und beliebig für $\dot{\sigma} = 0$ ist. Beachtet man, daß nach § 5 die Schar ein Kugelbüschel ist, wenn $\mathfrak{h}$ mit $\dot{\mathfrak{x}}$ zusammenfällt, so folgt

Satz 11. *Bei einer Kugelschar des Komplexes mit $\varkappa = 0$ berühren ihre Hauptnormalkugeln die Normalkugel des Komplexes, falls $\bar{\nu} \neq 0$ ist. Ist aber*

$\varkappa = \bar{\nu} = 0$, *so ist die Schar entweder ein Kugelbüschel oder sie besteht aus den Schmiegungskugeln einer Raumkurve, je nachdem, ob* $\nabla \dot{u}^i = \bar{\zeta} \dot{u}^i$ *ist oder nicht.*

Es treten unter diesen Scharen die durch

$$\nabla \dot{u}^i \equiv \ddot{u}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{u}^k \dot{u}^l - \Gamma \dot{u}^i = \bar{\zeta} \dot{u}^i \tag{7}$$

definierten *geodätischen Scharen des Komplexes* hervor [21]). Da (7) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u^{(i)}$ ist, gibt es zu jeder Richtung eine einzige derartige Schar. Aus Satz 11 folgt, *daß bei den geodätischen Scharen des Komplexes im allgemeinen* ($\bar{\nu} \neq 0$) *eine ihrer Hauptnormalkugeln mit der Komplexnormalkugel* $\mathfrak{y}$ *zusammenfällt; für* $\bar{\nu} = 0$ *sind sie Kugelbüschel.*

Eine ähnliche Aussage gilt für die Nullscharen des Tensors H_{ik}:

Satz 12. *Bei einer Kugelschar des Komplexes mit* $\bar{\nu} = 0$ *schneiden alle Hauptnormalkugeln die Normalkugel des Komplexes senkrecht, falls* $\varkappa \neq 0$ *ist.*

Von besonderem Interesse sind *Analogien zu dem Meusnierschen Satz der Flächentheorie*, also Aussagen über die Umgebung zweiter Ordnung („*Krümmung*") des Komplexes in gegebener Richtung $\dot{u}^i$. Wir sehen zunächst aus (6_2), daß die Krümmung aller Kugelscharen des Komplexes in dieser Richtung sich aus

$$k \cdot \cos(\mathfrak{h}, \mathfrak{y}) = -\sqrt{\iota} \cdot \bar{\nu} \tag{8}$$

berechnet. $\nabla \dot{u}^i$, also auch $\mathfrak{h}$, legt eine solche Kugelschar in zweiter Ordnung fest, er kann beliebig orthogonal zu $\dot{u}^i$ gewählt werden. Die Gesamtheit dieser Vektoren liefert eine Kennzeichnung der Krümmung in Richtung $\dot{u}^i$:

Satz 13. *Die Hauptnormalkugeln aller von* $\mathfrak{x}$ *in derselben Richtung ausgehenden Kugelscharen des Komplexes bilden das allen diesen Scharen gemeinsame Normalkugelbündel* [22]).

Wir hatten in § 3 das Büschel der Berührungskomplexe von $\mathfrak{x}$ kennengelernt; jedes $\mathfrak{B}$ ist natürlich auch Berührungskomplex einer Schar $\mathfrak{x}(t)$ durch $\mathfrak{x}$ im Sinne von § 5: $\mathfrak{B}$ enthält zwei benachbarte Kugeln der Schar. Unter diesen $\mathfrak{B}$ gibt es genau einen, der für eine gegebene Schar Schmiegungskomplex ist, also sogar drei benachbarte Kugeln der Schar enthält. Die Bedingung $\mathfrak{B}\ddot{\mathfrak{x}} = 0$ führt auf

$$\boxed{\mathfrak{B} = -\dot{u}^i H_{ik} \dot{u}^k (\mathfrak{x} - \mathfrak{P}) + \dot{u}^i G_{ik} \dot{u}^k \iota \mathfrak{y},} \tag{9}$$

dieses $\mathfrak{B}$ hängt also nur von $\dot{u}^i$, aber nicht von $\ddot{u}^i$ ab. Das bedeutet, daß $\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{h}$ für alle Scharen in dieser Richtung ein und dieselbe Kugel durch den Trajektorienkreis (nämlich die Grundkugel von $\mathfrak{B}$), (falls $\nu^2 + \iota \neq 0$ [23])

$$\mathfrak{b} = -\dot{u}^i H_{ik} \dot{u}^k \mathfrak{x} + \dot{u}^i G_{ik} \dot{u}^k \iota \mathfrak{y}, \tag{10}$$

[21]) Liegt ∇ fest, so ist auch $\bar{\zeta}$ bestimmt (Anm. 24 und § 8); für $\dot{\sigma} \neq 0$ ist $\bar{\zeta} = 0$.

[22]) Bei Berührungsscharen denke man sich für jede Schar ein passendes $\mathfrak{h}$ (z. B. $'\mathfrak{h}$ von § 5) ausgewählt.

[23]) Ist $\nu^2 + \iota = 0$, so ist $\mathfrak{b}$ einer der Zentralpunkte (§ 3); es gibt dann keinen Winkel ω.

unter demselben Winkel ω,

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{ctg}\omega = -\iota\sqrt{\iota}\,\nu = -\iota\sqrt{\iota}\,\frac{u^i H_{ik} u^k}{u^i G_{ik} u^k},$$

schneiden. $\mathfrak{B}$ *heißt der der Richtung* u^i *zugeordnete Berührungskomplex*; er ist sogar Lie-geometrisch invariant mit der Richtung verbunden. $\mathfrak{B}$ charakterisiert aber nicht die Umgebung zweiter Ordnung von u^i, da er ∞^3 Kugeln enthält; man findet, daß $\mathfrak{B}$ außer u^i allen Richtungen v^i mit

$$\text{(12)} \qquad v^i v^k [-(u^l H_{lm} u^m) G_{ik} + (u^l G_{lm} u^m) H_{ik}] = 0$$

zugeordnet ist.

Satz 14. *Alle Kugelscharen, des Komplexes, die durch* $\mathfrak{x}$ *gehen und dort dieselbe Normalkrümmung* ν *haben, gehören noch in zweiter Ordnung demselben linearen Berührungskomplex* (9) *an.*

Aus (10) folgt, daß $\mathfrak{b}$ für die Berührungsscharen mit $\mathfrak{x}$ und für die Nullscharen von H_{ik} mit $\mathfrak{y}$ zusammenfällt, falls die Schmiegungsscharen ausgenommen werden: für diese wird $\mathfrak{B}$ unbestimmt, so daß sie in zweiter Ordnung in jedem Berührungskomplex enthalten sind.

Die Kugelscharen, deren Richtung u^i überall eine Hauptrichtung ist, $u^i(-\underset{\alpha}{\nu} G_{ik} + H_{ik}) = 0$, heißen *Hauptscharen des Komplexes*: es gibt von diesen Scharen drei Kongruenzen; *ihre Normalkrümmungen sind gerade die Hauptkrümmungen des Komplexes.* Die Hauptscharen haben außerdem, wie man leicht erkennt, folgende hervorstechenden Eigenschaften:

1. *Längs der Hauptscharen (und nur bei diesen) ist der zugeordnete Berührungskomplex* (9) *zugleich in erster Näherung Berührungskomplex einer Nachbarkugel.*

2. *Die Hauptrichtungen sind die Richtungen mit stationärer Normalkrümmung.*

3. *Die Querkugel einer Hauptschar fällt mit der Querkugel der zugeordneten Schar des NK. zusammen; letztere ist eine Hauptschar des nichtentarteten NK.*

Andere Kennzeichnungen der Hauptscharen erhält man, wenn man die Trajektorienkreise längs einer Kugelschar betrachtet. Die Schnittpunkte benachbarter Trajektorienkreise sind die Schnittpunkte der Kugeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\dot{\mathfrak{x}}$, $\dot{\mathfrak{y}}$, woraus folgt, *daß sich im allgemeinen längs einer Kugelschar des Komplexes benachbarte Trajektorienkreise nicht schneiden; nur falls sich* $\mathfrak{x}$- *und* $\mathfrak{y}$-*Querkugel berühren, schneiden sie sich in einem und längs einer Hauptschar in zwei Punkten.* Ist die Hauptschar parabolisch, so berühren sie sich, sie sind dann die Schmiegungskreise der Kurve $\dot{\mathfrak{x}}(t)$. Im allgemeinen wird daher auch längs einer Kugelschar der Trajektorienkreis nicht Querkreis einer anderen Kugelschar sein, da ein solcher stets zwei Schnittpunkte mit einem benachbarten hat. *Nur längs einer Hauptschar mit nichtkonstanter Normalkrümmung* $\nu \neq \sqrt{-\iota}$ *sind die Trajektorienkreise zugleich Querkugeln, und zwar der-*

jenigen Kugelschar, die von den Grundkugeln (10) *des zugeordneten Berührungskomplexes durchlaufen wird.*

§ 7.

Reguläre Kugelscharen im Komplex.

Es sei jetzt $\sigma \neq 0$ vorausgesetzt, so daß die Hauptnormalkugel eindeutig bestimmt ist. Jede Richtung v^i kann längs einer regulären Schar des Komplexes in eine Komponente parallel zu $\dot{u}^i$ und in eine dazu senkrechte zerlegt werden. Letztere erhält man durch Überschiebung von v^i mit dem Tensor

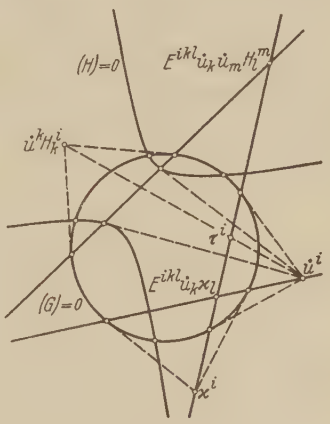


Fig. 2.

$$(1) \qquad g^{ik} = G^{ik} - \frac{1}{\dot{\sigma}^2}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k.$$

Man gewinnt so in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\dot{\mathfrak{x}}$, $g^{il}\,\mathfrak{x}_l$ eine begleitende Basis der Kugelschar, die sich dem Komplex besonders gut anpaßt und daher für die folgenden Rechnungen sehr bequem ist. Diese Fünfervektoren haben die Ableitungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \nabla\,\mathfrak{x} = -\,\dot{u}^i G_{ik}\,\dot{u}^k\,\mathfrak{x} - \dot{u}^i H_{ik}\,\dot{u}^k\,\mathfrak{y} + \nabla\dot{u}^i\,(g_{il}\,\mathfrak{x}^l), \\ \iota\nabla\,\mathfrak{y} = \frac{1}{\dot{\sigma}^2}\,\dot{u}^i H_{ik}\,\dot{u}^k\,\dot{\mathfrak{x}} + u^i H_{il}\,(g^{lm}\,\mathfrak{x}_m), \\ \nabla\,(g^{il}\,\mathfrak{x}_l) = -\,\dot{u}^k H_{kl}\,g^{li}\,\mathfrak{y} - \frac{1}{\dot{\sigma}^2}\,\nabla u^i\,\dot{\mathfrak{x}} - \frac{1}{\dot{\sigma}^2}\,\dot{u}^i\nabla\dot{u}^l\,(g_{lm}\,\mathfrak{x}^m); \end{cases}$$

als *geodätischer Windungsvektor* kann

$$(3) \qquad \tau_k \equiv \dot{u}^i H_{il}\,g_k^l = \dot{u}^i(H_{ik} - \nu G_{ik})$$

bezeichnet werden, *sein Verschwinden kennzeichnet die regulären Hauptscharen.*

Wir können mit Hilfe dieser Ableitungen die in § 5 genannten absoluten Bestimmungsgrößen der regulären Kugelschar berechnen; wie dort sei $k \neq 0$ vorausgesetzt. Für die Binormalpunkte ergibt sich zunächst

$$(4) \qquad \left.\begin{matrix}\mathfrak{u}\\ \underline{\mathfrak{u}}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{-\iota\alpha^i\alpha_i}\,\mathfrak{y} + \alpha^k\,(g_{kl}\,\mathfrak{x}^l) \quad \text{mit} \quad \alpha_k\varkappa^k = \iota\bar{\nu}\sqrt{-\iota\,\alpha^i\alpha_i}.$$

Ist $\varkappa = 0$, so fällt wenigstens einer der Binormalpunkte mit den Schnittpunkten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\dot{\mathfrak{x}}$ zusammen; fallen beide Binormalpunkte mit diesen Schnittpunkten

zusammen, so ist die Schar regulär geodätisch [24]). Daher werde noch $\varkappa \neq 0$ angenommen, und $\bar{\mathfrak{u}}, \underline{\mathfrak{u}}$ durch $\bar{\mathfrak{u}}\,\underline{\mathfrak{u}} = 1$ normiert:

$$\left.\begin{matrix}\bar{\mathfrak{u}}\\ \underline{\mathfrak{u}}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\,\iota\,\dot\sigma\,\varkappa\,k}}\left[\dot\sigma\,\varkappa^2\,\iota\,\mathfrak{y} + (\pm\, k E^{ikl}\,\dot u_k\,\varkappa_l + \bar\nu\,\dot\sigma\,\varkappa^i)\,g_{il}\,\mathfrak{x}^l\right]. \tag{5}$$

Die gesuchten Bestimmungsgrößen werden dann:

$$\begin{cases}\left.\begin{matrix}\bar d\\ \underline d\end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\iota\,\dot\sigma\,\varkappa\,k^2}}\left[-\dot\sigma\,\varkappa^2\,(\nabla\,\bar\nu + \varkappa^i\,\tau_i) + (\nabla\,\varkappa_i - \iota\,\bar\nu\,\tau_i)\,(\pm\, k E^{ikl}\,\dot u_k\,\varkappa_l + \bar\nu\,\dot\sigma\,\varkappa^i)\right]\\ \bar{\mathfrak{u}}\,\underline{\mathfrak{u}} = -\dfrac{1}{2\,\iota\,\dot\sigma^2\,\varkappa^3\,k^2}\,E^{ikl}\,\dot u_k\,\varkappa_l\,(\varkappa^2\,\tau_i + \bar\nu\,\nabla\,\varkappa_i).\end{cases} \tag{6}$$

Die auf der rechten Seite vorkommenden t-Kovarianten legen also mit ihren Ableitungen nach t die Kugelschar fest; nach Satz 10 genügen im vorliegenden Falle $\varkappa \neq 0$ sogar schon zwei, nämlich $\varkappa$ und λ, mit ihren Ableitungen. Zum Beweis stellt man $\nabla\nabla\,\dot u^i$ in der Basis $\dot u^i$, ∇u^i, $E^{ikl}\,\dot u_k\,\nabla u_l$ dar und erhält eine Differentialgleichung für $u^{(i)}$:

$$\begin{cases}\nabla\nabla\,\dot u^i = -\dfrac{\varkappa^2}{\dot\sigma^2}\,\dot u^i + \dfrac{\nabla\,\varkappa}{\varkappa}\,\nabla\,\dot u^i + \mu\,E^{ikl}\,\dot u_k\,\nabla\,\dot u_l,\\ \mu^2 = \dfrac{\iota}{\dot\sigma^2\,\varkappa^2}\left(-\lambda^2 + \dfrac{\varkappa^4}{\dot\sigma^2} + (\nabla\,\varkappa)^2\right).\end{cases} \tag{7}$$

Wir kehren zum Problem des Meusnierschen Satzes — Charakterisierung der Krümmung des Komplexes in Richtung $\dot u^i$ — zurück. Mit jeder regulären Schar durch $\mathfrak{x}$ in Richtung $\dot u^i$ ist in zweiter Ordnung eine Dupinsche Zyklide verbunden, so daß zu jeder regulären Richtung ∞^2 Zykliden gehören. Man überblickt diese Mannigfaltigkeit, wenn man jede Zyklide durch eine invariant ihr zugeordnete Kugel ersetzt. Die Hauptnormalkugel hatten wir schon in § 6 betrachtet. Die Gegenkugel (Anm. 20, § 5)

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{\dot\sigma^2} - \dot\sigma^2\right)\mathfrak{x} - \dot u^i\,H_{ik}\,\dot u^k\,\mathfrak{y} + \nabla\,\dot u^i\,\mathfrak{x}_i \tag{8}$$

legt ebenfalls den Krümmungsvektor $\nabla\,\dot u^i$ fest; insbesondere geht die Gegenkugel der zu $\dot u^i$ gehörenden geodätischen Schar als einzige durch den Trajektorienkreis: sie ist dieselbe für alle Richtungen mit demselben Berührungskomplex (6. 9).

Fragt man nach den linearen Kugelkomplexen, die alle Gegenkugeln der Richtung $\dot u^i$ enthalten, so stößt man auf das Komplexbüschel

$$\mathfrak{K} = \alpha\mathfrak{B} + \beta\,\dot{\mathfrak{x}} \tag{9}$$

---

[24]) Die Differentialgleichung (6. 7) dieser Scharen, $\nabla\,\dot u^i = 0$, ist die Eulersche Gleichung des Variationsproblems $\delta\int\sqrt{\dot u^i G_{ik}\dot u^k}\,dt = 0$: *die regulären geodätischen Scharen machen also die Konformbogenlänge zu einem Extremum.* Bilden ∞^3 derartiger Scharen eine Kongruenz, und sind sie zu einem Kugelsystem orthogonal, so sind sie zu allen Kugelsystemen $\sigma = \text{const}$ orthogonal, falls nur für das erste System $\sigma = 0$ gilt; es ist dann auch $\dot u^i : \dot o = \sigma^i$.

mit α, β als homogenen Parametern; $\mathfrak{B}$ ist der Komplex (6. 9). Alle Gegenkugeln berühren die singulären Komplexe des Büschels, d. h. die Kugeln

$$\mathfrak{f} = -\nu\mathfrak{x} + \iota\mathfrak{y} \pm \frac{\sqrt{-\iota}}{\dot\sigma}\dot{\mathfrak{x}}. \tag{10}$$

Satz 15. *Die Gegenkugeln aller regulären Kugelscharen des Komplexes in derselben Richtung sind in einem linearen Kugelsystem enthalten, dessen Hüllflächen die beiden Kugeln* (10) *sind.*

Jede Gegenkugel berührt die Kugeln $\mathfrak{f}$ in den beiden Punkten

$$\mathfrak{q} = -\bar\nu\,(\dot\sigma^2\mathfrak{x} + \bar\nu\,\mathfrak{y} - \nabla\dot u^i\mathfrak{x}_i) + \frac{1}{2}(k^2 + \dot\sigma^4)\left(\iota\mathfrak{y} \pm \frac{\sqrt{-\iota}}{\dot\sigma}\dot{\mathfrak{x}}\right), \tag{11}$$

und umgekehrt bestimmt, falls $\bar\nu \neq 0$, jeder Punkt von $\mathfrak{f}$ genau eine Gegenkugel (und damit in zweiter Ordnung eine Kugelschar in Richtung $\dot u^i$) mit Ausnahme der Punkte

$$\mathfrak{q}_0 = \iota\mathfrak{y} \pm \frac{\sqrt{-\iota}}{\dot\sigma}\dot{\mathfrak{x}}, \tag{12}$$

in denen $\mathfrak{x}$ (10) berührt [25]).

§ 8.

Berührungsscharen im Komplex.

Es sollen noch einige abrundende Bemerkungen über die singulären Scharen des Komplexes notiert werden. Der t-kovarianten Ableitung werde die Zusatzforderung

$$\nabla\dot u^i\,\nabla\nabla\dot u_i = \nabla\varkappa = 0 \tag{1}$$

auferlegt, womit sie für $\varkappa \neq 0$ festgelegt ist. Letzteres sei zunächst angenommen, so daß $\nabla\dot u^i$ mit $\dot u^i$ und mit der zweiten zu ihm orthogonalen Berührungsrichtung v^i eine Vektorbasis bildet, für deren Ableitungen wir finden

$$\begin{cases} \nabla\nabla\dot u^i = -\dfrac{\lambda^2}{2\varkappa^2}\dot u^i - \dfrac{\varkappa^2}{(\dot u^l v_l)}v^i, \\ \nabla v^i = \dfrac{\lambda^2(\dot u^l v_l)}{2\varkappa^4}\nabla\dot u^i. \end{cases} \tag{2}$$

Die Invariante $\lambda^2 : \varkappa^3$ legt also eine Berührungsschar mit $\varkappa \neq 0$ fest: das ist die Behauptung von Satz 10.

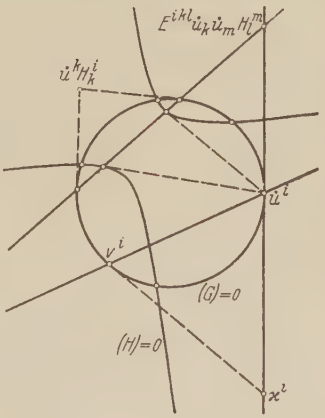


Fig. 3.

[25]) Außer den $\mathfrak{g}$ enthält das genannte System nur noch die beiden Kugelbüschel $\mathfrak{x} + v^i\mathfrak{x}_i$ mit $v^i v_i = v^i\dot u_i = 0$, bestehend aus allen Kugeln, die $\mathfrak{x}$ in den Schnittpunkten mit $\mathfrak{y}$ und $\dot{\mathfrak{x}}$ berühren. Für $\bar\nu = 0$ schrumpfen die Hüllflächen des Systems auf die Punkte $\mathfrak{q}_0$ zusammen.

Wir wollen noch den Zusammenhang mit den in § 5 definierten absoluten Bestimmungsgrößen der Berührungsschar herstellen; wie dort sei $k \neq 0$ vorausgesetzt. Hierbei ist zu beachten, daß die dort benutzte t-kovariante Ableitung durch

$$'\nabla k = 0 \tag{3}$$

festgelegt wurde. Für irgendeine t-Kovariante ${}_n a$ wird der Zusammenhang zwischen beiden t-kovarianten Ableitungen durch

$$'\nabla\, {}_n a = \nabla\, {}_n a - n \frac{\iota\, \bar{\nu}\, \nabla\, \bar{\nu}}{2\, k^2}\, {}_n a \tag{4}$$

gegeben. Wir finden so die in § 5 ausgezeichnete Hauptnormalkugel

$$'\mathfrak{h} \equiv '\nabla\, '\nabla\, \mathfrak{x} = -\, \dot{u}^i H_{ik}\, \dot{u}^k\, \mathfrak{y} + \left(\nabla \dot{u}^i - \iota \frac{\dot{u}^i\, \bar{\nu}\, \nabla\, \bar{\nu}}{2\, k^2}\right) \mathfrak{x}_i. \tag{5}$$

Die Trinormalkugel $\mathfrak{r}$ wurde definiert als orthogonal zu $\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}$ und der Gegenpunkt $\mathfrak{q}$ als der von $\dot{\mathfrak{x}}$ verschiedene Schnittpunkt der Kugeln $\mathfrak{x}.\ '\mathfrak{h}, \mathfrak{r}$. Die Ansätze

$$\mathfrak{r} = a\mathfrak{y} + b^i \mathfrak{x}_i, \qquad \mathfrak{q} = \alpha \mathfrak{y} + \beta^i \mathfrak{y}_i \tag{6}$$

führen für $\varkappa \neq 0$ auf

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \varkappa^2 k^2\, \iota\, \mathfrak{y} + [\bar{\nu} k^2 \nabla \dot{u}^i - (\varrho k^2 + \varkappa^2 \nabla \bar{\nu})\, \dot{u}^i]\, \mathfrak{x}_i, \\ \alpha &= \frac{1}{k^4}\left[\nabla \bar{\nu}\left(\varkappa^2 - \frac{\iota\, \bar{\nu}^2}{2}\right) + k^2 \varrho\right], \\ \beta^i &= \nabla \dot{u}^i \frac{\iota\, \bar{\nu}}{\varkappa^2 k^4}\left[\frac{3}{2}\varkappa^2 \nabla \bar{\nu} + k^2 \varrho\right] \\ &\qquad - \dot{u}^i \frac{\iota}{2\varkappa^2 k^6}\left[(\varkappa^2 \nabla \bar{\nu} + k^2 \varrho)^2 + \left(\frac{\bar{\nu} \cdot \nabla\, \bar{\nu} \cdot \varkappa}{2}\right)^2 \iota\right] + \frac{v^i}{(\dot{u}^l v_l)}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

wobei

$$\varrho = \dot{u}^i H_{ik} \nabla \dot{u}^k \tag{8}$$

gesetzt wurde. Man sieht, daß die Invariante $\iota\varkappa : k$ den Kosinus des Schnittwinkels von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{y}$ gibt.

Ist $\varkappa = 0$, so ist notwendig $\nabla \dot{u}^i = \zeta \dot{u}^i$: *eine Berührungsschar ist also dann und nur dann geodätisch, wenn* $\varkappa = 0$ *ist.* Bei diesen Scharen ist (1) identisch erfüllt; die t-kovariante Ableitung werde unter der Voraussetzung $k \neq 0$ durch die Zusatzforderung (3) festgelegt [26]). Die Ansätze (6) führen jetzt auf

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{r}_0 &= E^{ikl}\, \dot{u}_k H^m_l\, \dot{u}_m \mathfrak{x}_i, \\ \mathfrak{q}_0 &= \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\nu}}\, \iota\, \mathfrak{y} + \left[-\frac{1}{2\,\bar{\nu}^2}\, \dot{u}^i\left(\iota \zeta^2 + (\dot{u}^i H_{il} H^l_k\, \dot{u}^k)^2\right) + \frac{1}{\bar{\nu}} H^{ik}\, \dot{u}_k\right] \mathfrak{x}_i, \\ \bar{\zeta} &= -\frac{1}{2}\, \frac{\dot{u}^i\, \dot{u}^k\, \dot{u}^l H_{ikl}}{\dot{u}^i\, \dot{u}^k\, H_{ik}}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

[26]) Kommt im Komplex eine geodätische Schmiegungsschar vor ($\bar{\nu} = \dot{\sigma} = \varkappa = 0$), so liegt für sie ∇ noch nicht fest. Eine solche Schar ist ein parabolisches Kugelbüschel.

Man sieht aus (7) und (9), daß $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ nur von Ableitungen nach t bis zur zweiten Ordnung abhängen, obwohl in § 5 beide erst in der Umgebung dritter Ordnung von $\mathfrak{x}(t)$ auftraten. Damit haben wir eine spezielle Fassung des Meusnierschen Theorems gewonnen:

Satz 16. *Der Gegenpunkt einer Berührungsschar des Komplexes ist von zweiter Ordnung; zu ein und derselben Berührungsrichtung gehören ∞^2 Gegenpunkte (die auf $\mathfrak{x}$ liegen).*

Eine andere Kennzeichnung der Krümmung des Komplexes in der Berührungsrichtung $\dot{u}^i$ ist für $\bar{v} \neq 0$ folgende. Wir schreiben zunächst eindeutig

$$(10)\quad \nabla \dot{u}^i = \mu\, \dot{u}^i + \frac{\varkappa}{\sqrt{\iota\, \bar{v}}}\, E^{ikl}\, \dot{u}_k\, H_l^m\, \dot{u}_m, \qquad \nabla \bar{v} = 2\, \bar{v}\, \mu + \dot{u}^i \dot{u}^k \dot{u}^l H_{ikl},$$

so daß $\varkappa$ und μ eine Schar in Richtung $\dot{u}^i$ in zweiter Ordnung festlegen. Nun hat die Trinormalkugel (9) der zu $\dot{u}^i$ gehörenden geodätischen Schar mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ außer $\dot{\mathfrak{x}}$ noch einen zweiten Schnittpunkt $\mathfrak{w}$, der das Büschel aller der Kugeln bestimmt, die $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{w}$ berühren. Jede ausgezeichnete Hauptnormalkugel (5) berührt genau eine Kugel dieses Büschels in dem Punkte

$$(11)\quad \mathfrak{p} = -k\,\mathfrak{x} - \bar{v}\,\mathfrak{y} + \varkappa \frac{\mathfrak{r}_0}{\sqrt{\iota\, \bar{v}}} + \left(\mu - \frac{\iota\, \bar{v}\, \nabla \bar{v}}{2\, k^2}\right) \dot{\mathfrak{x}} - \frac{2\, k^4}{2\, k^2\, \mu - \iota\, \bar{v}\, \nabla \bar{v}}\, \frac{\mathfrak{w}}{(\dot{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{w})},$$

der ersichtlich $\varkappa$ und μ festlegt. *Der Ort der Berührungspunkte der ausgezeichneten Hauptnormalkugeln, die zu $\dot{u}^i$ gehören, mit denjenigen Kugeln, die $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{w}$ berühren, ist eine Dupinsche Zyklide mit $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{w}$ als Knotenpunkten.* Man sieht dies sofort, wenn man vorübergehend spezielle kartesische Koordinaten einführt mit $\mathfrak{w}$ als unendlich fernem Punkt, $\dot{\mathfrak{x}}$ als Nullpunkt und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{r}_0$ als Koordinatenebenen: der Ort der Punkte (11) erscheint dann als Kreiskegel.

§ 9.

Krümmungskomplexe.

Wir wollen eine Verallgemeinerung des Begriffes „Normalkomplex" vornehmen. Der NK. wurde definiert als Komplex aller Kugeln $\mathfrak{y}$, die $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$ senkrecht schneiden. Analog ordnen wir jeder Kugel $\mathfrak{x}$ des HK. eine Kugel $\mathfrak{b}$ zu, die $\mathfrak{x}$ und alle benachbarten Komplexkugeln unter dem (im allgemeinen nicht konstanten) Winkel ω schneidet:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{b}} \cdot \cos\omega, \quad \mathfrak{x}_i \mathfrak{b} = 0.$$

Der Komplex dieser Kugeln $\mathfrak{b}$ heißt ein *Krümmungskomplex* (*abgekürzt KK.*):

$$(1)\quad \boxed{\hat{\mathfrak{b}} = \cos\omega\, \mathfrak{x} + \sqrt{\iota}\, \sin\omega\, \mathfrak{y}.}$$

Nach § 6 ist daher $\mathfrak{b}$ die Grundkugel eines bestimmten, zu $\mathfrak{x}$ gehörenden linearen Berührungskomplexes

$$\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{b}, \nu) = \mathfrak{b} + \nu \mathfrak{P} = -\nu \mathfrak{X} + \iota \mathfrak{y}, \tag{2}$$

wobei der Zusammehang zwischen dem Winkel ω und der Normalkrümmung ν derjenigen Richtungen, die zu $\mathfrak{B}$ gehören, durch

$$\nu = -\sqrt{\iota}\ \operatorname{ctg} \omega \tag{3}$$

gegeben wird. Zu jeder Kugel $\mathfrak{x}$ gehören ∞^2 lineare Berührungskomplexe; denken wir uns also für jedes $\mathfrak{y}$ einen von diesen ausgewählt, so gibt uns die Gesamtheit ihrer Grundkugeln einen KK. Da wir die Berührungskomplexe durch Sechservektoren darstellen, können wir daher jeden derartigen Vektor (2) als Darstellung eines KK. auffassen [27]). Jede Kongruenz von Kugelscharen des Komplexes bestimmt so in der Gesamtheit der ihr nach § 6 zugeordneten Berührungskomplexe (2) einen KK.; die Normalkrümmung ν dieser Scharen sei als *Normalkrümmung des* KK. bezeichnet. Insbesondere heiße der KK., der zu einer Kongruenz von (regulären oder parabolischen) Hauptscharen gehört, ein (*gewöhnlicher oder außergewöhnlicher*) *Hauptkrümmungskomplex* $\mathfrak{B}_\alpha$ (*abgekürzt HKK.*; $\alpha = 1, 2, 3$).

Die Ableitungen von $\hat{\mathfrak{b}}$ und die erste Fundamentalform des KK. errechnen sich zu

$$\left\{\begin{aligned} \hat{\mathfrak{b}}_i &= \omega_i\,(-\sin\omega\,\mathfrak{x} + \sqrt{\iota}\cos\omega\,\mathfrak{y}) + \iota\sqrt{\iota}\sin\omega\,B_{ik}\,\mathfrak{x}^k, \\ \hat{\mathfrak{b}}_i\,\hat{\mathfrak{b}}_k &= \omega_i\omega_k + \iota\sin^2\omega\,B_{il}\,B^l_k, \\ \hat{\mathfrak{B}}_i &= -\nu_i\mathfrak{X} + B_{ik}\,\mathfrak{x}^k, \\ \hat{\mathfrak{B}}_i\,\hat{\mathfrak{B}}_k &= B_{il}\,B^l_k, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

mit

$$\boxed{B_{ik} = -\nu G_{ik} + H_{ik}.} \tag{5}$$

Der Rand von B_{ik} werde mit r, der von $B_{il}B^l_k$ mit ϱ bezeichnet.

Die KK. sind in ihrer Gesamtheit (aber im allgemeinen nicht einzeln) Lie-geometrisch invariant mit $(\mathfrak{x})$ verbunden; unter ihnen wird der sogenannte *Apolarkomplex* durch die Bedingung $B_{ik}G^{ik} = 0$ auch Lie-geometrisch invariant charakterisiert. In der Ebene E entspricht seinem Tensor B_{ik} der zu $(G) = 0$ apolare Kegelschnitt des Kegelschnittbüschels aus $(G) = 0$ und $(H) = 0$; dieser KK. hat die Eigenschaft, daß man in $(\mathfrak{x})$ auf unendlich viele

---

[27]) Die Schreibweise (2) schließt im Gegensatz zu (1) $\omega = 0$ (also $\mathfrak{b} = \mathfrak{x}$) aus — diesen trivialen Fall wollen wir stets beiseite lassen —, läßt dagegen unter den $\mathfrak{b}$ auch die Zentralpunkte (§ 3) zu ($\nu^2 + \iota = 0$). Nur bei Ausschluß dieser Punkte kann man von $\hat{\mathfrak{b}}$ und ω sprechen; sollen sie mitbehandelt werden, so rechnen wir mit $\mathfrak{b}$ und ν.

rten drei zueinander orthogonale Kongruenzen von Kugelscharen auswählen ann, zu denen er gehört.

Wir hatten bisher die Sechservektoren nur zur Darstellung der linearen ugelkomplexe verwendet; hier treten nun Mannigfaltigkeiten von Sechserektoren auf, die von $n \leqq 4$ unabhängigen Parametern abhängen. Eine lche *Komplexmannigfaltigkeit* ($\mathfrak{B}$) ist entweder der Inbegriff einer Kugelannigfaltigkeit ($\mathfrak{b}$) mit derselben Anzahl unabhängiger Parameter und einer if dieser definierten eindeutigen Ortsfunktion ν, oder sie besteht aus allen ∞^1 erartigen Komplexmannigfaltigkeiten mit $n-1$ unabhängigen Parametern nd konstantem ν, die dasselbe ($\mathfrak{b}$) haben. *Für einen KK. kommt nur der erste all in Frage.*

Ein entarteter KK. ist notwendig ein HKK. Denn dann muß nach (4) $|B_{ik}|$ verschwinden, was nach § 3 bedeutet, daß ν eine Hauptkrümmung ist. en Grad der Entartung des HKK. ($\underset{\alpha}{\mathfrak{B}}$) ($\alpha$ sei ein fester Wert der Reihe 1, 2, 3) ntnimmt man den Größen $\underset{\alpha}{B}_{ik}$ und $\underset{\alpha}{B}_{il}\,\underset{\alpha}{B}{}^{l}_{k}$, wenn man noch die Ableitung on $\underset{\alpha}{\nu}$ nach der zugehörigen Hauptrichtung,

$$\underset{\alpha}{\nabla}\underset{\alpha}{\nu} = \underset{\alpha}{n}{}^{i}\,\nabla_i \underset{\alpha}{\nu} \tag{5}$$

ı Hilfe zieht:

Satz 17. *Der HKK.* $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}, \underset{\alpha}{\nu})$ *ist ein Kugelkomplex, wenn* $r = 2$ *und* $\underset{\alpha}{\nabla}\underset{\alpha}{\nu} \neq 0$ *t, und zwar regulär oder singulär, je nachdem ob* $\varrho = 2$ *oder* $\varrho = 1$ *ist. Der KK. ist ein Kugelsystem, wenn entweder* $r = 2$ *und* $\underset{\alpha}{\nabla}\underset{\alpha}{\nu} = 0$ *ist, oder wenn* $= 1$ *und* $\underset{\alpha}{\nabla}\underset{\alpha}{\nu} \not\equiv 0$ *ist; er ist in beiden Fällen regulär oder singulär, je nachdem,* $\varrho = 2$ *oder* $\varrho = 1$ *bzw.* $\varrho = 1$ *oder* $\varrho = 0$ *ist. Der HKK. ist eine Kugelhar, wenn* $r = 1$ *und* $\underset{\alpha}{\nabla}\underset{\alpha}{\nu} \equiv 0$ *ist.* $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}})$ *ist eine Einzelkugel, wenn* $r = 0$ *ist*[28]).

Zum Beweis bedienen wir uns der Formeln des § 3. Es sei zunächst $+ \iota \neq 0$. Da $|\underset{\alpha}{B}_{ik}|$ verschwindet, ist

$$\underset{\alpha}{B}_{ik} = \tfrac{1}{2}\,(a_i b_k + a_k b_i). \tag{7}$$

a) Es sei $r = 2$, so daß aus (4) folgt

$$\frac{|\hat{\mathfrak{b}}_i\,\hat{\mathfrak{b}}_k|}{|G_{ik}|} = \frac{3}{4\,(\underset{\alpha}{\nu}{}^2 + \iota)^2}\,(E^{ikl}\,\underset{\alpha}{\nu}_i\,a_k\,b_l)^2 \cdot \underset{\alpha}{j} = \frac{3}{4\,(\underset{\alpha}{\nu}{}^2 + \iota)^2}\,(\underset{\alpha}{n}{}^{i}\,\underset{\alpha}{\nu}_i)^2 \cdot \underset{\alpha}{j}. \tag{8}$$

Ist also (6) von Null verschieden, $\underset{\alpha}{\nu}_i \neq A a_i + B b_i$, so liegt nach (4) $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}})$ ein Kugelkomplex vor, der singulär wird, wenn $\underset{\alpha}{j}$ verschwindet. Ver-

[28]) Für $r = 1$ gibt es zu jedem x ein Büschel von Hauptrichtungen zu $\underset{\alpha}{\nu}$. $\underset{\alpha}{\nabla}\underset{\alpha}{\nu} \not\equiv 0$ ll dann bedeuten, daß die Ableitung von $\underset{\alpha}{\nu}$ *nicht* nach *allen* diesen Hauptrichtungen rschwindet.

schwindet dagegen (6), so entartet $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}})$ in ein System, dessen Hüllflächen von den Punkten

$$(9) \qquad \mathfrak{q} = \pm \sqrt{-\frac{c^i c_i}{\iota \underset{\alpha}{\nu}^2 + 1}}\,(\mathfrak{x} + \underset{\alpha}{\nu}\,\mathfrak{y}) + c^i \mathfrak{x}_i \quad \text{mit} \quad c^i \underset{\alpha}{B}_{ik} = \underset{\alpha}{\nu}_k \sqrt{-\frac{c^l c_l}{\iota \underset{\alpha}{\nu}^2 + 1}}$$

beschrieben werden. Sie fallen zusammen für $\varrho = 1$ (singuläres System).

b) Es sei $r = 1$. Ist (6) nicht identisch Null, $\underset{\alpha}{\nu}_i \neq A a_i$, so ist $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}})$ ein System mit den Hüllflächen $(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{q} = \underset{\alpha}{n}^i \mathfrak{x}_i$ mit $\underset{\alpha}{n}^i \underset{\alpha}{n}_i = 0$, deren Anzahl 2 oder 1 ist, je nachdem, ob $\varrho = 1$ oder $\varrho = 0$ ist. Verschwindet (6) identisch, so erkennt man aus (4), daß $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}})$ in eine Schar entartet.

c) Für $r = 0$ schließlich ist $H_{ik} = \underset{\alpha}{\nu} G_{ik}$: der HK. besteht nur aus Flachstellen, $\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}$ ist konstant.

Für $\underset{\alpha}{\nu}^2 + \iota = 0$ stellt $\underset{\alpha}{\mathfrak{b}} = -\sqrt{-\iota}\,\mathfrak{x} + \iota\,\mathfrak{y}$ einen der beiden Zentralpunkte (§ 3) von $\mathfrak{x}$ dar. Wegen $\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}_i = \underset{\alpha}{B}_{ik} \mathfrak{x}^k$ ist $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}})$ für $r = 2$ eine Fläche mit einer oder keiner Normalen (reguläre oder singuläre Fläche) und für $r = 1$ eine Kurve mit oder ohne Bogenlänge je nach dem Range von $\underset{\alpha}{B}_{il} \underset{\alpha}{B}^l_k$. Für $r = 0$ ist $\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}$ konstant: $(\mathfrak{x})$ ist der in § 2 besprochene Sonderfall des Komplexes mit $R_{iklm} = 0$. Satz 17 gilt also auch für $\underset{\alpha}{\nu}^2 + \iota = 0$, wenn man die Punkte mit zu den Kugeln zählt.

Nehmen wir Satz 17 mit den Ergebnissen von § 3 über die Komplexstellen zusammen, so finden wir folgende *Charakterisierung der Komplexe, die nur Stellen einer Art besitzen*[29]):

(10)

Komplexstelle	$(\underset{1}{\mathfrak{b}})$ bei $\nabla \underset{1\,1}{\nu} \neq 0$	$(\underset{1}{\mathfrak{b}})$ bei $\nabla \underset{1\,1}{\nu} \equiv 0$
Alle $\underset{\alpha}{\nu}$ sind voneinander verschieden.		
a)	Regulärer Komplex	Reguläres System
$\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} \neq \underset{3}{\nu}$: $(\underset{1}{\mathfrak{b}})$ ist nicht der Apolarkomplex.		
b_1)	Singulärer Komplex	Singuläres System
b_2)	Reguläres System	Schar
$\underset{1}{\nu} = \underset{2}{\nu} = \underset{3}{\nu}$: $(\underset{1}{\mathfrak{b}})$ ist der Apolarkomplex.		
b_3)	Singulärer Komplex	Singuläres System
b_4)	Singuläres System	Schar
c)	—	Einzelkugel

[29]) Eine andere Kennzeichnung findet sich in Satz 20.

Wir wollen nun die Erweiterung der Ergebnisse von § 4 untersuchen, vieweit ein KK. den HK. bestimmt. Gegeben sei eine Kugelmannigfaltigkeit nit $n \leqq 3$ unabhängigen Parametern und auf ihr eine Ortsfunktion ν:

$$\hat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{b} + \nu \mathfrak{P} = \hat{\mathfrak{B}}(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}), \quad \hat{\mathfrak{B}}\hat{\mathfrak{B}} = \iota, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b} = \nu^2 + \iota.$$

Ein Kugelkomplex $(\mathfrak{x})$ ist so zu bestimmen, daß $\hat{\mathfrak{B}}$ Berührungskomplex von $\mathfrak{x}$ ist:

11) $$\begin{cases} \hat{\mathfrak{B}}\mathfrak{X} = 0, & \dfrac{\partial \hat{\mathfrak{B}}}{\partial v^{\beta}}\mathfrak{X} = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, n) \\ \mathfrak{X}\mathfrak{X} = 0, & \mathfrak{X}\mathfrak{P} = 1, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{x} - \mathfrak{P}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (11_1) haben die Lösung

12) $$\mathfrak{Z} = \sum_{\gamma=1}^{5-n} w_\gamma \mathfrak{A}_\gamma(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)});$$

hierin sind die $\mathfrak{A}_\gamma$ $5-n$ unabhängige und zu $\hat{\mathfrak{B}}$, $\dfrac{\partial \hat{\mathfrak{B}}}{\partial v^{(\beta)}}$ involutorische Sechservektoren; die w_γ sind von den $v^{(\beta)}$ unabhängige homogene Parameter. Die gesuchten $\mathfrak{X}$ sind die singulären der Komplexe $\mathfrak{Z}$.

a) Es sei zunächst $(\mathfrak{b})$ nicht entartet $(r = \varrho = 3)$ und auch $\nu \neq 0$. Dann bilden bei festen Werten $v^{(\beta)}$ die $\mathfrak{Z}$ ein Komplexbüschel, das zwei Kugeln enthält; ist $\mathfrak{X}$ die eine, so ist

13) $$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{x} + \nu\mathfrak{y} + d^i \mathfrak{x}_i) - \tfrac{1}{2}(1 + \iota\nu^2 + d^i d_i)\mathfrak{X} \quad \text{mit} \quad d^i B_{ik} = \nabla_k \nu$$

die andere. Sowohl $(\mathfrak{X})$ als auch $(\mathfrak{Z})$ bilden einen Kugelkomplex.

b) Ist $(\mathfrak{b})$ entartet, so bestimmen die Bedingungen (11_2) aus (12) einen einzigen Kugelkomplex, zu dem $(\mathfrak{b})$ HKK. ist.

c) Ist $(\mathfrak{b})$ nichtentartet $(n = 3)$, aber $\varrho < 3$, so bilden für feste Werte $v^{(\beta)}$ die $\mathfrak{Z}$ ein Komplexbüschel, das für $\varrho = 2$ nur eine Kugel, $\mathfrak{X}$, enthält. $\mathfrak{X})$ bildet einen Kugelkomplex. Für $\varrho = 1$ sind alle Komplexe des Büschels Kugeln, und $(\mathfrak{b})$ ist nach Tabelle (10) ein singulärer Kugelkomplex, den man nach § 2 durch passende Wahl der Parameter durch

14) $$\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{b}}(v^{(1)}, v^{(2)}) + v^{(3)}\mathfrak{q}(v^{(1)}, v^{(2)}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{q} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{q} = \mathfrak{b}_2\mathfrak{q} = 0$$

darstellen kann. Ist dann $\mathfrak{X}$ eine Lösung von (11), so wird das Kugelbüschel (12) durch

15) $$\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + w\mathfrak{q}$$

gegeben, so daß zu jeder der ∞^3 Kugeln $\mathfrak{b}$ ∞^1 Hauptkugeln $\mathfrak{z}$ gehören. Es sei nun $(\mathfrak{x})$ ein HK. zu $(\mathfrak{b})$; wegen (14) gehen dann ∞^1 Kugeln $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{q}$ nämlich die Parameterschar $v^{(1)} = \text{const}$, $v^{(2)} = \text{const}$). Da aber $\varrho = 1$, also $(\mathfrak{b})$ ein außergewöhnlicher HKK. von $(\mathfrak{x})$ ist, gibt es zu jedem $\mathfrak{x}$ wenigstens eine parabolische Hauptrichtung $\underset{\alpha}{n^i}$, und man findet $\mathfrak{q} = \underset{\alpha}{n^i}\mathfrak{x}_i$. Die zugehörige Hauptschar von $(\mathfrak{x})$ fällt mit der Parameterschar $v^{(1)} = \text{const}$,

$v^{(2)} = \text{const}$ zusammen; letztere ist daher ein parabolisches Kugelbüschel $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}} + w\mathfrak{q}$. Irgendein Kugelkomplex $(\mathfrak{x})$, der (11) löst, enthält also *alle* Lösungen (15) von (11): es gibt tatsächlich nur einen einzigen HK. zu $(\mathfrak{b})$.

Satz 18. *Ein KK., der weder ein HKK. noch der NK. ist, hat zwei HK. Ein HKK. hat genau einen HK.*

Untersucht man (12) für $n = 0, 1, 2$, so findet man:

Satz 19. *Entartet ein HKK., so zerfällt der HK. in lineare Kugelmannigfaltigkeiten.* Genauer: *Ist ein* $\underset{\alpha}{(\mathfrak{b})}$ *eine Einzelkugel, so besteht* $(\mathfrak{x})$ *aus den Kugeln des linearen Komplexes* $\underset{\alpha}{\mathfrak{B}}$. *Ist ein* $\underset{\alpha}{(\mathfrak{b})}$ *eine Schar, so besteht* $(\mathfrak{x})$ *aus* ∞^1 *linearen Kugelsystemen. Ist ein* $\underset{\alpha}{(\mathfrak{b})}$ *ein System, so besteht* $(\mathfrak{x})$ *aus* ∞^2 *linearen Kugelscharen.* Der Fall $n = 0$ kennzeichnet die Komplexe, die nur Flachstellen haben (vgl. § 2).

Im allgemeinen gibt es also zu jeder Kugelmannigfaltigkeit $(\mathfrak{b})$ mit einer Ortsfunktion v einen HK. $(\mathfrak{x})$, der nicht ausartet, wenn die $\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v^\beta}$ linear unabhängig sind; ist dies der Fall, so ist er auch regulär. Als Ausnahmen für die zulässigen $(\mathfrak{b})$ findet man ähnliche wie in § 4 für die $(\mathfrak{y})$.

Der Beweis zu Satz 18 läßt erkennen, daß für $\varrho < 2$ mit $\mathfrak{X}$ auch die Kugeln

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + w \underset{\alpha}{n^i} \mathfrak{x}_i \quad \text{mit} \quad \underset{\alpha}{n^i} B_{ik} = 0, \quad \underset{\alpha}{n^i} \underset{\alpha}{n_i} = 0, \tag{16}$$

Lösungen von (11) sind. Das gibt folgende Kennzeichnung:

Satz 20. *Ein regulärer Kugelkomplex mit nur außergewöhnlichen Stellen (und nur ein solcher) enthält mindestens eine Kongruenz von parabolischen Kugelbüscheln (und höchstens zwei).*

Um diesen Satz vollends zu beweisen, nehmen wir an, $(\mathfrak{x})$ enthalte eine und höchstens zwei derartige Kongruenzen, womit die Komplexe mit nur Flachstellen ausgeschlossen sind. Jedes $\mathfrak{x}$ trägt also die singuläre Kugel $\mathfrak{q} = \dot{u}^i \mathfrak{x}_i$ eines parabolischen Kugelbüschels, und wir können die Parameter so wählen, daß

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}) + \bar{u}^{(3)} \mathfrak{q}(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}), \tag{17}$$

mit $$\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}} = 1, \quad \bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{q} = 0, \quad \bar{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{q} \neq 0, \quad \bar{\mathfrak{x}}_2 \mathfrak{q} \neq 0$$

wird. Wir betrachten nun einen Komplex von Kugeln $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}} + \lambda \mathfrak{q}$, die die Mannigfaltigkeit der $\mathfrak{q}$ berühren; hierbei bestimmen wir $\bar{\mathfrak{b}}, \lambda$ aus den Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{b}} + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{q} = 0, \quad \bar{\mathfrak{x}}_2 \bar{\mathfrak{b}} + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_2 \mathfrak{q} = 0$$

$$\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{b}} = 0, \quad \mathfrak{q}_1 \bar{\mathfrak{b}} = 0, \quad \mathfrak{q}_2 \bar{\mathfrak{b}} = 0, \quad \bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{b}} = 1, \quad \bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{b}} = \cos\omega,$$

die $(\mathfrak{b})$ als KK. von $(\mathfrak{x})$ erkennen lassen. Wegen Ausschluß der Flachstellen ist $\mathfrak{b}$ nicht konstant, es gilt also (4), woraus vermöge $\mathfrak{b}_i \mathfrak{q} = 0$ und $\omega \neq 0$ $\dot{u}^i B_{ik} = 0$ folgt: die Berührungsrichtung $\dot{u}^i$ ist eine Hauptrichtung. $(\mathfrak{x})$ hat daher nur außergewöhnliche Stellen.

Wir wollen noch einige Eigenschaften der KK. mit konstantem ν angeben. *Ist* $(\hat{\mathfrak{b}})$ *ein nichtentarteter KK. von* $(\mathfrak{x})$ *mit konstanter Normalkrümmung, so ist auch* $(\mathfrak{x})$ *ein KK. von* $(\hat{\mathfrak{b}})$. Für die Normalkugel eines solchen KK. findet man:

18) $$\mathring{\mathfrak{y}} = -\iota\sqrt{\iota}\sin\omega\,\mathfrak{x} + \cos\omega\,\mathfrak{y}.$$

Der NK. von $(\hat{\mathfrak{b}})$ ist daher wieder ein KK. von $(\mathfrak{x})$ mit konstanter Normalkrümmung. Weiter folgt:

Satz 21. *Die nichtentarteten KK. mit konstanter Normalkrümmung sind die einzigen regulären Kugelkomplexe, die dieselben Trajektorienkreise haben wie* $(\mathfrak{x})$. *Sie haben mit* $(\mathfrak{x})$ *ebenfalls das Querkugelbündel gemeinsam.*

Denn umgekehrt muß für einen derartigen Kugelkomplex (1) und (18) gelten, so daß aus (4) $\omega = \text{const}$ folgt. Ein solcher KK. entsteht also aus $(\mathfrak{x})$, indem alle Kugeln $\mathfrak{x}$ um einen konstanten Winkel in dem Kugelbüschel durch den Trajektorienkreis verschoben werden [30]).

Die Hauptkrümmungen eines nichtentarteten KK. mit konstantem ν sind

19) $$\mathring{\underset{\alpha}{\nu}} = \frac{\underset{\alpha}{\nu}\,\nu + \iota}{\nu - \underset{\alpha}{\nu}};$$

entweder haben daher alle diese KK. eine konstante Hauptkrümmung oder keiner; ferner ist die Art der Komplexstelle für alle dieselbe wie für $(\mathfrak{x})$. Nach Satz 18 hat ein solcher KK. zwei HK.: nämlich $(\mathfrak{x})$ und den Komplex der Kugeln

20) $$\mathfrak{z} = \cos 2\,\omega\,\mathfrak{x} + \sqrt{\iota}\,\sin 2\,\omega\,\mathfrak{y};$$

letzterer ist also ebenfalls KK. von $(\mathfrak{x})$ mit konstanter Normalkrümmung.

§ 10.

Reguläre Hauptkrümmungskomplexe.

Der Normalkomplex eines nichtentarteten Kugelkomplexes ist eindeutig bestimmt; er ist für den nichtentarteten (also erst recht für den regulären) HKK. $(\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}, \underset{\alpha}{\nu})$:

1) $$\mathfrak{y} = \underset{\alpha}{n^i}\,\mathfrak{x}_i.$$

Satz 22. *Die Normalkugeln des nichtentarteten HKK. sind die Querkugeln der zugeordneten Hauptscharen.*

---

[30]) Vgl. die Analogie der KK. mit konstantem ν mit den Strahlenkomplexen, die man durch konstante Verschraubung der Strahlen eines Strahlenkomplexes längs dessen Binormalen erhält (W. Haack, Differ.-Geom. d. Strahl.-Kpl. V, Math. Zeitschr. 33, S. 228).

Durchläuft $\mathfrak{x}$ eine solche Hauptschar, so durchläuft das zugehörige $\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}$ eine Schar, deren Querkreise nach § 6 gerade die Trajektorienkreise von $(\mathfrak{x})$ längs der Hauptschar sind, und deren Querkugel

$$\underset{\alpha}{\hat{\mathfrak{b}}} \equiv \underset{\alpha}{n^i}\,\underset{\alpha}{\hat{\mathfrak{b}}_i} = \underset{\alpha}{n^i}\,\omega_i\,(-\sin\omega\,\mathfrak{x} + \sqrt{\iota}\cos\omega\,\mathfrak{y}) \tag{2}$$

ist; sie hat die Hauptnormalkugel $\mathfrak{h} = -\sqrt{\iota}\,\underset{\alpha}{n^i}\,\underset{\alpha}{\nu_i}\,\underset{\alpha}{n^k}\,\mathfrak{x}_k$, ist also nach (1) eine geodätische Schar des regulären HKK. (Es ist zu beachten, daß bei einem nichtentarteten HKK. stets $\underset{\alpha}{\nu^2} + \iota$ und $\underset{\alpha}{n^i}\,\underset{\alpha}{\nu_i}$ von Null verschieden sind.)

Satz 23. *Durchläuft $\mathfrak{x}$ eine Hauptschar, so durchläuft $\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}$ im zugehörigen regulären HKK. eine reguläre geodätische Kugelschar. Diese Scharen sind orthogonal zu denjenigen Kugelsystemen des HKK., die den Systemen $\underset{\alpha}{\nu} = \text{const}$ des HK. entsprechen.*

Der zweite Teil des Satzes ist noch zu zeigen. $\mathfrak{x}$ durchlaufe eine Schar, längs der $\underset{\alpha}{\nu}$ konstant sei, und die die Querkugel $v^i\mathfrak{x}_i$ mit $v^i\,\underset{\alpha i}{\nu} = 0$ haben möge. Dann ist die Querkugel der zugeordneten Schar des HKK. nach (9. 4) $v^i\,\underset{\alpha}{\hat{\mathfrak{b}}_i} = \iota\sqrt{\iota}\cdot\sin\omega\cdot v^i\,\underset{\alpha}{B_{ik}}\,\mathfrak{x}^k$; sie steht also senkrecht zu (2). Ferner sieht man aus (2), daß der Konformbogen der genannten geodätischen Scharen des HKK. bis auf eine Konstante gleich dem Schnittwinkel von $\mathfrak{x}$ und $\underset{\alpha}{\mathfrak{b}}$ ist:

$$\sigma \equiv \int_{t_0}^{t} \sqrt{\underset{\alpha}{n^i}\,\underset{\alpha}{n^k}\,\underset{\alpha}{\hat{\mathfrak{b}}_i}\,\underset{\alpha}{\mathfrak{b}_k}}\,dt = \underset{\alpha}{\omega}(t) - \underset{\alpha}{\omega}(t_0). \tag{3}$$

Letzteres gilt auch bei entartetem HKK.

Wir wollen alle regulären Kugelkomplexe $(\mathfrak{z})$ bestimmen, für die der reguläre Komplex $\mathfrak{b}\,(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ HKK. ist (natürlich bei jedesmal verschiedenem ν), und die auf $(\mathfrak{b})$ dieselbe Kongruenz von regulären, geodätischen und zu ∞^1 Kugelsystemen orthogonalen Kugelscharen $u^{(i)}(t)$ bestimmen. Diese Scharen mögen die Querkugeln $\mathfrak{b}'$ haben, $\mathfrak{w}$ sei die Normalkugel von $\mathfrak{z}$; es sollen die Normierungen $\mathfrak{z}\mathfrak{z} = 1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b} = 1$, $\mathfrak{w}\mathfrak{w} = 1$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}' = 1$ gelten. Es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$\mathfrak{b} = \cos\alpha\cdot\mathfrak{z} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{w}, \qquad \mathfrak{b}' = -\sin\alpha\cdot\mathfrak{z} + \cos\alpha\cdot\mathfrak{w},$$

woraus

$$\mathfrak{z} = \cos\alpha\cdot\mathfrak{b} - \sin\alpha\cdot\mathfrak{b}', \qquad \mathfrak{w} = \sin\alpha\cdot\mathfrak{b} + \cos\alpha\cdot\mathfrak{b}'$$

folgt. Da $\mathfrak{w}$ Normalkugel von $\mathfrak{z}$ sein soll, muß

$$\alpha_i = \mathfrak{b}'\mathfrak{b}_i \equiv \dot{u}_i : \dot{\sigma} \tag{4}$$

gelten. Nach Anm. 24 (§ 7) ist bei derartigen geodätischen Kongruenzen $\dot{u}_i : \dot{\sigma} = \sigma_i$, wo σ der Konformbogen längs einer Schar ist, und $\sigma = \text{const}$ die orthogonalen Systeme gibt. (4) ist daher erfüllbar:

$$\alpha = \sigma + \text{const}. \tag{5}$$

Längs der Scharen auf (ȝ), die den geodätischen auf (b) entsprechen, gilt dann $d\varpi = -\operatorname{ctg}\alpha \cdot d\beta$, es sind also Hauptscharen von (ȝ). Ist insbesondere (x) ein HK. von (b), so folgt für alle diese ȝ:

$$\beta = \cos\omega\, x + \sqrt{\iota}\sin\omega\, y, \qquad \omega \equiv \alpha_x - \alpha_\beta = \text{const.} \tag{6}$$

Das sind nach Satz 21 die Kugelkomplexe, die mit (x) dieselben Trajektorienkreise gemeinsam haben.

Satz 24. *Die regulären Kugelkomplexe, die mit* (x) *denselben regulären HKK.* (*bei verschiedenem* ν) *gemeinsam haben und dort dieselben geodätischen Scharen erzeugen, sind die nichtentarteten KK. von* (x) *mit konstanter Normalkrümmung* $\nu \neq \sqrt{-\iota}$.

(5) gibt eine Deutung der Konformbogenlänge σ längs einer regulären geodätischen Schar $x(t)$. Man bette die Schar ein in eine Kongruenz von regulären geodätischen Kugelscharen, die zu ∞^1 Kugelsystemen orthogonal sind, und wähle irgendeinen regulären Komplex (ȝ), zu dem (x) in bezug auf diese Kongruenz HKK. ist. Dann entspricht der Schar $x(t)$ eine Hauptschar $\beta(t)$, und σ ist bis auf eine Konstante gleich dem Schnittwinkel von $x(t)$ und $\beta(t)$.

Als letztes werde noch der zweite Fundamentaltensor des regulären HKK. angegeben:

$$\underset{\alpha}{\mathfrak{y}_i}\,\underset{\alpha}{\hat{\mathfrak{b}}_k} = \sin\underset{\alpha}{\omega}\,[\iota\sqrt{\iota}\,\underset{\alpha}{B^l_k}\;\underset{\alpha}{n_{li}} + \underset{\alpha}{n_i}\;\underset{\alpha}{\omega_k}\;(1+\iota\,\underset{\alpha}{\nu^2})]. \tag{7}$$

Man erkennt, daß in dem regulären HKK., der zu $\underset{\alpha}{\nu}$ *gehört, die Hauptrichtungen* $\underset{\alpha}{n^i}$ *und* $\underset{\beta}{n^i}$ $(\alpha \neq \beta)$ *zueinander konjugiert sind.*

(Eingegangen am 23. Mai 1939.)

Zum Entwicklungssatz bei polaren Eigenwertaufgaben.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Es wird vorausgesetzt:

A. Im Intervall $a \leqq x \leqq b$ sind die Funktionen $f_\nu(x)$ reell und ν-mal stetig differenzierbar, $f_n(x) \neq 0$, $g(x)$ stetig und $\neq 0$, ferner

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x),$$

$$U_\mu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} [\alpha_\mu^{(\varkappa)}\, y^{(\varkappa)}(a) + \beta_\mu^{(\varkappa)}\, y^{(\varkappa)}(b)] \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

und die Matrix der Koeffizienten $\alpha_\mu^{(\varkappa)}$, $\beta_\mu^{(\varkappa)}$ vom Rang n. Die mit diesen Ausdrücken gebildete Eigenwertaufgabe

$$(1) \qquad \begin{cases} L(y) = \lambda g(x)\, y, \\ U_\mu(y) = 0 \end{cases} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

soll selbstadjungiert sein, $\lambda = 0$ soll kein Eigenwert sein.

Ist stets $g(x) > 0$, so folgt bekanntlich aus der Theorie der orthogonalen Integralgleichungen fast unmittelbar, daß jede n-malig stetig differenzierbare Funktion $F(x)$, welche die Randbedingungen von (1) erfüllt, sich in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln läßt. Wechselt jedoch $g(x)$ sein Vorzeichen, d. h. liegt eine polare Eigenwertaufgabe vor, so sind für die zugehörige polare Integralgleichung zwar die entsprechenden Entwicklungssätze ebenfalls durch Hilbert, Fubini und Garbe bewiesen [1]), aber es sind noch weitere Überlegungen nötig, wenn man aus diesen Sätzen zu dem Entwicklungssatz für die Eigenwertaufgabe gelangen will, der dem vorher genannten Satz für den Fall $g > 0$ entspricht. Diese Überlegungen seien hier mitgeteilt, da weder sie noch der Satz selber sich in der Literatur zu finden scheinen [2]).

[1]) D. Hilbert, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen math.-phys. Klasse (1906), S. 462—472; wieder abgedruckt in D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin 1912 S. 195—204; G. Fubini, Annali di matematica pura ed applicata (3) 17 (1910), S. 111—139; E. Garbe, Math. Annalen 76 (1915), S. 527—547.

[2]) Mit Ausnahme des Falles $n = 2$, der von M. Mason, Transactions of the american mathematical society 8 (1907), S. 427—432 nach einer anderen Methode behandelt ist. In der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften II_3, Leipzig 1923—1927 macht (Hilb) auf S. 1253 keine genauen Angaben, erwähnt jedoch zusätzliche Voraussetzungen über die Nullstellen der zu entwickelnden Funktion $F(x)$. Solche Voraussetzungen sind jedoch unnötig, wie hier gezeigt werden wird.

§ 1.

Über polare Integralgleichungen.

Es sei $K(x, \xi)$ für $a \leqq x \leqq b$ stetig und *symmetrisch*, d. h.

$$K(x, \xi) = K(\xi, x);$$

erner *positiv definit*, d. h. für jede stetige Funktion $u(x)$

2) $$\int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\, u(x)\, u(\xi)\, dx\, d\xi \geqq 0;$$

veiter sei der Kern *allgemein*, d. h. zu jeder stetigen Funktion $F(x)$ und u jedem $\varepsilon > 0$ soll es eine stetige Funktion $Q(x)$ geben, so daß

3) $$\int_a^b \left[F(x) - \int_a^b K(x, \xi)\, Q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < \varepsilon$$

st; schließlich sei $V(x)$ eine Funktion, die nur die Werte ± 1 annimmt, und war in endlich vielen Teilintervallen den Wert $+1$ und ebenso in endlich vielen Teilintervallen den Wert -1, und es sei

4) $$\int_a^b K(x, t)\, V(t)\, K(t, \xi)\, dt \not\equiv 0.$$

Dann hat die polare Integralgleichung

5) $$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, V(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

nendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte; jeder Eigenwert ist reell und besitzt eine endliche Vielfachheit, die Eigenwerte, eder in seiner Vielfachheit aufgeführt, lassen sich in einer Folge

$$\ldots, \lambda_{-2} \leqq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$$

chreiben;

$$\sum \frac{1}{|\lambda_p|} \text{ konvergiert und ist } \leqq \int_a^b K(s, s)\, ds\ ^3).$$

Es gibt ein vollständiges System von Eigenfunktionen

$$\ldots, \varphi_{-2}(x), \varphi_{-1}(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots,$$

las so normiert ist, daß

6) $$\int_a^b V(x)\, \varphi_p(x)\, \varphi_q(x)\, dx = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\, e_{pq}$$

---

[3]) Dieses ist eine Folge von (7), da wegen (6)

$$\int_a^b \varphi_p^2(x)\, dx \geqq \left| \int_a^b V(x)\, \varphi_p^2(x)\, dx \right| = 1$$

t.

ist ($e_{pq} = 1$ für $p = q$ und $= 0$ für $p \neq q$);

(7) $$\sum \frac{\varphi_p^2}{|\lambda_p|} \text{ konvergiert und ist } \leqq K(s,s)\ ^4).$$

Jede stetige Funktion $F(x)$, die mit Hilfe einer stetigen Funktion $q(x)$ quellenmäßig in der Gestalt

(8) $$F(x) = \int_a^b \int_a^b K(x,t)\, V(t)\, K(t,\xi)\, V(\xi)\, q(\xi)\, dt\, d\xi$$

darstellbar ist, ist in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelbar:

(9) $$F(x) = \Sigma c_p\, \varphi_p(x)$$

mit

(10) $$c_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \int_a^b F(x)\, V(x)\, \varphi_p(x)\, dx.$$

Diese Tatsachen sind, von späteren Zusätzen Garbes abgesehen, von D. Hilbert [1]) mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen und von Fubini [1]) auf eine unmittelbarere Art bewiesen. Es ist hier darauf verzichtet, die Sätze in der schärfsten bekannten Form anzuführen.

§ 2.

Ein Hilfssatz über allgemeine Kerne.

Hilfssatz. Es sei $G(x, \xi)$ ein stetiger (nicht notwendig symmetrischer) und allgemeiner Kern. Sind $\sigma(x)$, $\tau(x)$ stetige Funktionen mit nur endlich vielen Nullstellen, so ist auch $\sigma(x)\, G(x, \xi)\, \tau(\xi)$ ein allgemeiner Kern.

Beweis. Zunächst wird bewiesen, daß $G(x, \xi)\, \tau(\xi)$ ein allgemeiner Kern ist. Es seien $F(x)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da G ein allgemeiner Kern ist, gibt es eine stetige Funktion $Q(x)$, so daß

(11) $$A = \int_a^b \left[F(x) - \int_a^b G(x,\xi)\, Q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < \varepsilon$$

---

[4]) Garbe[1]), § 1. Dort lautet (7) allerdings anders, da die Normierung der φ_p eine andere ist; außerdem ist zu beachten, daß die Integralgleichung (5) bei Garbe in einer etwas anderen Gestalt erscheint. (7) ergibt sich jedoch leicht, wenn man dem Beweisgang Garbes folgt und an Stelle der Formel (10) auf S. 531 bei Garbe als Ausgangspunkt die Formel

$$K(\lambda; s, t) = K(s,t) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda\, \varphi_p(s)\, \varphi_p(t)}{|\lambda_p|\, (\lambda_p^2 - \lambda)}$$

nimmt.

ist. Um jede etwa vorhandene Nullstelle ξ_ν von $\tau(x)$ wird ein offenes Intervall $i_\nu = (a_\nu, b_\nu)$ so abgegrenzt[5]), daß die Intervalle getrennt liegen und für $\mathfrak{J} = \sum i_\nu$

$$\overline{C} = \int_a^b \Big[\int_{\mathfrak{J}} |G(x,\xi)| \operatorname*{Max}_{a \leqq \xi \leqq b} |Q(\xi)|\, d\xi\Big]^2 dx < \varepsilon \tag{12}$$

ist. Wird $\mathfrak{R} = \langle a, b\rangle - \mathfrak{J}$,

$$B = \int_a^b \Big[F(x) - \int_{\mathfrak{R}} G(x,\xi)\, Q(\xi)\, d\xi\Big]^2 dx, \qquad C = \int_a^b \Big[\int_{\mathfrak{J}} G(x,\xi)\, Q(\xi)\, d\xi\Big]^2 dx$$

gesetzt, so ist

$$A = \int_a^b \Big[F(x) - \int_{\mathfrak{R}} G(x,\xi)\, Q(\xi)\, d\xi - \int_{\mathfrak{J}} G(x,\xi)\, Q(\xi)\, d\xi\Big]^2 dx$$

$$= B + C - 2\int_a^b \Big[F(x) - \int_{\mathfrak{R}} G(x,\xi)\, Q(\xi)\, d\xi\Big]\Big[\int_{\mathfrak{J}} G(x,\xi)\, Q(\xi)\, d\xi\Big] dx.$$

Hieraus folgt mit der Schwarzschen Ungleichung

$$A \geqq B + C - 2\sqrt{B}\sqrt{C} = (\sqrt{B} - \sqrt{C})^2.$$

Wegen (11) ist daher

$$\sqrt{B} - \sqrt{C} < \sqrt{\varepsilon}.$$

Wegen (12) folgt hieraus, da offenbar $C \leqq \overline{C}$ ist,

$$B < 4\,\varepsilon.$$

Es sei nun i_ν^* das Intervall, das aus i_ν entsteht, wenn man dieses unter Festhaltung von ξ_ν auf die Hälfte zusammenschrumpfen läßt. Es wird

$$Q^*(x) = \begin{cases} Q(x) & \text{in } \mathfrak{R}, \\ 0 & \text{in } \mathfrak{J}^* = \sum i_\nu^* \end{cases}$$

gesetzt und in $i_\nu - i_\nu^*$ gleich der linearen Funktion, deren geometrisches Bild die Punkte $a_\nu, Q(a_\nu)$ bzw. $b_\nu, Q(b_\nu)$ mit den entsprechenden Endpunkten von i_ν^* geradlinig verbindet. Nach (12) ist dann auch

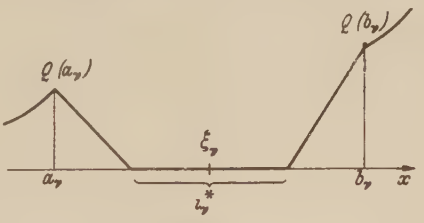


Fig. 1.

$$C^* = \int_a^b \Big[\int_{\mathfrak{J}} G(x,\xi)\, Q^*(\xi)\, d\xi\Big]^2 dx < \varepsilon,$$

also, wenn man wie im ersten Abschnitt umformt und jetzt nach oben abschätzt,

$$A^* = \int_a^b \Big[F(x) - \int_a^b G(x,\xi)\, Q^*(\xi)\, d\xi\Big]^2 dx$$

$$\leqq (\sqrt{B} + \sqrt{C^*})^2 < (2\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon})^2 = 9\,\varepsilon.$$

[5]) Ist $\xi_\nu = a$ oder b, so werden Intervalle $\langle a, a + \delta)$ bzw. $(b - \delta, b\rangle$ gewählt.

Wird nun

$$q(x) = \frac{Q^*(x)}{\tau(x)}$$

gesetzt, wobei der Bruch für $x = \xi_\nu$ den Wert 0 bedeuten soll, so ist $q(x)$ stetig und

$$\int_a^b \left[F(x) - \int_a^b G(x,\xi)\,\tau(\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right]^2 dx < 9\,\varepsilon,$$

und damit ist die erste Teilbehauptung bewiesen.

Es braucht daher nur noch bewiesen zu werden, daß auch $\sigma(x)\,G(x,\xi)$ ein allgemeiner Kern ist. Dafür wird zunächst gezeigt, daß sich jede stetige Funktion $\Phi(x)$, die an den Nullstellen von $\sigma(x)$ verschwindet, in der behaupteten Weise approximieren läßt. Die Nullstellen von $\sigma(x)$ seien x_ν. Beliebig nahe an x_ν gibt es Punkte $a_\nu < x_\nu < b_\nu$, so daß

$$|\sigma(a_\nu)| = \operatorname*{Max}_{a_\nu \leqq x \leqq x_\nu} |\sigma(x)|, \qquad |\sigma(b_\nu)| = \operatorname*{Max}_{x_\nu \leqq x \leqq b_\nu} |\sigma(x)|$$

ist[6]). Wird $\mathfrak{I} = \sum(a_\nu, b_\nu)$ gesetzt, so kann daher erreicht werden, daß die Intervalle (a_ν, b_ν) getrennt liegen und

$$D = \int_{\mathfrak{I}} \Phi^2(x)\,dx < \varepsilon \tag{13}$$

ist. Es wird

$$\sigma^*(x) = \begin{cases} \sigma(a_\nu) & \text{in} \quad a_\nu \leqq x \leqq x_\nu, \\ \sigma(b_\nu) & \text{in} \quad x_\nu \leqq x \leqq b_\nu, \\ \sigma(x) & \text{in} \quad \mathfrak{R} = \langle a, b\rangle - \mathfrak{I} \end{cases}$$

gesetzt. Da $\sigma^*(x) \neq 0$ ist und $\Phi(x)$ an den Stellen x_ν verschwindet, ist $\frac{\Phi(x)}{\sigma^*(x)}$ eine stetige Funktion. Da G ein allgemeiner Kern ist, gibt es daher eine stetige Funktion $q(x)$, so daß

$$\int_a^b \left[\frac{\Phi(x)}{\sigma^*(x)} - \int_a^b G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right]^2 dx < \frac{\varepsilon}{[\operatorname{Max}\sigma^*(x)]^2},$$

also

$$\int_a^b \left[\Phi(x) - \sigma^*(x)\int_a^b G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right]^2 dx < \varepsilon$$

ist. Es ist dann erst recht

$$\int_{\mathfrak{R}} \left[\Phi(x) - \sigma(x)\int_a^b G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right]^2 dx < \varepsilon \tag{14}$$

und

$$\int_{\mathfrak{I}} \left[\Phi(x) - \sigma^*(x)\int_a^b G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right]^2 dx < \varepsilon. \tag{15}$$

[6]) Ist $x_\nu = a$ oder b, so fällt die erste bzw. die zweite Beziehung fort.

Wird

$$E^* = \int_{\mathfrak{J}} \left[\sigma^*(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx$$

gesetzt, so folgt aus (15) mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\varepsilon > D + E^* - 2\int_{\mathfrak{J}} \Phi(x)\cdot\sigma^*(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\, dx$$

$$\geqq D + E^* - 2\sqrt{D}\sqrt{E^*} = (\sqrt{D} - \sqrt{E^*})^2,$$

also wegen (13)

$$E^* < 4\,\varepsilon.$$

Da in $\mathfrak{J}$

$$|\sigma(x)| \leqq |\sigma^*(x)|$$

gilt, ist erst recht

$$E = \int_{\mathfrak{J}} \left[\sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < 4\,\varepsilon,$$

also bei ähnlicher Rechnung wie vorher

$$\int_{\mathfrak{J}} \left[\Phi(x) - \sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < 9\,\varepsilon$$

und daher wegen (14)

$$\int_a^b \left[\Phi(x) - \sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < 10\,\varepsilon,$$

also in der Tat Φ in der behaupteten Weise approximierbar.

Ist nun eine beliebige stetige Funktion $F(x)$ gegeben, so setze man

$$M = \operatorname{Max} |F(x)|.$$

Man kann die Nullstellen x_ν von $\sigma(x)$ so in endlich viele getrennte Intervalle (a_ν, b_ν) einschließen, daß

(16) $$|\mathfrak{J}|\, M^2 < \varepsilon \quad \text{für} \quad \mathfrak{J} = \Sigma\,(a_\nu, b_\nu)$$

ist. Wird

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_\nu}{a_\nu - x_\nu} F(a_\nu) & \text{in } a_\nu \leqq x \leqq x_\nu, \\ \dfrac{x - x_\nu}{b_\nu - x_\nu} F(b_\nu) & \text{in } x_\nu \leqq x \leqq b_\nu, \\ F(x) & \text{in } \mathfrak{R} = \langle a,b\rangle - \mathfrak{J} \end{cases}$$

gesetzt, so ist Φ stetig und verschwindet an den Nullstellen von $\sigma(x)$. Nach dem vorigen Ergebnis gibt es daher eine stetige Funktion $q(x)$, so daß

$$\int_a^b \left[\Phi(x) - \sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < \varepsilon$$

ist. Daher ist erst recht

$$\int_{\mathfrak{R}} \left[F(x) - \sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < \varepsilon \tag{17}$$

und

$$\int_{\mathfrak{Z}} \left[\Phi(x) - \sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < \varepsilon.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt nun, da $|\Phi(x)| \leqq M$ ist, mit (16) ähnlich wie vorher

$$\int_{\mathfrak{Z}} \left[\sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < 4\varepsilon$$

und daher bei Berücksichtigung von (17) schließlich

$$\int_a^b \left[F(x) - \sigma(x) \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi\right]^2 dx < 10\varepsilon.$$

§ 3.

Die polare Eigenwertaufgabe.

Es seien die Voraussetzungen (A) *erfüllt. Dabei sei jetzt* $g(x)$ *eine stetige Funktion, die nur endlich viele Nullstellen hat und mindestens einmal ihr Vorzeichen wechselt. Weiter sei für jede stetige Funktion* $y(x)$, *welche die Randbedingungen von* (1) *erfüllt,*

$$\int_a^b y\, L(y)\, dx \geqq 0 \text{ [7]}. \tag{18}$$

Dann hat die Randwertaufgabe (1) *unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte; jeder Eigenwert ist reell und hat eine endliche Vielfachheit; die Eigenwerte, jeder in seiner Vielfachheit aufgeführt, lassen sich in einer Folge*

$$\ldots \leqq \lambda_{-2} \leqq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$$

---

[7]) Da $L(y)$ als selbstadjungiert vorausgesetzt wird, ist $n = 2m$ gerade und $L(y)$ von der Gestalt

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} [h_\nu(x)\, y^{(\nu)}]^{(\nu)}$$

und somit

$$\int_a^b y\, L(y)\, dx = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu h_\nu(x)\, [y^{(\nu)}]^2\, dx + \left[\sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k (h_\nu y^{(\nu)})^{(\nu-k-1)}\, y^{(k)}\right]_a^b.$$

Daher ist die obige Voraussetzung des Textes sicher erfüllt, wenn $(-1)^\nu h_\nu \geqq 0$ und die eckige Klammer $\geqq 0$ ist für jede Funktion $y(x)$, die den Randbedingungen von (1) genügt.

chreiben, und

$$\sum \frac{1}{|\lambda_p|}$$

onvergiert.

Es gibt ein vollständiges System von Eigenfunktionen

$$\ldots, \psi_{-2}(x), \psi_{-1}(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots,$$

las so normiert ist, daß

19) $$\int_a^b g(x)\,\psi_p(x)\,\psi_q(x)\,dx = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\,e_{pq}$$

st ($e_{pq} = 1$ *für* $p = q$ *und* $= 0$ *für* $p \neq q$);

20) $$\sum \frac{\psi_p^2}{|\lambda_p|}$$

onvergiert und ist $\leqq G(x, x)$ [8]).

Jede n-mal stetig differenzierbare Funktion $F(x)$, *welche die Randbedingungen von* (1) *erfüllt, läßt sich in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln*:

21) $$F(x) = \sum c_p\,\psi_p(x)$$

nit

22) $$c_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\int_a^b F(x)\,g(x)\,\psi_p(x)\,d\,x$$ [9]).

Beweis. Da $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist, gibt es zu der Randwertaufgabe

$$L(y) = 0; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots. n)$$

ine Greensche Funktion $G(x, \xi)$, und die Funktion $y(x)$ ist genau dann eine Lösung der Randwertaufgabe (1), wenn sie eine Lösung der Integralgleichung

23) $$y(x) = \lambda\int_a^b G(x, \xi)\,g(\xi)\,y(\xi)\,d\,\xi$$

st. Wird

$V(x) = \operatorname{sgn} g(x), \quad K(x, \xi) = G(x, \xi)\sqrt{|g(x)\,g(\xi)|}, \quad \eta(x) = y(x)\sqrt{|g(x)|}$

gesetzt, so wird aus der obigen Integralgleichung

24) $$\eta(x) = \lambda\int_a^b K(x, \xi)\,V(\xi)\,\eta(\xi)\,d\,\xi.$$

---

[8]) Für die Bedeutung von G vgl. den Anfang des Beweises.

[9]) Dieser Teil des Satzes entspricht dem Entwicklungssatz des § 2 bei Garbe[1]), hne sich jedoch unmittelbar aus dem Satz von Garbe herleiten zu lassen.

Jede Lösung der Integralgleichung (23) geht in eine Lösung der Integralgleichung (24) über, und umgekehrt auch jede Lösung von (24) in eine Lösung von (23), da

$$\int_a^b G(x,\xi)\, V(\xi)\sqrt{|g(\xi)|}\,\eta(\xi)\,d\xi,$$

d. h. $y = \dfrac{\eta(x)}{\sqrt{|g(x)|}}$ eine stetige Funktion von x ist.

$V(x)$ ist eine Funktion von der in § 1 vorkommenden Art, $K(x,\xi)$ ist ein stetiger und symmetrischer Kern, da G stetig und symmetrisch ist. K ist überdies positiv definit; denn für eine beliebige stetige Funktion $u(x)$ ist die Randwertaufgabe

$$L(y) = u(x)\sqrt{|g(x)|}, \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

lösbar, und die Lösung ist

$$y = \int_a^b G(x,\xi)\, u(\xi)\sqrt{|g(\xi)|}\,d\xi,$$

also ist

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)\,u(x)\,u(\xi)\,dx\,d\xi &= \int_a^b\int_a^b G(x,\xi)\sqrt{|g(x)\,g(\xi)|}\,u(x)\,u(\xi)\,dx\,d\xi\\ &= \int_a^b u(x)\sqrt{|g(x)|}\,y(x)\,dx\\ &= \int_a^b y(x)\,L(y)\,dx \geqq 0.\end{aligned}$$

Weiter ist G und somit nach dem Hilfssatz auch K ein allgemeiner Kern. Denn ist irgendeine stetige Funktion $F(x)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so läßt sich F durch eine beliebig oft differenzierbare Funktion F^* so approximieren, daß F^* die Randbedingungen von (1) erfüllt und daß

$$\int_a^b (F - F^*)^2\,dx < \varepsilon$$

ist. Wird

$$q(x) = L(F^*)$$

gesetzt, so ist $y = F^*$ Lösung der Randwertaufgabe

$$L(y) = q(x); \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

also

$$F^*(x) = \int_a^b G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi$$

nd daher

$$\int_a^b [F(x) - \int_a^b G(x,\xi)\, q(\xi)\, d\xi]^2\, dx = \int_a^b [F(x) - F^*(x)]^2\, dx < \varepsilon,$$

lso in der Tat G ein allgemeiner Kern.

Schließlich erfüllt K die Ungleichung (4). Denn da $G(x, \xi) \not\equiv 0$ ist, ibt es einen Wert ξ_0, so daß

$$\gamma(x) = g(x)\, G(x, \xi_0) \not\equiv 0$$

st. Daher ist die Lösung der Randwertaufgabe

$$L(y) = \gamma(x); \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

icht identisch Null, d. h. es ist

$$y = \int_a^b G(x,t)\, \gamma(t)\, dt = \int_a^b G(x,t)\, g(t)\, G(t, \xi_0)\, dt \not\equiv 0,$$

nd hieraus folgt (4).

Die Integralgleichung (24) erfüllt demnach die in § 1 aufgestellten Vorussetzungen. Daher folgt der erste Teil der Behauptungen unmittelbar us dem ersten Teil des in § 1 angeführten Satzes über die polare Integralleichung. Ebenso aber auch der zweite Teil, wenn man beachtet, daß die igenfunktionen $\psi_p(x)$ der Randwertaufgabe (1) mit den Eigenfunktionen $_p(x)$ der Integralgleichung in der Beziehung

$$\varphi_p(x) = \psi_p(x) \sqrt{|g(x)|}$$

ehen. Zunächst folgt zwar aus (7)

$$\sum_{p=r}^{s} \frac{\psi_p^2}{\lambda_p} \leqq G(x,x)$$

ur für solche x, für die $g(x) \neq 0$ ist, aber, da die linke und rechte Seite eser Ungleichung stetig sind, dann auch für alle x.

Es bleibt noch der letzte Teil, d. h. der Entwicklungssatz zu beweisen. s sei also $F(x)$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion, welche die Randedingungen von (1) erfüllt. Da (18) für jede n-mal stetig differenzierbare unktion gilt, welche die Randbedingungen erfüllt, und da nach der Greenhen Formel

$$\int_a^b F\, L(\psi_p)\, dx = \int_a^b \psi_p\, L(F)\, dx$$

ist, gilt

$$0 \leqq \int_a^b \left(F - \sum_{p=r}^{s} c_p \psi_p\right) L\left(F - \sum_{p=r}^{s} c_p \psi_p\right) dx$$

$$= \int_a^b \left[F L(F) - 2 \sum_p c_p F L(\psi_p) + \sum_{p,q} c_p c_q \psi_p L(\psi_q)\right] dx.$$

Da ψ_p eine Lösung der Randwertaufgabe, also

$$L(\psi_p) = \lambda_p g \psi_p$$

ist, folgt hieraus

$$0 \leqq \int_a^b F L(F)\, dx - 2 \sum_p \lambda_p c_p \int_a^b F g \psi_p dx + \sum_{p,q} \lambda_q c_p c_q \int_a^b g \psi_p \psi_q dx,$$

also nach (19) und (22)

$$\sum |\lambda_p| c_p^2 \leqq \int_a^b F L(F)\, dx,$$

d. h.

$$\sum |\lambda_p| c_p^2.$$

konvergiert.

Daher folgt mit der Schwarzschen Ungleichung nach (20)

$$\sum_{p=r}^{s} |c_p \psi_p| = \sum_{p=r}^{s} \sqrt{|\lambda_p|}\, |c_p| \cdot \frac{|\psi_p|}{\sqrt{|\lambda_p|}} \leqq G(x,x) \sum_{p=r}^{s} |\lambda_p| c_p^2,$$

also ist

(25) $$\sum_p c_p \psi_p(x)$$

konvergent, und zwar konvergiert sogar die Reihe der absoluten Beträge gleichmäßig.

Für den Nachweis, daß diese Reihe die Summe F hat, wird eine Hilfsentwicklung herangezogen [10]). Wird

$$Q(x) = L(F)$$

gesetzt, so ist

(26) $$F(x) = \int_a^b G(x,\xi) Q(\xi)\, d\xi.$$

Da G ein allgemeiner Kern ist, ergibt sich aus dem Hilfssatz, daß auch

$$g(x) G(x,\xi) V(\xi) \sqrt{|g(\xi)|}$$

ein allgemeiner Kern ist. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es daher eine

[10]) Diesen Kunstgriff entnehme ich dem § 2 der Arbeit von Garbe.

tetige Funktion $q(x)$, so daß

27) $$\int_a^b [Q(x) - g(x) \int_a^b G(x,\xi)\, V(\xi) \sqrt{|g(\xi)|}\, q(\xi)\, d\xi]^2\, dx < \varepsilon^2$$

st. Wird

28) $$\begin{cases} Q^*(x) = g(x) \int_a^b G(x,\xi)\, V(\xi) \sqrt{|g(\xi)|}\, q(\xi)\, d\xi, \\ F^*(x) = \int_a^b G(x,\xi) Q^*(\xi)\, d\xi, \end{cases}$$

29) $$\delta(x) = Q(x) - Q^*(x)$$

gesetzt, so ist nach (27)

30) $$\int_a^b \delta^2(x)\, dx < \varepsilon^2$$

und nach (28)

$$\sqrt{|g(x)|}\, F^*(x) = \int_a^b \int_a^b K(x,t)\, V(t)\, K(t,\xi)\, V(\xi)\, q(\xi)\, dt\, d\xi.$$

Diese Funktion hat also nach § 1 eine gleichmäßig und absolut konvergente Entwicklung

$$\sqrt{|g(x)|}\, F^*(x) = \Sigma\, c_p^*\, \varphi_p(x)$$

mit

$$c_p^* = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \int_a^b F^*(x)\, g(x)\, \psi_p(x)\, dx.$$

Hieraus folgt

$$F^*(x) = \Sigma\, c_p^*\, \psi_p(x),$$

da die für die Reihe (25) durchgeführten Schlüsse auch für die hier rechts stehende Reihe durchführbar sind und die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe ergeben. Daher ist wegen (20)

$$\begin{aligned} |F^* - \Sigma\, c_p\, \psi_p| &\leqq \Sigma\, |c_p^* - c_p|\, |\psi_p| \\ &= \Sigma \sqrt{|\lambda_p|}\, |c_p^* - c_p| \cdot \frac{|\psi_p|}{\sqrt{|\lambda_p|}} \\ &\leqq G(x,x)\, \Sigma\, |\lambda_p|\, (c_p^* - c_p)^2. \end{aligned}$$

Hierin ist nach (26) und (28)

$$\begin{aligned} c_p^* - c_p &= \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \int_a^b [F^*(x) - F(x)]\, g(x)\, \psi_p(x)\, dx \\ &= \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \int_a^b \int_a^b G(x,\xi)\, g(x)\, \psi_p(x)\, \delta(\xi)\, dx\, d\xi. \end{aligned}$$

Da ψ_p Lösung der Randwertaufgabe (1) ist, gilt

$$\psi_p(\xi) = \lambda_p \int_a^b G(\xi, x)\, g(x)\, \psi_p(x)\, dx.$$

Daher ist

$$(c_p^* - c_p)^2 = \frac{1}{\lambda_p^2} \Big(\int_a^b \psi_p(\xi)\, \delta(\xi)\, d\xi \Big)^2 \leqq \frac{1}{\lambda_p^2} \int_a^b \psi_p^2\, d\xi \int_a^b \delta^2(\xi)\, d\xi$$

und somit nach (20) und (30)

$$|F^* - \Sigma c_p \psi_p| \leqq \varepsilon^2 G(x, x) \int_a^b G(\xi, \xi)\, d\xi = \varepsilon^2 A. \tag{31}$$

Nach (26), (28) und (29) ist

$$F(x) - F^*(x) = \int_a^b \delta(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi.$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt hieraus unter Beachtung von (30)

$$[F(x) - F^*(x)]^2 \leqq \varepsilon^2 \int_a^b G^2(x, \xi)\, d\xi,$$

also

$$|F(x) - F^*(x)| \leqq \varepsilon B, \tag{32}$$

wo B eine von F^* unabhängige Konstante ist. Aus (31) und (32) folgt somit

$$|F - \Sigma c_p \psi_p| \leqq \varepsilon^2 A + \varepsilon B.$$

Da hierin ε eine beliebige positive Zahl ist, folgt hieraus die Gleichung (21).

(Eingegangen am 6. Juni 1939.)

Über die Teilbarkeit des gewöhnlichen Differentialpolynoms dritter Ordnung durch ein ähnliches Polynom zweiter Ordnung.

Von

Franz Rádl in Prag.

§ 1.

Einleitung.

In seiner letzten Arbeit[1]) untersuchte der Verfasser die Bedingungen, unter welchen ein Polynom zweiter Ordnung durch ein Polynom erster Ordnung und ein Polynom dritter Ordnung durch ein Polynom erster Ordnung teilbar sind. Im folgenden wird dasselbe Problem für ein Polynomenpaar bezüglich dritter und zweiter Ordnung gelöst. Dadurch hält der Verfasser seine Untersuchung in dieser Hinsicht für beendet, weil die Lösung dieses Problems für die nächst höheren Ordnungen keine Schwierigkeiten mehr bietet, dagegen der allgemeine Fall des Polynomenpaares bezüglich m-ter und n-ter Ordnung zu weitläufigen Deduktionen führt.

In den nächsten zwei Paragraphen werden wir allgemeine vorläufige Untersuchungen vorausschicken.

§ 2.

Ein Theorem über die Wronskische Determinante.

Wir werden zuerst ein Theorem über die Wronskische Determinante beweisen. Die Elemente der ersten Zeile bezeichnen wir bei dieser Determinante durch zwei verschiedene Buchstaben α_i, β_j $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $= 1, 2, \ldots, n)$, weil wir voraussetzen wollen, daß die Funktionen α_i, unabhängige Lösungen der Gleichungen bezüglich von der m-ten und -ten Ordnung sind, deren Polynome lauten

$$a = a(y) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m y,$$
$$b = b(y) = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n y$$

Exponent gibt die Ordnung der Ableitung an). Es gilt deswegen

$$a_0 = |\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m| = |\alpha| \neq 0, \quad b_0 = |\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n| = |\beta| \neq 0;$$

[1]) Rádl, Über die Teilbarkeitsbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialpolynomen, Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 429–446.

hier wie im folgenden wird in der Wronskischen Determinante nur die erste Zeile oder nur das allgemeine Element ausgeschrieben.

Wenn wir die Bezeichnung

$$|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n| = A,$$

$$|\alpha_i \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n| = b(\alpha_i) = A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

einführen, so lautet das Theorem

$$|A_1 A_2 \ldots A_m| = |\beta|^{m-1} \cdot A, \tag{1}$$

(wo der Exponent $m - 1$ die Potenz bedeutet) oder:

Die Wronskische Determinante, deren erste Zeile die Elemente $A_1, A_2, \ldots A_m$ bilden, ist bis auf den Faktor $|\beta|^{m-1}$ gleich der Wronskischen Determinante A.

Bei der Bezeichnung

$$|\beta_j \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m| = a(\beta_j) = B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

gilt offenbar

$$|B_1 B_2 \ldots B_n| = (-1)^{mn} \cdot |\alpha|^{n-1} \cdot A. \tag{2}$$

Zum Beweis entwickeln wir die Determinante A nach den Elementen einer Spalte. Wenn wir die erste Spalte wählen, so erhalten wir ein *Polynom* A in α_1 von der $m + n - 1$-ten Ordnung. Aus der Gestalt der Determinante A schließen wir auf die allgemeine Lösung der *Gleichung* A

$$\alpha_1 = \cdot \alpha_2 + \cdot \alpha_3 + \ldots + \cdot \alpha_m + \cdot \beta_1 + \cdot \beta_2 + \ldots + \cdot \beta_n, \tag{3}$$

wo die Punkte vor den Buchstaben hier wie im folgenden Integrationskonstanten sind. Es ist üblich die Beziehung (3) so auszudrücken, daß in der verschwindenden Determinante A die Elemente der ersten Zeile linear abhängig sind [2]).

Die linke Seite der Beziehung (1) können wir auch in der Gestalt

$$|b(\alpha_1)\, b(\alpha_2) \ldots b(\alpha_m)| \quad \text{oder kurz} \quad |b(\alpha)|$$

anschreiben. Wenn wir die Determinante $|b(\alpha)|$ nach den Elementen der ersten Spalte entwickeln, so erhalten wir nach einer weiteren Entwicklung ein *Polynom* $|b(\alpha)|$ in α_1 von der $m + n - 1$-ten Ordnung. Wir werden beweisen, daß der Wert (3) auch die allgemeine Lösung der Gleichung $|b(\alpha)|$ ist.

Wenn die Determinante $|b(\alpha)|$ verschwindet, so gilt nach dem obigen

$$\cdot b(\alpha_1) + \cdot b(\alpha_2) + \ldots + \cdot b(\alpha_m) = 0;$$

wenn wir in diese Beziehung die Werte

$$b(\alpha_i) = b_0 \alpha_i^n + b_1 \alpha_i^{n-1} + \ldots + b_n \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

---

[2]) Kowalewski, Einf. in die Det.-theorie, S. 327.

nsetzen, so erhalten wir

$$b_0 (\cdot \alpha_1^n + \cdot \alpha_2^n + \ldots + \cdot \alpha_m^n) + b_1 (\cdot \alpha_1^{n-1} + \ldots + \cdot \alpha_m^{n-1}) + \ldots$$
$$+ b_n (\cdot \alpha_1 + \ldots + \cdot \alpha_m) = 0.$$

Der Gleichung b genügt darnach die Lösung $\cdot \alpha_1 + \ldots + \cdot \alpha_m$; weil e allgemeine Lösung der Gleichung b $b\beta_1 + \ldots + \cdot \beta_n$ lautet (wo die ntegrationskonstanten von den vorhergehenden unabhängig sind), so sind ese beiden Lösungen gleich, so daß wieder die Beziehung (3) gilt, durch elche die Lösung der Gleichung $|b(\alpha)|$ in α_1 gegeben ist. Die Ausdrücke , $|b(\alpha)|$ sind deswegen bis auf einen Faktor identisch.

Um diesen Faktor zu bestimmen, setzen wir voraus, daß bei $m-1$ lementen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ dieser Faktor den Wert $|\beta|^{m-2}$ hat, so daß die eziehung

$$|A_2 A_3 \ldots A_m| = |\beta|^{m-2} \cdot |\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n|$$

lt; wir werden beweisen, daß bei m Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Beziehung) stattfindet. Weil bei einem einzigen Element α_m die Identität $A_m = A$ it dem Faktor 1 gilt, wird dann das Theorem (1) allgemein bewiesen sein.

Zu diesem Zweck bestimmen wir bei dem Polynom A den höchsten oeffizienten oder mit anderen Worten den Koeffizienten des Wertes α_1^{m+n-1}; ir erhalten

$$(-1)^{m+n-1} \cdot |\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n|.$$

hnlich berechnen wir den höchsten Koeffizienten des Polynoms $|b(\alpha)|$ ler mit anderen Worten den Koeffizienten des Wertes $[b(\alpha_1)]^{m-1}$, wo r Exponent die Ordnung der Ableitung bedeutet; daraus erhalten wir en Koeffizienten des Wertes α_1^{m+n-1}

$-1)^{m+n-1} \cdot b_0 \cdot |b(\alpha_2), b(\alpha_3) \ldots b(\alpha_m)|$ oder $(-1)^{m+n-1} \cdot b_0 \cdot |A_2 A_3 \ldots A_m|$;

ıter der Voraussetzung (4) lautet dieser Ausdruck

$$(-1)^{m+n-1} \cdot b_0^{m-1} \cdot |\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n|.$$

Durch Vergleich der Ergebnisse (a), (b) schließen wir, daß die Deterinante A mit dem Faktor b_0^{m-1} multipliziert werden muß, damit sie der eterminante $|b(\alpha)|$ gleich sei, wodurch das Theorem (1) bewiesen ist.

Mit Hilfe der Formel (1) können wir den Ausdruck für die Resultante r Polynome a, b [3])

$$R(a,b) = a_0^n \cdot \frac{|b(\alpha_i)|}{|\alpha_i|} = (-1)^{mn} \cdot b_0^m \cdot \frac{|a(\beta_j)|}{|\beta_j|}$$

[3]) Rádl, Über das verallgemeinerte gemeinsame Maß von zwei Differentialynomen, Math. Zeitschr. 40 (1935), Formeln (4), (5).

auch in der Gestalt anschreiben

$$R(a, b) = a_0^{n-1} \cdot b_0^{m-1} \cdot A. \tag{5}$$

Für den Fall $m = 2$ lautet die Formel (1)

$$A_1 A_2' - A_1' A_2 = |\beta| \cdot |\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n|;$$

wenn wir beide Seiten mit A_1^2 dividieren, so erhalten wir die Formel

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)' = \frac{|\beta| \cdot |\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n|}{A_1^2}, \tag{6}$$

welche wir auf einen anderen bekannten Determinantensatz [4]) zurückführen können und welche wir schon früher dreimal benutzt haben [5]).

Die Formel (1) werden wir in § 8 brauchen.

§ 3.

Partikuläre Resultanten.

Die Untersuchung der Teilbarkeit des Polynomenpaares a, b bezüglich m-ter und n-ter Ordnung führt bei $n > 1$ zum Begriff der *partikulären Resultanten* R_i, welche allgemein von der (totalen) Resultante R des Polynomenpaares a, b zu unterscheiden sind und welche durch die Beziehung

$$R_i = \delta_i \cdot a(\beta_i), \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{7}$$

definiert werden sollen; die Werte δ_i seien unabhängige Lösungen der zu b adjungierten Gleichung b'. Für $n = 1$ existiert eine einzige partikuläre Resultante, welche mit der (totalen) Resultante R der Polynome a, b identisch ist.

Auf Grund der schon früher benutzten Beziehung [6]) können wir schreiben

$$R_i = \delta_i \cdot r(\beta_i), \tag{8}$$

wo r den Rest der rechtsseitigen Division des Polynoms a durch das Polynom b [7]) bedeutet; dieser Rest r ist ein Polynom von der allgemein $n - 1$-ten Ordnung.

Wenn die Resultante R verschwindet, so ist offenbar wenigstens einer von den Werten R_i gleich Null und umgekehrt. Falls alle n partikulären Resultanten R_i gleich Null sind, verschwinden auch alle Koeffizienten des Restes r und das Polynom a ist durch das Polynom b rechtsseitig 0-indiziert teilbar.

---

[4]) Fricke, Algebra I., S. 68, Formel (7).

[5]) Rádl, Über die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome. Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 455, Abh. sub [1]), S. 434, 445.

[6]) Abh. sub [5]), Formel (10).

[7]) Abh. sub [5]), Formel (4).

Wir können uns leicht überzeugen, daß die partikulären Resultanten R_i gerade so wie die (totale) Resultante R von zwei äquivalenten Polynomenpaaren [8]) identisch sind.

Wir werden folgenden Satz beweisen [9]):

Wenn wir das Polynomenpaar a, b wechselseitig auf $a^{(1)}, b^{(1)}$ transformieren und dann das Polynomenpaar $a^{(1)}, b^{(1)}$ in sein adjungiertes Polynomenpaar $a'^{(-1)}, b'^{(-1)}$ überführen, so sind die partikulären Resultanten des Polynomenpaares a, b identisch mit den entsprechenden partikulären Resultanten des Polynomenpaares $a'^{(-1)}, b'^{(-1)}$.

Um diesen Satz, welcher der Invarianteneigenschaft der Resultante R des Polynomenpaars a, b entspricht [10]), zu beweisen, benutzen wir die Beziehung

$$\beta_i^{(1)} = a(\beta_i),$$

welche den Übergang vom Polynom a zum Polynom $a^{(1)}$ definiert [11]); wir können auch schreiben

$$\beta_i^{(1)} = a(\beta_i) = r(\beta_i) = \frac{1}{\delta_i} \cdot R_i.$$

Weil der Übergang vom Polynom $a'^{(-1)}$ zum Polynom a' ähnlich ist, so gilt die Beziehung, welche der vorhergehenden entspricht,

$$\delta_i = a'^{(-1)}(\delta_i^{(-1)}) = r'^{(-1)}(\delta_i^{(-1)}) = \frac{1}{\beta_i^{(1)}} \cdot R_i'^{(-1)}.$$

Die Bezeichnungen $\beta_i^{(1)}, \delta_i^{(-1)}, r'^{(-1)}, R_i'^{(-1)}$ entsprechen bezüglich den Werten β_i, δ_i, r, R; die oberen Indizes deuten ihre Zugehörigkeit zu den Polynomen bezüglich $b^{(1)}, b'^{(-1)}, a'^{(-1)}, a'^{(-1)}$.

Wenn wir beide Beziehungen miteinander kreuzweise multiplizieren (die $\begin{matrix}\text{rechte}\\ \text{linke}\end{matrix}$ Seite der ersten Beziehung mit der $\begin{matrix}\text{linken}\\ \text{rechten}\end{matrix}$ Seite der zweiten Beziehung), so bekommen wir das Ergebnis

$$R_i = R_i'^{(-1)},$$

welches den vorgelegten Satz ausdrückt.

Wir werden noch beweisen, daß die Summe der partikulären Resultanten R_i dem höchsten Koeffizienten r_0 des Restes r gleich ist.

---

[8]) Abh. sub [1]), Formel (1) und (4).
[9]) Abh. sub [1]), Schema (3).
[10]) Abh. sub [5]), § 6.
[11]) Abh. sub [6]), § 3.

Nach der Formel (8) können wir schreiben

$$\sum_1^n R_i = \sum \delta_i r(\beta_i) = \sum \delta_i (r_0 \beta_i^{n-1} + r_1 \beta_i^{n-2} + \ldots + r_{n-1} \beta_i)$$
$$= r_0 \sum \beta_i^{n-1} \delta_i + r_1 \sum \beta_i^{n-2} \delta_i + \ldots + r_{n-1} \sum \beta_i \delta_i;$$

auf Grund der bekannten Formeln [12]) verschwinden alle Summen der rechten Seite bis auf die erste, welche den Wert 1 hat. Infolgedessen gilt

$$\sum_1^n R_i = r_0. \tag{10}$$

§ 4.

Bedingung der linksseitigen Teilbarkeit für das Polynomenpaar bezüglich dritter und zweiter Ordnung.

Die rechtsseitige und linksseitige Division des Polynoms a dritter Ordnung durch das Polynom b zweiter Ordnung

(11) $a = a(y) = y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y, \quad b = b(y) = y'' + b_1 y' + b_2 y$

drücken zwei Systeme [13])

(12) $a(y) = y^{(1)\prime} + p_1 y^{(1)} + r_0 y' + r_1 y, \quad y^{(1)} = y'' + b_1 y' + b_2 y$
oder $a(y) = p[b(y)] + r(y)$

(13) $a(y) = Y'' + b_1 Y' + b_2 Y + s_0 y' + s_1 y, \quad Y = y' + q_1 y$
oder $a(y) = b[q(y)] + s(y)$

aus, auf Grund deren die beiderseitige Folge der Polynomenpaare [14])

(14) $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)} \to \ldots \to a^{(-1)}, b^{(-1)} \to a, b \to a^{(1)}, b^{(1)} \to \ldots \to a^{(\mu)}, b^{(\mu)}$

definiert werden kann.

Wie in der letzten Arbeit [15]) setzen wir voraus, daß das Polynomenpaar (1) normal ist, so daß die Koeffizienten a_1, b_1 gleich sind. Dann verschwinden in den Systemen (12), (13) die Koeffizienten p_1, q_1, weil sie gleich sind und den Wert $a_1 - b_1$ haben. Alle Polynomenpaare der Folge (14) sind dann normal [15]).

Wir setzen voraus, daß in der Folge (14) beim Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ wenn es in der Gestalt des Systems (13) geschrieben wird, die Koeffizienten $s_0^{(-\nu)}, s_1^{(-\nu)}$ des linksseitigen Restes verschwinden

$$s_0^{(-\nu)} = 0, \quad s_1^{(-\nu)} = 0; \tag{15}$$

---

[12]) Darboux, Surfaces, Bd. II, S. 116 (2. Aufl.).
[13]) Abh. sub [5]), Formel (4), (5).
[14]) Abh. sub [1]), Schema (3).
[15]) Abh. sub [1]), § 2.

dann bricht die Folge (14) links mit dem Index ν ab, das Polynom a ist durch das Polynom b linksseitig ν-indiziert teilbar [16]). Wir haben die Koeffizienten der Polynome a, b in (14) und die Lösung der Gleichung a zu bestimmen.

Das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ kann unter der Voraussetzung (15) in der Gestalt

$$a^{(-\nu)} = Y'' + b_2^{(-\nu)} Y' + b_2^{(-\nu)} Y, \quad Y = y'; \quad y'' + b_1^{(-\nu)} \cdot y' + b_2^{(-\nu)} \cdot y = b^{(-\nu)}$$

geschrieben werden; das Polynom $a^{(-\nu)}$ ist durch das Polynom $b^{(-\nu)}$ linksseitig 0-indiziert teilbar. Wenn wir die unabhängigen Lösungen β_1, β_2 der Gleichung $b^{(-\nu)}$ einführen, so haben die Polynome $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ die Gestalt

$$a^{(-\nu)} = \frac{1}{|\beta_1 \beta_2|} \cdot |\beta_1 \beta_2 y'|, \quad b^{(-\nu)} = \frac{1}{|\beta_1 \beta_2|} \cdot |\beta_1 \beta_2 y|; \tag{16}$$

wir schreiben in der Wronskischen Determinante hier wie im folgenden nur die erste Zeile.

Umgekehrt hat jedes normale Polynomenpaar bezüglich dritter und zweiter Ordnung, bei welchem das erste Polynom durch das zweite linksseitig 0-indiziert teilbar ist, die Gestalt (16).

Die allgemeine Lösung der Gleichung $a^{(-\nu)}$ lautet dann, wenn C_1, C_2, C_3 Integrationskonstanten sind,

$$\bar{y} = C_1 \cdot \int \beta_1 \, dx + C_2 \cdot \int \beta_2 \, dx + C_3. \tag{17}$$

Wenn wir die Bezeichnungen

$$\begin{cases} A_\nu = |\beta_1 \beta_2 \beta_1' \beta_2' \ldots \beta_1^\nu \beta_2^\nu|, \quad A_{-1} = 1; \\ A_{\nu 1} = |\beta_1 \beta_2 \beta_1' \beta_2' \ldots \beta_1^{\nu-1} \beta_2^{\nu-1} \beta_1^\nu|, \\ A_{\nu 2} = |\beta_1 \beta_2 \beta_1' \beta_2' \ldots \beta_1^{\nu-1} \beta_2^{\nu-1} \beta_2^\nu|, \quad A_{-1,1} = A_{-1,2} = 1; \\ B_{\nu 1} = |\beta_1 \beta_2 \beta_1' \beta_2' \ldots \beta_1^{\nu-1} \beta_2^{\nu-1} \beta_1^{\nu+1} \beta_2^\nu|, \\ B_{\nu 2} = |\beta_1 \beta_2 \beta_1' \beta_2' \ldots \beta_1^{\nu-1} \beta_2^{\nu-1} \beta_1^\nu \beta_2^{\nu+1}|, \quad B_{-1,1} = B_{-1,2} = 1 \end{cases} \tag{18}$$

einführen, so können wir das Theorem aussprechen:

Wenn die Polynome a, b von der dritten bzw. zweiter Ordnung die Gestalt haben

$$\begin{cases} a = a(y) = y^{(1)'} + \frac{d^2}{dx^2} \log A_\nu \, y' \\ \qquad + \left[\frac{d^2}{dx^2} \log A_\nu \frac{d}{dx} \log \frac{A_{\nu-1}}{A_{\nu 2}} + \frac{A_{\nu-1} A_\nu}{A_{\nu 1} A_{\nu 2}} \cdot \left(\frac{B_{\nu 2}}{A_\nu} \right)' \right] y, \\ \qquad y^{(1)} = b(y), \\ b = b(y) = \frac{1}{|A_{\nu 1}, A_{\nu 2}| A_{\nu-1}} \cdot |A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, (A_{\nu -} \; y)|, \end{cases} \tag{19}$$

[16]) Abh. sub [5]), § 9.

so ist das Polynom a durch das Polynom b linksseitig v-indiziert teilbar. Die allgemeine Lösung der Gleichung a kann mit Hilfe der Lösung der Gleichung $a^{(-r}$ durch die Formel ausgedrückt werden

$$y = \frac{1}{A_{\nu-1}} \cdot |\overline{y}\, \beta_1 \beta_2 \beta_1' \beta_2' \ldots \beta_1^{\nu-1} \beta_2^{\nu-1}|. \tag{20}$$

Aus den Formeln (19) können wir die zweithöchsten Koeffizienten a_1, b_1 des Polynomenpaares a, b berechnen; wir erhalten

$$a_1 = b_1 = -\frac{d}{dx} \log \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}, \tag{21}$$

so daß das Polynomenpaar a, b normal ist.

Umgekehrt, wenn das Polynom a dritter Ordnung durch das Polynom b zweiter Ordnung linksseitig ν-indiziert teilbar ist, so ist das Polynomenpaar a, b, wenn es auf normale Gestalt zurückgeführt wird, durch die Ausdrücke (19) gegeben.

Zum Beweis des Theorems zerlegen wir das Polynom $b\,(y)$ in zwei nichtkommutative Faktoren

$$b\,(y) = y'' + b_1\, y' + b_2\, y = y_1' + \overline{b_2}\, y_2, \quad y_1 = y' + \overline{b_1} y; \tag{22}$$

wir drücken das Polynom $a\,(y)$ durch das System aus, welches rechtsseitige Division des Polynoms a durch den Divisor $y' + \overline{b_1} \cdot y$ definiert [17])

$$a\,(y) = y_1'' + \cdot\, y_1' + \cdot\, y_1 + (r)\, y, \quad y_1 = y' + \overline{b}_1\, y, \tag{23}$$

wo die Punkte hier wie im folgenden gewisse Koeffizienten bedeuten. Den Quotienten dividieren wir von neuem rechtsseitig durch den Divisor $y_1' + \overline{b_2} y$, wie es das System

$$a\,(y) = y^{(1)\prime} + (r^2)\, y_1 + (r)\, y, \quad y^{(1)} = y_1' + \overline{b_2}\, y, \quad y_1 = y' + \overline{b_1}\, y$$

ausdrückt; durch Elimination des Wertes y_1 erhalten wir das System

$$a\,(y) = y^{(1)\prime} + (r^2) \cdot y' + [\overline{b_1} \cdot (r^2) + (r)] \cdot y, \quad y^{(1)} = y'' + b_1\, y' + b_2\, y \tag{24}$$

welches mit (12) für $a_1 = b_1$ identisch ist. Wir sehen ein, daß der Koeffizient r_0 dem Rest (r^2) gleich ist.

Wenn wir ähnlich das Polynom a zweimal hintereinander linksseitig dividieren, wobei die Divisoren $y_1' + \overline{b_1}\, y_1$, $y' + \overline{b_2}\, y$ sind, so drückt die erste Division das System

$$y_1' + \overline{b_2}\, y_1 + (s)\, y, \quad y_1 = y'' + \cdot\, y' + \cdot\, y$$

aus [18]) und die zweite Division wird durch das System

$$y_1' + \overline{b_2}\, y_1 + (s)\, y, \quad y_1 = Y' + \overline{b_1}\, Y + (s^2)\, y, \quad y^{(1)} = y'$$

---

[17]) Abh. sub [1]), Formel (11).

[18]) Abh. sub [1]), Formel (12).

definiert. Durch Elimination des Wertes y_1 erhalten wir das System

$$(25) \qquad Y'' + b_1 Y' + b_2 Y + (s^2) y' + [(s^2)' + \overline{b}_2 (s^2) + (s)] y, \; y^{(1)} = y',$$

welches sich von (13) nicht unterscheidet; der Koeffizient s_0 ist gleich dem Rest (s^2). Wir sehen ein, daß die Bedingung (15) mit der Bedingung

$$(26) \qquad (s^2)^{(-\nu)} = 0, \quad (s)^{(-\nu)} = 0,$$

in welcher die Reste $(s^2)^{(-\nu)}$, $(s)^{(-\nu)}$ zum Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ gehören, identisch ist.

Wenn wir unter der Voraussetzung (26) die zum Polynomenpaare a, b gehörenden Werte (r^2), (r), $\overline{b_1}$ berechnen, in das System (24) einsetzen und die Gestalt (19) bekommen, so wird die erste von den Formeln (19) bewiesen sein.

§ 5.

Vorausgesetzte Formeln für die partikulären Resultanten.

Die Beziehung (13) (ihre zweite verkürzte Gestalt) lautet für das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$

$$a^{(-\nu)}(y) - s^{(-\nu)}(y) = b^{(-\nu)}(Y), \quad Y = y'.$$

Wir setzen für y den Wert β_2 ein und multiplizieren beide Seiten mit δ_2; weil die Werte $a(\beta_2)$, $r(\beta_2)$ nach der Beziehung (12) gleich sind [19]), so können wir schreiben

$$(27) \qquad \delta_2 \cdot r^{(-\nu)}(\beta_2) - \delta_2 \cdot s^{(-\nu)}(\beta_2) = R_2^{(-\nu)} - S_2^{(-\nu)} = \delta_2 \cdot b^{(-\nu)}(\beta_2');$$

die Bezeichnung R_2 für die partikuläre Resultante wurde im § 3 definiert und ähnlich führen wir auch die Bezeichnung S_2 ein.

Wenn wir die Lösung δ_2 der adjungierten Gleichung $b'^{(-\nu)}$ durch die Lösungen β_1, β_2 der Gleichung $b^{(-\nu)}$ ausdrücken und für $b^{(-\nu)}$ den Wert (16) einsetzen, so hat die rechte Seite die Gestalt

$$\frac{\beta_1}{|\beta_1 \beta_2|^2} \cdot |\beta_1 \beta_2 \beta_2'|.$$

Unter der Voraussetzung (15) verschwindet der Wert $S_2^{(-\nu)}$ und wir erhalten den gesuchten Ausdruck für die partikuläre Resultante $R_2^{(-\nu)}$; nach der Formel (6) kann dieser Ausdruck in der Gestalt einer Ableitung geschrieben werden.

Wenn wir für die partikuläre Resultante $R_1^{(-\nu)}$ durch ein ähnliches Verfahren die Formel entwickeln, so erhalten wir für das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$

$$R_1^{(-\nu)} = -\frac{A_{11} A_{02}}{A_0^2} = \left(\frac{B_{01}}{A_0}\right)', \; R_2^{(-\nu)} = \frac{A_{12} A_{01}}{A_0^2} = \left(\frac{B_{02}}{A_0}\right)'.$$

---

[19]) Abh. sub [5]), Formel (10).

Wir behaupten, daß für das Polynomenpaar a, b in der Folge (14) die Formeln gelten

$$(28) \qquad R_1 = -\frac{A_{\nu+1,1}\,A_{\nu 2}}{A_\nu^2} = \left(\frac{B_{\nu 1}}{A_\nu}\right)', \quad R_2 = \frac{A_{\nu+1,2}\,A_{\nu 1}}{A_\nu^2} = \left(\frac{B_{\nu 2}}{A_\nu}\right)'.$$

Für $\nu = 0$ erhalten wir die obigen Formeln für das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$. Wenn wir beweisen werden, daß wir aus der Richtigkeit der Formeln (28) für den Index ν auch auf ihre Gültigkeit für den Index $\nu + 1$ schließen können, so werden die Formeln (28) allgemein bewiesen sein.

Die Summe beider Ausdrücke (28) gibt

$$(29) \qquad R_1 + R_2 = \left(\frac{B_{\nu 1} + B_{\nu 2}}{A_\nu}\right)' = \left(\frac{A_\nu'}{A_\nu}\right)' = \frac{d^2}{d\,x^2}\log A_\nu = r_0 = (r^2),$$

weil nach den Formeln (10), (24) diese Summe dem Koeffizienten r_0 oder dem Rest (r^2) gleich ist.

Zu demselben Ergebnis gelangen wir, wenn wir aus den Beziehungen (12), (13) die Differenz $r_0 - s_0$ berechnen; wir erhalten den Wert $-a_1'$, so daß nach der Formel (21) sich ergibt:

$$r_0 - s_0 = r_0 - r_0^{(-1)} = \frac{d^2}{d\,x^2}\log\frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}.$$

Wir kennen den Wert für $r_0^{(-\nu)}$ durch direkte Berechnung; wenn wir den Wert für $r_0^{(-1)}$ nach der Formel (29) voraussetzen, so bekommen wir die Formel für r_0, welche dann allgemein gilt.

§ 6.

Das Polynom $b^{(1)}$, die Resultante R.

Wenn wir die Richtigkeit der Formeln (28) bis zum Index ν voraussetzen, so können wir beweisen, daß das Polynom $b^{(1)}$ in (14) nach dem Gesetz (19) gebildet wird, wodurch die zweite von den Formeln (19) bewiesen werden wird.

Die Gleichung b in (19) hat die unabhängigen Lösungen

$$\beta_1^{(\nu)} = \frac{A_{\nu 1}}{A_{\nu-1}}, \quad \beta_2^{(\nu)} = \frac{A_{\nu 2}}{A_{\nu-1}};$$

wir überzeugen uns leicht, daß sie der Gleichung b genügen. Die Lösung $\beta_1^{(\nu+1)}$ der Gleichung $b^{(1)}$ lautet, wenn wir die Definition der wechselseitigen Transformation [20]) beachten,

$$\beta_1^{(\nu+1)} = a(\beta_1^{(\nu)}) = R_1 \cdot \frac{1}{\delta_1^{(\nu)}} = -\frac{A_{\nu+1,1}\,A_{\nu,2}}{A_\nu^2} \cdot \left(-\frac{A_\nu}{A_{\nu 2}}\right) = \frac{A_{\nu+1,1}}{A_\nu}.$$

[20]) Abh. sub [5]), § 3.

Wir haben dabei für die partikuläre Resultante R_1 den vorausgesetzten Wert (28) und für die Lösung $\delta_1^{(\nu)}$ der adjungierten Gleichung b' den Wert [12])

$$\delta_1^{(\nu)} = -\frac{\beta_2^{(\nu)}}{|\beta_1^{(\nu)}\,\beta_2^{(\nu)}|} = -\frac{A_{\nu 2}}{A_\nu}$$

eingesetzt. Zur Berechnung dieser Formel haben wir die Beziehung

(30) $$|A_{\nu 1}\,A_{\nu 2}| = A_\nu\,A_{\nu-1}$$

benutzt, welche mit Rücksicht auf (6) richtig ist.

Wir haben dadurch bewiesen, daß die Formel für $\beta_1^{(\nu+1)}$ demselben Gesetz wie die Formel für $\beta_1^{(\nu)}$ unterliegt. Weil ein ähnlicher Schluß auch für die Lösung $\beta_2^{(\nu+1)}$ gilt, so wird das Polynom $b^{(1)}$ nach der zweiten Formel (19) gebildet, in welcher der Index ν durch $\nu+1$ ersetzt wird.

Unter der Voraussetzung der Formeln (28) können wir auch die Resultante R des Polynomenpaars a, b in (14) berechnen. Nach einer bekannten Formel [21]) können wir schreiben

$$R = \frac{|a(\beta_1^{(\nu)}), a(\beta_2^{(\nu)})|}{|\beta_1^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}|} = \frac{|\beta_1^{(\nu+1)}, \beta_2^{(\nu+1)}|}{|\beta_1^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}|};$$

wenn wir die oben berechneten Werte einsetzen, so bekommen wir

(31) $$R = \frac{A_{\nu+1}\,A_{\nu-1}}{A_\nu^2};$$

diese Gestalt stimmt mit den früheren Ergebnissen [22]) überein.

§ 7.

Beweis der Formeln für die partikulären Resultanten.

Wir haben die Richtigkeit der Formeln (28) für den Index ν vorausgesetzt; sie sind richtig nach § 5 für den Wert $\nu = 0$. Wir werden jetzt ihre Gültigkeit für den Index $\nu+1$ beweisen, so daß sie dann allgemein gelten werden.

Für das Polynomenpaar $a^{(1)}, b^{(1)}$ lautet die Beziehung (27)

(c) $$R_2^{(1)} - S_2^{(1)} = \delta_2^{(\nu+1)} \cdot b^{(1)} \cdot (\beta_2^{(\nu+1)\prime});$$

wenn wir die Ergebnisse des § 6 berücksichtigen, so lautet die rechte Seite

$$\frac{A_{\nu+1,1}\left|A_{\nu+1,1}, A_{\nu+1,2}, A_\nu \cdot \left(\frac{A_{\nu+1,2}}{A_\nu}\right)'\right|}{|A_{\nu+1,1}, A_{\nu+1,2}|^2}$$

[21]) Abh. sub [3]), Formel (5).

[22]) Abh. sub [1]), Formel (9), (27).

oder mit Rücksicht auf die Formel (6)

$$\left(\frac{\left|A_{\nu+1,1}, A_\nu \cdot \left(\frac{A_{\nu+1,2}}{A_\nu}\right)'\right|}{|A_{\nu+1,1}, A_{\nu+1,2}|}\right)'.$$

Wenn R_2' die partikuläre Resultante des adjungierten Polynomenpaars a', b' ist, so gilt

$$S_2 - R_2' = \delta_2^{(\nu)} \cdot (s_0 \beta_2^{(\nu)\prime} + s_1 \beta_2^{(\nu)}) - \beta_2^{(\nu)} \cdot [-(s_0 \delta_2^{(\nu)})' + s_1 \delta_2^{(\nu)}] = (s_0 \beta_2^{(\nu)} \delta_2^{(\nu)})';$$

für das Polynomenpaar $a^{(1)}, b^{(1)}$ können wir deswegen schreiben

$$\text{(d)} \qquad S_2^{(1)} - R_2'^{(-1)} = (s_0^{(1)} \beta_2^{(\nu+1)} \delta_2^{(\nu+1)})' = (r_0 \beta_2^{(\nu+1)} \delta_2^{(\nu+1)})'$$
$$= \left(\frac{A_{\nu+1,1} A_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1} A_\nu} \cdot \frac{d^2}{d x^2} \log A_\nu\right)',$$

wobei wir eine bekannte Beziehung [23]) und die Ergebnisse des § 6 benutzt haben.

Wenn wir die Beziehungen (c), (d) addieren, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Formel (9)

$$\text{(32)} \quad R_2^{(1)} - R_2^{(0)} = \left(\frac{\left|A_{\nu+1,1}, A_\nu \left(\frac{A_{\nu+1,2}}{A_\nu}\right)'\right|}{|A_{\nu+1,1}, A_{\nu+1,2}|} + \frac{A_{\nu+1,1} \cdot A_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1} A_\nu} \cdot \frac{d^2}{d x^2} \log A_\nu\right)';$$

wir haben auf diese Art die gesuchte partikuläre Resultante $R_2^{(1)}$ durch die als bekannt vorausgesetzte partikuläre Resultante $R_2^{(0)}$ ausgedrückt.

Wir setzen jetzt in diese Beziehung für $R_2^{(0)}$ den für den Index ν vorausgesetzten Wert (28) und für $R_2^{(1)}$ den zu erwartenden Wert ein, welcher nach dem Gesetz (28) für den Index $\nu + 1$ gebildet wird. Wenn wir beide Seiten integrieren, so ergibt sich, wenn wir dem ersten Gliede auf der rechten Seite eine andere Gestalt geben,

$$\text{(e)} \quad \frac{B_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1}} - \frac{B_{\nu 2}}{A_\nu} = \frac{A_{\nu+1,1}^2}{|A_{\nu+1,1} A_{\nu+1,2}|} \cdot M' + \frac{A_{\nu+1,1} A_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1} A_\nu} \frac{d^2}{d x^2} \log A_\nu,$$

wo

$$\text{(f)} \qquad M = \frac{A_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1,1}} - \frac{A_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1,1}} \frac{d}{d x} \log A_\nu = \frac{\beta_2^{(\nu+1)}}{\beta_1^{(\nu+1)}}.$$

Wir haben jetzt die Richtigkeit der Beziehung (e) zu beweisen; diesen Beweis werden wir so durchführen, daß wir aus der Beziehung (e) den Wert M

---

[23]) Abh. sub [5]), Formel (12).

berechnen und die Übereinstimmung mit (f) bekommen. Wir erhalten aus der Beziehung (e) mit Rücksicht auf (29)

$$M = \int \frac{A_\nu B_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1,1}^2}\, dx + \int \frac{A_{\nu+1} B_{\nu 1}}{A_{\nu+1,1}^2}\, dx - \int \left[\frac{A_{\nu+1} A_\nu}{A_{\nu+1,1}^2} \cdot \frac{B_{\nu 1} + B_{\nu 2}}{A_\nu} + \frac{A_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1,1}} \cdot \left(\frac{B_{\nu 1} + B_{\nu 2}}{A_\nu}\right)'\right] dx.$$

Wenn wir auf die ersten zwei Integrale die Beziehung (6) anwenden, so können wir die Integration durchführen; die Summe beider Ergebnisse gibt das erste Glied des Ausdruckes (f). Das dritte Integral soll mit dem zweiten Gliede des Ausdruckes für M in (f) übereinstimmen; wenn wir die Ableitung dieses zweiten Gliedes in (f) entwickeln und die Werte

$$\left(\frac{A_{\nu+1,2}}{A_{\nu+1,1}}\right)' = \frac{A_{\nu+1} A_\nu}{A_{\nu+1,1}^2}, \quad \frac{d}{dx} \log A_\nu = \frac{A_\nu'}{A_\nu} = \frac{B_{\nu 1} + B_{\nu 2}}{A_\nu}$$

einsetzen, so sehen wir seine Übereinstimmung mit dem dritten Integral ein.

Den Ausdruck für R_1 könnten wir ähnlich beweisen; wir können auch nach der Formel (29) auf diesen Ausdruck schließen.

§ 8.

Beweis der Formel (19) für das Polynom a und der Formel (20).

Für die Formel (24) brauchen wir die Werte für (r^2), $\bar{b}_1$, (r); den Wert (r^2) gibt die Formel (29) an.

Für die Werte $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ gilt bekanntlich

$$\bar{b}_1 = -\frac{d}{dx} \log \beta_2^{(\nu)}, \quad \bar{b}_2 = \frac{d}{dx} \log \frac{\beta_2^{(\nu)}}{\left|\beta_1^{(\nu)} \beta_2^{(\nu)}\right|},$$

wo wir die Werte $\beta_1^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}$ auch umtauschen können; wir überzeugen uns davon, wenn wir diese Werte in die Formel (22) einsetzen und den Wert y_1 eliminieren; wir bekommen für das Polynom b den zweiten Ausdruck (16) bis auf den Index ν, mit welchem die Werte β_1, β_2 versehen sind. Mit Rücksicht auf § 6 haben wir

$$\bar{b}_1 = \frac{d}{dx} \log \frac{A_{\nu+1}}{A_{\nu 2}}.$$

Aus der Beziehung (23) schließen wir[24]) mit Rücksicht auf (28) und auf § 6

$$(r) = \frac{a(\beta_2^{(\nu)})}{\beta_2^{(\nu)}} = \frac{R_2}{\delta_2^{(\nu)} \beta_2^{(\nu)}} = \left(\frac{B_{\nu 2}}{A_\nu}\right)' \cdot \frac{A_\nu A_{\nu-1}}{A_{\nu 1} A_{\nu 2}}.$$

[24]) Abh. sub [1]), die erste Formel (15).

Wenn wir die Ausdrücke für $(r^2), \bar{b}_1, (r)$ in die Formel (24) einsetzen so bekommen wir Übereinstimmung mit der Formel (19) für $a(y)$. Wei wir schon im § 6 die Formel (19) für $b(y)$ bewiesen haben, ist der Beweis der ganzen Formel (19) beendet.

Wir haben noch die Formel (20) zu beweisen. Die Lösung y der Gleichung a hängt mit der Lösung $y^{(1)}$ der Gleichung $a^{(1)}$ durch die Beziehung [25])

$$y^{(1)} = b(y) = \frac{1}{|A_{r1}\, A_{r2}| \cdot A_{r-1}} \cdot |A_{r1}, A_{r2}, A_{r-1}\, y|$$

zusammen, wie die Formel (19) für $b(y)$ andeutet. Wenn wir für y den Wert (20) und für $y^{(1)}$ den Wert (20), wobei der Index ν auf $\nu + 1$ erhöht wird, einsetzen, so erhalten wir mit Benutzung der Formeln (30), (18) und nach der Beseitigung der Nenner

$$A^2_{r-1} \cdot |\beta_1 \beta_2 \beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta_1^{(r)} \beta_2^{(r)} \bar{y}|$$
$$= \left| |\beta_1 \beta_2 \beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta_1^{(r-1)} \beta_2^{(r-1)} \beta_1^{(r)}|, |\beta_1 \beta_2 \beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta_1^{(r-1)} \beta_2^{(r-1)} \beta_2^{(r)}|, |\beta_1 \beta_2 \beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta_1^{(r-1)} \beta_2^{(r-1)} \bar{y}| \right|$$

Wenn wir die Elemente $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_1^{(r-1)}, \beta_2^{(r-1)}$ bezüglich mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_2$ und die Elemente $\beta_1^{(r)}, \beta_2^{(r)}, \bar{y}$ bezüglich mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bezeichnen, so stimmt diese Beziehung mit dem Theorem (2) für $n = 3$ überein; in Betreff des Vorzeichens gilt dieselbe Anmerkung wie früher [26]). Die Formel (20) gilt deswegen auch für den Index $\nu + 1$, wenn sie für ν richtig ist; weil sie für $\nu = 1$ offenbar gilt, ist sie allgemein bewiesen.

§ 9.

Schlußbemerkungen. Ein Beispiel.

Über die rechtsseitige Teilbarkeit gilt dieselbe Schlußweise wie im Falle $m = 2$, $n = 1$ und $m = 3$, $n = 1$ [27]).

Wenn wir in der Polynomenfolge (14) von den Polynomen $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu}$ bis zum Polynomenpaar $a^{(\mu)}, b^{(\mu)}$ fortschreiten und außer der Voraussetzung (15) auch die Bedingungen

$$R_1^{(\mu)} = 0, \quad R_2^{(\mu)} = 0 \tag{33}$$

gelten lassen, so verschwinden die Koeffizienten $r_0^{(\mu)}, r_1^{(\mu)}$ im System (12), wenn es das Polynom $a^{(\mu)}$ ausdrückt, so daß das Polynom a linksseitig ν-indiziert und zugleich rechtsseitig μ-indiziert durch das Polynom b teilbar ist.

Infolge der Bedingungen (33) schließen wir aus den Formeln (28), daß die Determinanten $A_{\mu+\nu+1,1}, A_{\mu+\nu+1,2}$ verschwinden, aber die Determinanten von niedrigerem Index von Null verschieden sind. Daraus folgt

---

[25]) Abh. sub [5]), § 3.
[26]) Abh. sub [1]), S. 6.
[27]) Abh. sub [1]), § 4, 9.

wie in (3), daß die Elemente der ersten Zeile beider verschwindenden Determinanten linear abhängig sind. Wir erhalten auf diese Art ein System von zwei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und zwei Unbekannten β_1, β_2, welche erfüllt werden müssen, wenn die Bedingungen (33) gelten sollen.

Um die ganze Untersuchung durch ein Beispiel zu erläutern, setzen wir

$$\beta_1 = e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \beta_2 = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

dann geben die Formeln (18)

$$A_0 = -2x, \quad A_1 = 4 \cdot (4x^4 + 3);$$

$$A_{01} = \beta_1, \; A_{02} = \beta_2; \; A_{11} = -2 \cdot (2x^2 - 1) \cdot \beta_1, \; A_{12} = -2 \cdot (2x^2 + 1) \cdot \beta_2,$$

$$B_{01} = -2x^2 - 1, \quad B_{02} = 2x^2 - 1; \quad B_{11} = 8x \cdot (4x^4 + 4x^2 + 3),$$

$$B_{12} = -8x \cdot (4x^4 - 4x^2 + 3);$$

wir können kontrollieren, daß nach der Formel (29)

$$B_{01} + B_{02} = A_0', \quad B_{11} + B_{12} = A_1'.$$

Wenn wir jetzt in die Formeln (19) für $\nu = 0$ einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{d^2}{dx^2} \log A_0 = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx} \log \frac{A_{-1}}{A_{02}} = x, \quad \frac{A_{-1} A_0}{A_{01} A_{02}} = -2x,$$

$$\left(\frac{B_{02}}{A_0}\right)' = -\frac{2x^2 + 1}{2x^2},$$

so daß

(g) $$a^{(-1)} = y^{(1)\prime} - \frac{1}{x^2} y' + 2xy, \quad y^{(1)} = b^{(-1)}(y) = y'' - \frac{1}{x} \cdot y' - x^2 y$$

und durch Elimination von $y^{(1)}$ in Übereinstimmung mit (16)

$$a^{(-1)} = y''' - \frac{1}{x} \cdot y'' - x^2 \cdot y'.$$

Wir setzen jetzt in die Formeln (19) für $\nu = 1$; wir erhalten

$$\frac{d^2}{dx^2} \log A_1 = -\frac{16 \cdot (4x^6 - 9x^2)}{(4x^4 + 3)^2}, \quad \frac{d}{dx} \log \frac{A_0}{A_{12}} = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x(2x^2 + 1)},$$

$$\frac{A_0 A_1}{A_{11} A_{12}} = -\frac{x(4x^4 + 3)}{4x^4 - 1}, \quad \left(\frac{B_{12}}{A_1}\right)' = -2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \log A_1.$$

Um das Polynom $b(y)$ zu bestimmen, berechnen wir bequemer nach den Ergebnissen des § 6 die Lösungen der Gleichung b

$$\beta_1^{(1)} = \frac{A_{11}}{A_0} = -\frac{2x^2 - 1}{x}, \quad \beta_2^{(1)} = \frac{A_{12}}{A_0} = -\frac{2x^2 + 1}{x},$$

so daß dann

$$b(y) = \frac{1}{|\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}|} \cdot |\beta_1^{(1)}\beta_2^{(1)}\, y| = y'' - \frac{12x^4 - 3}{x(4x^4+3)} \cdot y' - \frac{4x^8 - x^4 + 3}{x^2 \cdot (4x^4+3)} \cdot y.$$

Nach den Formeln (19) erhalten wir für $a(y)$

$$a(y) = y^{(1)\prime} - \frac{16 \cdot (4x^6 - 9x^2)}{(4x^4+3)^2} \cdot y' + \left[\frac{8x^8 + 30x^4 + 6}{(4x^4+3) \cdot x^3} + \left(\frac{4x^8 - x^4 + 3}{(4x^4+3)x^2}\right)'\right] \cdot y, \quad y^{(1)} = b(y);$$

durch Elimination von $y^{(1)}$ bekommen wir

$$a(y) = y''' - \frac{12x^4 - 3}{(4x^4+3)x} \cdot y'' - \frac{4x^8 + 3x^4 + 6}{(4x^4+3)x^2} \cdot y' + \frac{8x^8 + 30x^4 + 6}{(4x^4+3)x^3} \cdot y;$$

wenn wir aus dem System (g) den Wert y eliminieren, so erhalten wir für das Polynom $a(y)$ dieselbe Gestalt.

Die Gleichung $a^{(-1)}$ hat die partikuläre Lösung $y = 1$; dieser Lösung entspricht die partikuläre Lösung der Gleichung a

$$y = b^{(-1)}(1) \quad \text{oder} \quad y = x^2;$$

die weitere Gleichung $a^{(1)}$ in der Folge (14) hat die entsprechende partikuläre Lösung

$$b(x^2) = -\frac{4x^8 + 15x^4 - 9}{4x^4 + 3},$$

welche wir auch nach der Formel (20) bekommen, so daß

$$\frac{1}{A_1} \cdot |1\,\beta_1\beta_2\beta_1'\beta_2'| = \frac{1}{4 \cdot (4x^4+3)} \cdot |\beta_1'\beta_2'\beta_1''\beta_2''| = -\frac{4x^8 + 15x^4 - 9}{4x^4 + 3}.$$

(Eingegangen am 29. Juni 1939.)

Ungleichungen zwischen den Hauptlimites der von Herrn Karamata untersuchten iterierten Mittelbildungen bei drei aufeinanderfolgenden Ordnungen.

Von

V. Garten, Oberndorf a. N.

Einleitung.

Zur Kennzeichnung der Fragestellung betrachten wir zunächst die durch Iteration aus dem arithmetischen Mittel gewonnenen Hölderschen Mittelbildungen

$$h_n^{(k)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ h_\nu^{(0)} = s_\nu)$$

einer irgendwie gegebenen Folge s_n sowie die auf etwas andere Weise ebenfalls aus dem arithmetischen Mittel gebildeten Cesàroschen Mittel

$$c_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}, \quad S_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^{(k-1)}, \quad S_\nu^{(0)} = s_\nu.$$

Mit der Bezeichnungsweise

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n^{(k)} = \begin{cases} H_k \\ h_k \end{cases}; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n^{(k)} = \begin{cases} C_k \\ c_k \end{cases}; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \begin{cases} S \\ s \end{cases}$$

gelten dann die (elementaren) *direkten* Sätze [1]):

D — o. *Aus* $h_n^{(k)} \to s$ *folgt stets* $h_n^{(k+1)} \to s$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; (bzw.: *Aus* $c_n^{(k)} \to s$ *folgt stets* $c_n^{(k+1)} \to s$).

Und etwa als Spezialfall des Knoppschen Kernsatzes [2]):

D — O. *Für die Hauptlimites dieser Mittel besteht die Ordnungsrelation*:

$$s \leqq h_{k-1} \leqq h_k \leqq H_k \leqq H_{k-1} \leqq S,$$

bez..

$$s \leqq c_{k-1} \leqq c_k \leqq C_k \leqq C_{k-1} \leqq S.$$

Umgekehrt zieht aber die Limitierbarkeit einer Folge s_n zum Wert s nach der Methode der arithmetischen Mittel bereits die gewöhnliche Konvergenz dieser Folge s_n zum Wert s nach sich, falls etwa noch die Folge

$$c_n^{(-1)} \equiv h_n^{(-1)} \equiv n a_n, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad s_{-1} = 0$$

---

[1]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 496.

[2]) Vgl. K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren I, Math. Zeitschr. 31 (1929), S. 97–127, insbesondere S. 123.

beschränkt ist[3]). Die wiederholte Anwendung dieses bekannten *Umkehrsatzes* ergibt die Aussage: *Aus der Konvergenz der H_{k+1}-Mittel zum Wert s folgt im Verein mit der Beschränktheit der H_{k-1}-Mittel bereits die Konvergenz der H_k-Mittel ($k = 0, 1, 2, \ldots$) zum gleichen Wert*[4]). Nach dem Knopp-Schneeschen Äquivalenzsatz[5]) gilt derselbe Sachverhalt auch für die Cesàroschen Mittel, so daß wir dem Satze D — o den folgenden entgegenstellen können:

U — o. *Aus $h_n^{(k+1)} \to s$ und $h_n^{(k-1)} = 0\,(1)$ folgt stets $h_n^{(k)} \to s$;* (bzw.: *Aus $c_n^{(k+1)} \to s$ und $c_n^{(k-1)} = 0\,(1)$ folgt stets $c_n^{(k)} \to s$*).

Während also bei den direkten Sätzen ohne weiteres ein Zusammenhang zwischen dem infinitären Verhalten der k-ten und $(k+1)$-ten Mittel besteht, wird er bei den Umkehrsätzen erst durch die zusätzliche Nebenbedingung, eben die Beschränktheit der $(k-1)$-ten Mittel, hergestellt. Im Sinne der Umkehrsätze erscheinen somit die Mittelbildungen dreier aufeinanderfolgender Ordnungen miteinander verkoppelt.

Bezieht man nun, die Voraussetzung der Konvergenz erweiternd, auch unbestimmt divergentes Verhalten in den Begriff des infinitären Verhaltens schlechthin ein, fragt man also jetzt nach dem Verhalten der k-ten Mittel unter Voraussetzung der *Beschränktheit* der $(k+1)$-ten Mittel, so findet man als Gegenstück zu D — C gewisse Ungleichungen für die Hauptlimites der Mittel von drei aufeinanderfolgenden Ordnungen, die zuerst von Winn sowohl für die gewöhnlichen H_k-Mittel als auch für die C_k-Mittel hergeleitet worden sind[6]).

Das Winnsche Ergebnis läßt sich folgendermaßen aussprechen:

U — O. *Setzt man für die Hölderschen Mittel*

$$\Psi(t) = (H_{k-1} - t)\log\frac{H_{k-1} - t}{H_{k-1} - h_{k+1}} + (t - h_{k-1})\log\frac{t - h_{k-1}}{H_{k+1} - h_{k-1}},$$

hingegen für die Cesàroschen Mittel

$$\Psi_1(t) = \frac{(C_{k-1} - t)^{\frac{k+1}{k}}}{(C_{k-1} - c_{k+1})^{\frac{1}{k}}} + \frac{(t - c_{k-1})^{\frac{k+1}{k}}}{(C_{k+1} - c_{k-1})^{\frac{1}{k}}}; \quad \Psi(t) = \Psi_1(t) - (C_{k-1} - c_{k-1})$$

---

[3]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 503.

[4]) Denn wegen $h_n^{(k-1)} = 0\,(1)$ ist auch $h_n^{(k)} = 0\,(1)$ und folglich

$$n(h_n^{(k)} - h_{n-1}^{(k)}) = (n+1)h_n^{(k)} - n h_{n-1}^{(k)} - h_n^{(k)}$$
$$= h_n^{(k-1)} - h_n^{(k)} = 0\,(1).$$

[5]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 498.

[6]) C. E. Winn, Sur l'oscillation des moyennes de Hölder et de Cesaro, Comptes rendus **194** (1932), S. 1057—1060.

so gilt

$$1) \qquad \begin{cases} \Psi(H_k) \leqq 0, & \Psi(h_k) \leqq 0 \\ \Psi(C_k) \leqq 0, & \Psi(c_k) \leqq 0. \end{cases}$$

Die Hauptlimites der „mittleren" Ordnung genügen ferner den Ungleichungen

$$2) \qquad t_k \leqq h_k \leqq H_k \leqq T_k \quad \text{bzw.} \quad t_k \leqq c_k \leqq C_k \leqq T_k,$$

wobei $t_k = t_k(h_{k-1}, H_{k-1}; h_{k+1}, H_{k+1})$, $T_k = T_k(h_{k-1}, H_{k-1}; n_{k+1}, H_{k+1})$ *die beiden in* $h_{k-1} \leqq t \leqq H_{k-1}$ bzw. $c_{k-1} \leqq t \leqq C_{k-1}$ *gelegenen Wurzeln der transzendenten* bzw. *algebraischen Gleichung* $\Psi(t) = 0$ *bedeuten.* Die unter 2) aufgeführten Ungleichungen lassen sich als Umkehrung der direkten Ungleichheitsbeziehungen D — O ansprechen.

Im folgenden soll ein ganz entsprechendes Ergebnis für eine die beiden genannten Mittel umfassende iterierte Mittelbildung hergeleitet werden. Analog den von Dobrowolski (zum Beweis des Äquivalenzsatzes der H- und C-Mittel) bei Folgen betrachteten verallgemeinerten iterierten Mitteln[7]), welche beide Arten als Spezialfall enthalten, hat Karamata für Funktionen die folgenden Integralmittelbildungen eingeführt[8]).

Es sei $s(t)$ etwa eine über jedes Intervall $(0, x)$ integrierbare Funktion. Die Karamataschen Mittel dieser Funktion werden dann durch die Rekursionsformel

$$1) \qquad \sigma^{(k)}(x) = \frac{P_k}{x^{P_k}} \int_0^x t^{P_k - 1}\, \sigma^{(k-1)}(t)\, dt, \quad \sigma^{(0)}(t) = s(t),$$

$$P_k - P_{k-1} = p_k \geqq 0, \quad P_0 = 0, \quad P_1 = p_1 > 0, \quad \text{so daß} \quad P_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

definiert und enthalten

für $p_1 = 1$, $p_{k+1} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Hölderschen Integralmittel,

für $p_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Rieszschen Mittel

(also die den Cesàroschen entsprechenden Integralmittel) als Spezialfall. Für diese besonderen Integralmittel ergibt sich aus den nachfolgenden Ausführungen genau dasselbe Resultat, das Winn (bei Folgen) für die gewöhnlichen Hölderschen sowie für die Cesàroschen Mittel erhalten hat.

Endlich wird noch gezeigt, wie sich einige spezielle der unlängst von Knopp und dem Verfasser gewonnenen Ungleichungen[9]) aus dem nachstehenden Ergebnis ableiten lassen.

---

[7]) S. Dobrowolski, Sur les valeurs limites de moyennes de Cesàro et de Hölder, Bulletin internat. de l'Acad. Polon. des sciences et des lettres (Krakau). Série A: Sciences Math. 1925, S. 259—264.

[8]) J. Karamata, Summationsverfahren und Limitierungstheorie. Gastvorlesung an der Universität Tübingen. W. S. 1937/38.

[9]) V. Garten und K. Knopp, Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen, Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 365—388.

§ 1.

Wir beweisen zunächst den

Satz 1. *Es werde für die durch die Formel* (1) *eingeführten Mittel*

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\ \sigma^{(k)}(x) = \begin{cases} S \\ s \end{cases}, \qquad S_k - s_k = \Omega_{k-1}$$

$$\Psi_0(t) = (S_{k-1} - t) \log \frac{S_{k-1} - t}{S_{k-1} - s_{k+1}} + (t - s_{k-1}) \log \frac{t - s_{k-1}}{S_{k+1} - s_{k-1}},$$

$$\Psi_1(t) = \frac{(S_{k-1} - t)^{\frac{P_{k+1}}{P_k}}}{(S_{k-1} - s_{k+1})^{\frac{p_{k+1}}{P_k}}} + \frac{(t - s_{k-1})^{\frac{P_{k+1}}{P_k}}}{(S_{k+1} - s_{k-1})^{\frac{p_{k+1}}{P_k}}},$$

und weiter für $p_{k+1} \neq 0$:

$$\Psi(t) = \Psi_1(t) - \Omega_{k-1},$$

für $p_{k+1} = 0$:

$$\Psi(t) = \Psi_0(t)$$

gesetzt. Dann gilt in jedem Falle

$$\Psi(S_k) \leqq 0, \qquad \Psi(s_k) \leqq 0$$

und insbesondere

$$\Psi_1(S_k) \leqq \Omega_{k-1}, \qquad \Psi_1(s_k) \leqq \Omega_{k-1}.$$

Beweis. Nach Definition ist für $k \geqq 1$

$$\sigma^{(k)}(t\,x) = \frac{P_k}{t^{P_k}} \int_0^t \tau^{P_k - 1}\, \sigma^{(k-1)}(\tau\, x)\, d\tau, \tag{2}$$

woraus

$$\sigma^{(k)}(x) - t^{P_k}\, \sigma^{(k)}(t\,x) = P_k \int_t^1 \tau^{P_k - 1}\, \sigma^{(k-1)}(\tau\, x)\, d\tau \tag{3a}$$

und

$$\lambda^{P_{k+1}}\, \sigma^{(k+1)}(\lambda\, x) - \theta^{P_{k+1}}\, \sigma^{(k+1)}(\theta\, x) = P_{k+1} \left\{ \int_\theta^1 t^{P_{k+1} - 1}\, \sigma^{(k)}(t\,x)\, d\,t + \int_1^\lambda t^{P_{k+1} - 1}\, \sigma^{(k)}(t\,x)\, dt \right\} \tag{3b}$$

folgt.

Es sei nun bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$\left.\begin{aligned} s_{k-1} - \varepsilon < \sigma^{(k-1)}(t) < S_{k-1} + \varepsilon \\ s_{k+1} - \varepsilon < \sigma^{(k+1)}(t) < S_{k+1} + \varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ für } t > t_*. \tag{4}$$

Auf Grund der Aussage des Knoppschen Kernsatzes für die echte Mittelbildung $\sigma^{(k)}(x)$ gibt es dann eine Folge $x_n \to \infty$ derart, daß

$$S_k - \varepsilon < \sigma^{(k)}(x_n) < S_k + \varepsilon \qquad \text{für } n > n_0 \tag{5}$$

ist.

Es bedeuten θ, λ zwei später noch in geeigneter Weise zu bestimmende Parameter $(0 < \theta < 1 < \lambda)$ und es sei x_n — wofür wir künftig kurz x schreiben werden — bereits so groß gewählt, daß erstens $n > n_0$ und zweitens $\theta > \frac{t_*}{x}$ (also auch $x > t_*$) gilt. Aus (3) folgt dann bei $\theta < t < 1$ wegen (4)

$$t^{P_k}\sigma^{(k)}(tx) \geqq \sigma^{(k)}(x) - (S_{k-1} + \varepsilon)(1 - t^{P_k})$$

und daher weiter wegen (5) und (1) nach Multiplikation mit $t^{p_{k+1}-1}$

$$t^{P_{k+1}-1}\sigma^{(k)}(tx) \geqq (S_{k-1} + \varepsilon)\, t^{P_{k+1}-1} - (S_{k-1} - S_k + 2\varepsilon)\, t^{p_{k+1}-1},$$

mithin für das erste Integral rechter Hand von (3b) die Abschätzung

$$P_{k+1}\int_\theta^1 t^{P_{k+1}-1}\sigma^{(k)}(tx)\,dt \tag{6}$$

$$\geqq (S_{k-1} + \varepsilon)(1 - \theta^{P_{k+1}}) - (S_{k-1} - S_k + 2\varepsilon)\, P_{k+1}\int_\theta^1 t^{p_{k+1}-1}\,dt.$$

Entsprechend erhält man aus (3a) bei $t > 1$ wegen (4)

$$t^{P_k}\sigma^{(k)}(tx) \geqq \sigma^{(k)}(x) + (s_{k-1} - \varepsilon)(t^{P_k} - 1),$$

also wegen (5) und (1)

$$t^{P_{k+1}-1}\sigma^{(k)}(tx) \geqq (s_{k-1} - \varepsilon)\, t^{P_{k+1}-1} + (S_k - s_{k-1})\, t^{p_{k+1}-1}.$$

Dies liefert schließlich für das zweite Integral von (3b) die Abschätzung

$$P_{k+1}\int_1^\lambda t^{P_{k+1}-1}\sigma^{(k)}(tx)\,dt \tag{7}$$

$$\geqq (s_k - \varepsilon)(\lambda^{P_{k+1}} - 1) + (S_k - s_{k-1})\, P_{k+1}\int_1^\lambda t^{p_{k+1}-1}\,dt.$$

Mit der Abkürzung

$$P_{k+1}\int_\theta^1 t^{p_{k+1}-1}\,dt = \mathfrak{A}(\theta, 1), \quad P_{k+1}\int_1^\lambda t^{p_{k+1}-1}\,dt = \mathfrak{A}(1, \lambda) \tag{8}$$

ergibt die Beziehung (3b) unter Berücksichtigung von (6) und (7) die für das Folgende grundlegende Ungleichung:

$$\lambda^{P_{k+1}}[\sigma^{(k+1)}(\lambda x) - s_{k-1} + \varepsilon] - \theta^{P_{k+1}}[\sigma^{(k+1)}(\theta x) - S_{k-1} - \varepsilon]$$

$$\geqq (S_{k-1} - s_{k-1} + 2\varepsilon) + (S_k - s_{k-1})\,\mathfrak{A}(1, \lambda) - (S_{k-1} - S_k + 2\varepsilon)\,\mathfrak{A}(\theta, 1).$$

Nach leichter Umformung läßt sie sich in der Gestalt

$$\Omega_{k-1} + 2\varepsilon \leqq F_\varepsilon(\lambda, \theta) \tag{9}$$

schreiben, wobei

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\lambda,\theta) = {} & \lambda^{P_{k+1}}(S_{k+1} - s_{k-1} + 2\varepsilon) + \theta^{P_{k+1}}(S_{k-1} - s_{k+1} + 2\varepsilon) \\ & - \mathfrak{A}(1,\lambda)(S_k - s_{k-1}) + \mathfrak{A}(\theta, 1)(S_{k-1} - S_k + 2\varepsilon) \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Bei der speziellen Wahl von λ und θ gemäß:

$$\lambda = \lambda_k, \quad \theta = \theta_k$$

$$\lambda_k^{P_k} = \frac{S_k - s_{k-1}}{S_{k+1} - s_{k-1} + 2\varepsilon}, \qquad \theta_k^{P_k} = \frac{S_{k-1} - S_k + 2\varepsilon}{S_{k-1} - s_{k+1} + 2\varepsilon}, \tag{10}$$

die durch die notwendige Bedingung für das Eintreten eines Minimalwertes von $F_\varepsilon(\lambda, \theta)$ nahegelegt wird, gilt tatsächlich $0 < \theta_k < 1 < \lambda_k$ und es wird

$$F_\varepsilon(\lambda_k, \theta_k) = [\lambda_k^{p_{k+1}} - \mathfrak{A}(1, \lambda_k)][S_k - s_{k-1}] + [\theta_k^{p_{k+1}} + \mathfrak{A}(\theta_k, 1)][S_{k-1} - S_k + 2\varepsilon].$$

Endlich erhält man wegen der willkürlichen Wahl von ε aus (9)

$$\Omega_{k-1} \leqq F_0(\lambda_k, \theta_k), \tag{11}$$

wo nun in den Ausdrücken für λ_k und θ_k ebenfalls $\varepsilon = 0$ zu setzen ist.

Bei der Auswertung der Integralausdrücke $\mathfrak{A}(1, \lambda)$, $\mathfrak{A}(\theta, 1)$ macht sich nun eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem $p_{k+1} = 0$ oder $\neq 0$ ist.

Für $p_{k+1} \neq 0$ hat man nach (8)

$$\begin{aligned} F_0(\lambda_k, \theta_k) = {} & \left(\frac{P_{k+1}}{p_{k+1}} - \frac{P_k}{p_{k+1}}\lambda^{p_{k+1}}\right)(S_k - s_{k-1}) \\ & + \left(\frac{P_{k+1}}{p_{k+1}} - \frac{P_k}{p_{k+1}}\theta^{p_{k+1}}\right)(S_{k-1} - S_k), \end{aligned}$$

so daß (11) jetzt die Form

$$\frac{P_k}{p_{k+1}}\{\lambda^{p_{k+1}}(S_k - s_{k-1}) + \theta^{p_{k+1}}(S_{k-1} - S_k)\} = \frac{P_{k+1}}{p_{k+1}}\Omega_{k-1} - F_0 \leqq \frac{P_k}{p_{k+1}}\Omega_{k-1}$$

annimmt. Die Gleichungen (10) mit $\varepsilon = 0$ lehren aber, daß damit in der Tat die behauptete Ungleichung

$$\Psi_1(S_k) \leqq \Omega_{k-1} \tag{12}$$

bewiesen ist.

Für $p_{k+1} = 0$ wird hingegen vermöge (8) und (11)

$$F_0 = (1 - P_{k+1}\log\lambda)(S_k - s_{k-1}) + \left(1 + P_{k+1}\log\frac{1}{\theta}\right)(S_{k-1} - S_k) \geqq \Omega_{k-1}$$

oder

$$(S_k - s_{k-1})\log\lambda \leqq (S_{k-1} - S_k)\log\frac{1}{\theta}.$$

Wegen der besonderen Wahl von λ und θ gemäß (10) gilt daher

$$(S_k - s_{k-1}) \log \frac{S_k - s_{k-1}}{S_{k+1} - s_{k-1}} \leqq (S_{k-1} - S_k) \log \frac{S_{k-1} - s_{k+1}}{S_{k-1} - S_k},$$

womit die behauptete Ungleichung auch in diesem Falle, nämlich

$$\Psi_0(S_k) \leqq 0, \tag{13}$$

bewiesen ist.

Beide Ergebnisse (12) und (13) zusammen liefern den ersten Teil der Behauptung $\Psi(S_k) \leqq 0$ in Satz 1. Entsprechend gewinnt man durch Einführung der Funktion $-s(t)$ an Stelle von $s(t)$ den zweiten Teil der Behauptung, nämlich $\Psi(s_k) \leqq 0$, womit der Satz 1 nunmehr vollständig bewiesen ist.

Da die betrachteten Mittelbildungen, wie erwähnt, *echt* sind, kann man auf sie ohne weiteres den Knoppschen Kernsatz[10]) anwenden und erhält so die Beziehungen:

$$s_{k-1} \leqq s_k \leqq s_{k+1} \leqq S_{k+1} \leqq S_k \leqq S_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Analog der in der Einleitung angegebenen Deutung des Winnschen Resultats gestattet hier der vorstehende Satz 1 auch folgende Fassung, die deutlicher zum Ausdruck bringt, daß es sich hierbei um eine Umkehrung der Aussage (14) handelt.

Satz 2. *Mit der in Satz 1 eingeführten Bezeichnung gilt*

$$t_k \leqq s_k \leqq S_k \leqq T_k, \tag{15}$$

wobei

$$t_k = t_k(s_{k-1}, S_{k-1};\ s_{k+1}, S_{k+1})$$
$$T_k = T_k(s_{k-1}, S_{k-1};\ s_{k+1}, S_{k+1})$$

die beiden in $s_{k-1} \leqq t \leqq S_{k-1}$ gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$\Psi(t) = 0 \tag{16}$$

bedeuten.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $\Psi(t)$ an den Endpunkten des fraglichen Intervalls $\geqq 0$ ist, die Ableitung $\Omega'(t)$ bis zu einer inneren Stelle t_0 des Intervalls negativ und von da an beständig positiv ausfällt und endlich $\Psi(t_0) < 0$ ist.

Für $p_{k+1} \neq 0$ setzen wir zunächst

$$\Psi_1(t) = A^\alpha (t - s_{k-1})^{1+\alpha} + B^\alpha (S_{k-1} - t)^{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{p_{k+1}}{P_k}. \tag{17}$$

Wegen (14) ist

$$\begin{cases} B^{-1} = S_{k-1} - s_{k+1} \leqq S_{k-1} - s_{k-1} = \Omega_{k-1}; & B \geqq \Omega_{k-1}^{-1}, \\ A^{-1} = S_{k+1} - s_{k-1} \leqq S_{k-1} - s_{k-1} = \Omega_{k-1}; & A \geqq \Omega_{k-1}^{-1}, \end{cases} \tag{18}$$

[10]) Vgl. loc. cit. [2]), S. 123.

und man findet daher die Abschätzungen

$$(19)\quad \begin{cases} \Psi_1(s_{k-1}) = B^\alpha (S_{k-1} - s_{k-1})^{1+\alpha} \geqq \Omega_{k-1}; \quad \Psi(s_{k-1}) \geqq 0, \\ \Psi_1(S_{k-1}) = A^\alpha (S_{k-1} - s_{k-1})^{1+\alpha} \geqq \Omega_{k-1}; \quad \Psi(S_{k-1}) \geqq 0. \end{cases}$$

Es werde nun

$$(20)\qquad t_0 = \frac{\mu S_{k-1} + s_{k-1}}{\mu + 1} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{B}{A} = \frac{S_{k+1} - s_{k-1}}{S_{k-1} - s_{k+1}} > 0$$

gesetzt. Dann gilt, wie man leicht erkennt,

$$s_{k-1} \leqq t_0 \leqq S_{k-1}$$

und wegen $s_{k+1} \leqq S_{k+1}$ sogar schärfer

$$s_{k+1} \leqq t_0 \leqq S_{k+1}.$$

Die Ableitung

$$\Psi'(t) = \Psi_1'(t) = (1+\alpha)\{A^\alpha (t - s_{k-1})^\alpha - B^\alpha (S_{k-1} - t)^\alpha\}$$

fällt nun offensichtlich für $t < t_0$ negativ, für $t > t_0$ positiv aus und verschwindet für $t = t_0$.

Endlich ist

$$(21)\quad \begin{aligned} \Psi_1(t_0) &= A^\alpha (t_0 - s_{k-1})^{1+\alpha} + B^\alpha (S_{k-1} - t_0)^{1+\alpha} \\ &\leqq A^\alpha (S_{k+1} - s_{k-1})^\alpha (t_0 - s_{k-1}) + B^\alpha (S_{k-1} - s_{k+1})^\alpha (S_{k-1} - t_0), \end{aligned}$$

mithin wegen (18)

$$(22)\qquad \Psi_1(t_0) \leqq \Omega_{k-1} \quad \text{bzw.} \quad \Psi(t_0) \leqq 0.$$

Für $p_{k+1} = 0$ hingegen ist in der obigen Bezeichnungsweise

$$(23)\qquad \Psi(t) = (t - s_{k-1}) \log (t - s_{k-1})\, A + (S_{k-1} - t) \log (S_{k-1} - t)\, B,$$

woraus wegen $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log \frac{1}{x} = 0$ und (18) die Abschätzungen

$$(24)\qquad \begin{cases} \Psi(s_{k-1}) = \Omega_{k-1} \log (B\,\Omega_{k-1}) \geqq 0, \\ \Psi(S_{k-1}) = \Omega_{k-1} \log (A\,\Omega_{k-1}) \geqq 0 \end{cases}$$

folgen.

Die Ableitung

$$\Psi'(t) = \log (t - s_{k-1})\, A - \log (S_{k-1} - t)\, B = \log \frac{t - s_{k-1}}{S_{k-1} - t} \cdot \frac{A}{B}$$

fällt hier ebenfalls für $t < t_0$ negativ, für $t > t_0$ positiv aus und verschwindet für $t = t_0$. An dieser Stelle ist wegen

$$t_0 - s_{k-1} = \mu (S_{k-1} - t_0), \qquad \mu A = B$$

sicher

$$\begin{aligned} \Psi(t_0) &= (t_0 - s_{k-1}) \log (S_{k-1} - t_0)\, B + (S_{k-1} - t_0) \log (S_{k-1} - t_0)\, B \\ &= \Omega_{k-1} \log (S_{k-1} - t_0)\, B \leqq 0, \end{aligned}$$

weil ja wegen $s_{k+1} \leqq t_0$ die Ungleichung

$$S_{k-1} - t_0 \leqq S_{k-1} - s_{k+1} = B^{-1}$$

gilt.

Der Satz 2 gestattet folgende Ergänzungen:

1. *Die beiden Wurzeln t_k, T_k stimmen dann und nur dann überein, wenn $S_k = s_k$ ist.*

Denn für $t_k = T_k$ muß nach (15) auch $S_k = s_k$ sein. Ist aber $S_k = s_k = s$, so ist nach (14) auch $S_{k+1} = s_{k+1} = t_0 = s$ und es wird $\Psi(s) = 0$; da nun $\Psi'(t)$ für $t < t_0 = s$ negativ, für $t > t_0 = s$ aber positiv ausfällt, muß $t_k = T_k = s$ sein.

2. *Ist für eine Funktion $s(t)$ sowohl $\Omega_{k-1} \neq 0$ als auch $S_{k-1} = S_k$, so muß auch $S_{k+1} = S_{k-1}$ gelten.*

Wegen (15) und (19) ist nämlich $S_k = T_k = S_{k-1}$ und daher $\Psi_1(S_k) = \Omega_{k-1}$, bzw. $\Psi_0(S_k) = 0$, d. h. weil in Ψ_1 und Ψ_0 mit $t = S_{k-1}$ der erste Summand jeweils verschwindet,

$$\frac{\Omega_{k-1}^{1+\alpha}}{(S_{k+1} - s_{k-1})^{\alpha}} = \Omega_{k-1} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_{k-1} \log \frac{\Omega_{k-1}}{S_{k+1} - s_{k-1}} = 0,$$

woraus die Bemerkung unmittelbar folgt. (Ebenso folgt aus $s_{k-1} = s_k$ und $\Omega_{k-1} \neq 0$, daß $s_{k+1} = s_{k-1}$ ist.)

3. Die spezielle Wahl der Größen p_k gemäß

$$\left.\begin{array}{ll} H\colon & p_1 = 1, \quad p_{k+1} = 0 \\ C\colon & p_k = 1 \end{array}\right\} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

wobei für alle k im Falle H eben $P_k = 1$, im Falle C aber $P_k = k$ wird. führt in den beiden Sätzen gerade auf das Winnsche Ergebnis, das somit auch für die entsprechenden Integralmittel sichergestellt ist.

§ 2.

Aus dem Satz 1 des § 1 lassen sich jetzt Ungleichungen herleiten, die denjenigen analog sind, die unlängst von Knopp und dem Verfasser auf anderem Wege gewonnen worden sind. Für die eingangs betrachteten Cesàroschen Mittel enthalten die Sätze 2 und 3 der zitierten Arbeit bei der speziellen Wahl $k = 1$, $l = 2$ in der dortigen Bezeichnungsweise und wenn nachträglich $r + 1 = k$ gesetzt wird, die beiden Sätze[11]):

Satz 3'. *Für eine Folge (s_n) seien die Mittel $c_n^{(k-1)} \geqq 0$ $(k > 0)$. Dann gilt*

$$C_k \leqq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k C_{k+1}$$

und

[11]) loc. cit. [9]), S. 368/369.

Satz 4'. *Unter der gleichen Voraussetzung gilt auch*

$$c_k \geqq \frac{1}{k+1}\, c_{k+1}.$$

Ferner ergibt sich als Spezialfall ($k = 1$, $l = 2$) des daselbst[12]) für Höldersche Integralmittel bewiesenen Satzes 1c der

Satz $3'_0$. *Ist* $h^{(k-1)}(t) \geqq 0$, *so gilt*

$$H_k \leqq e \cdot H_{k+1}.$$

An Beispielen wird ferner gezeigt, daß die in den Sätzen auftretenden Konstanten sich nicht verbessern lassen.

In Verallgemeinerung der soeben angeführten Sätze lassen sich nun ganz entsprechende Ungleichungen für die Hauptlimites der hier betrachteten Karamataschen Mittel dreier aufeinander folgender Ordnungen herleiten. Wir werden sie in gewissem Sinne unter Verzicht an Schärfe aus dem Satz 1 des § 1 erhalten. Kurz gesagt, indem wir dort $s_{k-1} = s_{k+1} = 0$ setzen und $S_{k-1} \to \infty$ rücken lassen. Das Resultat lautet dann:

Satz 3. *Für eine über jedes Intervall* $(0, x)$ *integrierbare Funktion* $s(t)$ *sei* $s_{k-1} \geqq 0$. *Dann gilt mit der Abkürzung* $\alpha = \frac{p_{k+1}}{P_k}$

für $p_{k+1} \neq 0$: (1) $S_k \leqq (1+\alpha)^{1/\alpha} S_{k+1}$ $(0 < \alpha \leqq 1)$,

für $p_{k+1} = 0$: (2) $S_k \leqq e\, S_{k+1}$.

Satz 4. *Unter der gleichen Voraussetzung gilt für* $p_{k+1} \neq 0$:

(3) $$s_k \geqq \frac{\alpha}{1+\alpha}\, s_{k+1}.$$

Man erkennt leicht, wie für die obige Wahl C bzw. H in diesen beiden Sätzen 3 und 4 die obigen Sätze 3', $3'_0$ und 4' enthalten sind.

Zum Beweis schreiben wir die Aussage des Satzes 1 in der Form:

$p_{k+1} \neq 0$: (4) $$F_1(S_{k-1}) = (S_{k-1} - S_k) \log \frac{S_{k-1} - S_k}{S_{k-1} - s_{k+1}}$$

$$\leqq (s_{k-1} - S_k) \log \frac{s_{k-1} - S_k}{s_{k-1} - S_{k+1}} = F_2(s_{k-1}),$$

$p_{k+1} = 0$: (5) $$G_1(S_{k-1}) = \frac{(S_{k-1} - t)^{1+\alpha}}{(S_{k-1} - s_{k+1})^{\alpha}} - S_{k-1}$$

$$\leqq \frac{(s_{k-1} - t)^{1+\alpha}}{(s_{k-1} - S_{k+1})^{\alpha}} - s_{k-1} = G_2(s_{k-1}),$$

wobei $t = S_k$ oder $t = s_k$ ist.

---

[12]) loc. cit. [9]), S. 384.

Die Zurückführung der Sätze 3 und 4 auf den Satz 1 des § 1 beruht nun im wesentlichen auf der Tatsache, daß die Funktionen

$$F(x) = (x-a)\log\frac{x-a}{x-b} \tag{6}$$

und

$$G(x) = \frac{(x-a)^{1+\alpha}}{(x-b)^{\alpha}} - x \tag{7}$$

unter den Bedingungen

$$b \leqq a < x < \infty, \tag{I}$$

$$0 \leqq x < b \leqq a \tag{II}$$

monoton fallen und $G(x)$ ferner für

$$a \leqq b < x < \infty \tag{III}$$

beständig abnimmt [13]).

Im Falle $p_{k+1} = 0$ hat man daher und wegen $s_{k-1} \geqq 0$

$$F_1(\infty) \leqq F_1(S_{k-1}), \quad F_2(s_{k-1}) \leqq F_2(0). \tag{8}$$

---

[13]) Für $F(x)$ ist dies eine Folge der für $A > 0$ gültigen Ungleichung

$$e^{A-1} \geqq A\left[1 + \frac{(A-1)^2}{3!} + \frac{(A-1)^4}{5!} + \cdots\right] \geqq A$$

bzw.

$$\log A + 1 - A \leqq 0.$$

Denn mit $A = \frac{x-a}{x-b} > 0$ wird

$$F'(x) = \log\frac{x-a}{x-b} + 1 - \frac{x-a}{x-b} \leqq 0.$$

Für $G(x)$ lehrt es einerseits die für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ und $0 \leqq B < 1$ gültige Ungleichung

$$(1-B)^{\alpha} = 1 - \alpha B - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2!}B^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{3!}B^3 - \cdots$$
$$\leqq 1 - \alpha B,$$

die im Falle I mit $B = \frac{a-b}{x-b} \geqq 0$

$$G'(x) = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\alpha}\left(1 + \alpha\frac{a-b}{x-b}\right) - 1 = \left(1 - \frac{a-b}{x-b}\right)^{\alpha}\left(1 + \alpha\frac{a-b}{x-b}\right) - 1$$
$$\leqq -\alpha^2\left(\frac{a-b}{x-b}\right)^2 \leqq 0$$

liefert. Andererseits hat man im Falle II wegen $b \leqq a$

$$G'(x) = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\alpha} - 1 - \alpha\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\alpha}\frac{a-b}{b-x} \leqq \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\alpha} - 1 \leqq 0.$$

Im Falle III endlich hat man für $x > a$

$$G''(x) = \alpha(1+\alpha)\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{a-b}{x-b}\right)^2\frac{1}{x-a} \geqq 0$$

und

$$G'(x) = \left(\frac{1-\frac{a}{x}}{1-\frac{b}{x}}\right)^{\alpha}\left(1 + \alpha\frac{a-b}{x-b}\right) - 1 \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

also wiederum $G'(x) \leqq 0$.

Mit Rücksicht auf

$$F_1(x) = (x - S_k)\left[\log\left(1 - \frac{S_k}{x}\right) - \log\left(1 - \frac{s_{k+1}}{x}\right)\right]$$
$$\to -S_k + s_{k+1} \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

geht die Ungleichung (5) wegen (8) über in

$$-S_k + s_{k+1} \leqq -S_k \log \frac{S_k}{S_{k+1}}$$

bzw.

$$S_k \exp\left(\frac{s_{k+1}}{S_k}\right) \leqq e \cdot S_{k+1}$$

und wegen $s_{k+1} \geqq 0$ schließlich in die behauptete Ungleichung (2).

Im Falle $p_{k+1} \neq 0$ sei zunächst $t = S_k$.

Indem man für $x = S_{k-1}$, $a = S_k$, $b = s_{k+1}$ die Funktion $G_1(S_{k-1})$ mit $G(x)$ identifiziert, wobei also der Fall (I) vorliegt, folgt aus der Monotonieeigenschaft von $G(x)$ die Ungleichung

(9a) $$G_1(\infty) \leqq G_1(S_{k-1}).$$

Ebenso folgt wegen $s_{k-1} \geqq 0$ auch

(9b) $$G_2(s_{k-1}) \leqq G_2(0),$$

wenn man $G(s_{k-1})$ für $x = s_{k-1}$, $a = S_k$, $b = S_{k+1}$ mit $G(x)$ identifiziert, wobei jedoch jetzt der Fall (II) vorliegt. Wegen dieser Ungleichungen und der Beziehung

(10) $$G_1(x) = \frac{(x-t)^{1+\alpha}}{(x - s_{k+1})^{\alpha}} - x \to -(1+\alpha)t + \alpha s_{k+1} \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

folgt aus (5) mit $t = S_k$

$$S_k^{\alpha} + \alpha \frac{s_{k+1}}{S_k} S_{k+1}^{\alpha} \leqq (1+\alpha) S_{k+1}^{\alpha}$$

und, weil $s_{k+1} \geqq 0$ ist, die behauptete Ungleichung (1).

Zum Beweis der Ungleichung (3) endlich wird in (5) $t = s_k$ gesetzt. Wegen $0 \leqq s_{k-1} < s_k < S_{k+1}$ ist die rechte Seite von (5) nicht positiv, nämlich $G_2(s_{k-1}) \leqq 0$, also a fortiori

$$G_1(S_{k-1}) \leqq 0.$$

Die Monotonieeigenschaft von $G(x)$ liefert hier im Falle (III), wenn nämlich $G_1(S_{k-1})$ für $x = S_{k-1}$, $a = s_k$, $b = s_{k+1}$ mit $G(x)$ identifiziert wird,

$$G_1(\infty) \leqq G_1(S_{k-1}) \leqq 0.$$

Die Beziehung (10) liefert mit $t = s_k$ die Ungleichung

$$-(1+\alpha)s_k + \alpha s_{k+1} \leqq 0,$$

wodurch nun auch der Satz 4 bewiesen ist.

(Eingegangen am 11. Juli 1939.)

Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen.

Von

Nikola Obreschkoff in Sofia.

Hurwitz [1]) verdankt man den folgenden fundamentalen algebraischen Satz:

Die sämtlichen Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_0 > 0, \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, *haben dann und nur dann negative Realteile, wenn alle Determinanten*

$$\Delta_\lambda^{(n)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{2\lambda-1} & a_{2\lambda-2} & . & . & . & . & . & a_\lambda \end{vmatrix}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

positiv sind; *dabei wird* $a_\nu = 0$ *bei* $\nu > n$ *angenommen*. Ein Polynom mit den im Satze genannten Eigenschaften soll weiterhin ein Hurwitzsches Polynom genannt werden.

Der Hurwitzsche Beweis macht von Integralen Gebrauch, während derjenige von Orlando [2]) etwas kompliziert ist, obwohl rein algebraisch; eine interessante Beweisführung verdankt man I. Schur [3]).

Im folgenden führen wir einen neuen einfachen Beweis, in dem einige elementare Sätze verwendet werden.

1. Falls (1) ein Hurwitzsches Polynom ist, sind alle seine Koeffizienten positiv [4]).

In der Tat stellt sich dann $f(x)$ als Faktoren 1. und 2. Grades mit positiven Koeffizienten dar.

---

[1]) A. Hurwitz, Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, Math. Annalen **46** (1895), S. 273—284.

[2]) L. Orlando, Sui problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un'equazione algebrica, Math. Annalen **71** (1912), S. 233—245.

[3]) I. Schur, Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen, Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. **1** (1921), S. 307—311.

[4]) S. die unter [1]) zitierte Arbeit von Hurwitz.

2. Satz von Biehler [5]) und Hermite [6]): Falls die Nullstellen des Polynoms $\varphi(x) + i\,\psi(x)$ auf einer und derselben Seite der reellen Achse liegen, haben die Polynome $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur einfache, gegenseitig sich trennende, reelle Nullstellen; und umgekehrt.

3. Wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur einfache, gegenseitig sich trennende reelle Nullstellen haben, gilt dasselbe für die Polynome

$$\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x), \qquad \lambda_1\varphi(x) + \mu_1\psi(x);$$

hier sind $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ reelle Zahlen und $\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu \neq 0$, (unmittelbare Folgerung aus 2).

Wir zeigen zunächst den folgenden neuen

Satz I. *Das Polynom*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \varphi(x^2) + x\,\psi(x^2), \quad a_0 > 0,$$

$$\varphi(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \ldots, \quad \psi(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \ldots,$$

mit reellen Koeffizienten ist dann und nur dann ein Hurwitzsches, wenn das Polynom

$$f_1(x) = \psi(x^2)\left(1 - \frac{a_0}{x}\right) + \frac{a_1}{x}\varphi(x^2)$$

$$= a_1 + (a_2 a_1 - a_0 a_3)\,x + a_3 x^2 + (a_4 a_1 - a_0 a_5)\,x^3 + \ldots$$

dieselbe Eigenschaft hat und $a_1 > 0$.

Wir nehmen an, daß $f(x)$ ein Hurwitzsches Polynom ist. Aus dem Hilfssatz 1 folgt $a_1 > 0$. Und der Hilfssatz 2, wenn x durch xi ersetzt wird, ergibt, daß die Nullstellen der Polynome $\varphi(x^2)$, $x\,\psi(x^2)$ auf der imaginären Achse liegen und sich gegenseitig trennen. Dann sind die Nullstellen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ reell, negativ und trennen sich gegenseitig [7]). Wir richten die Bezeichnung derselben bzw. mit $-\alpha_i$, $-\beta_i$ so ein, daß

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots \tag{3}$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots, \qquad \frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \ldots$$

---

[5]) E. Biehler, Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, Journal de M. Borchard **87** (1879), S. 350–352.

[6]) Ch. Hermite, Sur l'indice des fractions rationnelles, Bulletin de la Société mathématique **7** (1878/79), S. 129–131.

[7]) Diese Eigenschaft ist von Lienard auf komplizierte Weise abgeleitet; siehe seine Abhandlung Signe de la parti réelle des racines d'une équation algébrique, Journal de Mathématiques pures et appliquées **15** (1936), S. 235–250.

folgern wir, auf Grund von (3), daß $\frac{a_2}{a_0} > \frac{a_3}{a_1}$, d. h.

$$a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0. \tag{4}$$

Wir betrachten das Polynom $g(x)$,

$$x\,g(x) = a_1\,\varphi(x) - a_0\,\psi(x).$$

Nach Hilfssatz 3 haben die Polynome $xg(x)$, $\psi(x)$ nur reelle, sich trennende Nullstellen. $g(x)$ hat also nur reelle negative Nullstellen, die diejenigen von $\psi(x)$ trennen. $x\,g(x^2)$, $\psi(x^2)$ besitzen dann nur auf der imaginären Achse gelegene, sich gegenseitig trennende Nullstellen. Nach Hilfssatz 2 sind alle Nullstellen des Polynoms

$$f_1(x) = \psi(x^2) + x\,g(x^2) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

auf einer und derselben Seite der imaginären Achse; diese Seite muß die linke sein, wegen $b_0 = a_1 > 0$ und (4), das $b_1 = a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0$ ergibt.

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, $f_1(x)$ sei ein Hurwitzsches Polynom und $a_1 > 0$. Dann sind die Nullstellen von $x\,g(x)$ und $\psi(x)$ reell und trennen sich gegenseitig, wobei diejenigen von $\psi(x)$ negativ sind. Da $a_1\,\varphi(x) = x\,g(x) + a_0\,\psi(x)$, hat $\varphi(x)$ nur reelle Nullstellen, die jene von $\psi(x)$ trennen, und umgekehrt. $\varphi(x)$ darf also höchstens eine positive Nullstelle besitzen. Bei geradem n hat man

$$\varphi(x) = a_0 + a_2 x + \ldots + a_n x^{\frac{n}{2}},$$

wobei $b_{n-1} = a_n a_1$. Da $b_{n-1} > 0$, folgt $a_n > 0$, und $\varphi(x)$ hat keine positive Nullstelle. Bei ungeradem n sind

$$\varphi(x) = a_0 + a_2 x + \ldots + a_{n-1} x^{\frac{n-1}{2}}, \quad \psi(x) = a_1 + a_3 x + \ldots + a_n x^{\frac{n-1}{2}}$$

wobei

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = a_{n-1} a_1 - a_n a_0.$$

Wegen $b_{n-1} > 0$, $b_{n-2} > 0$ folgt $a_n > 0$, $a_{n-1} a_1 > a_n a_0$ d. h. $a_{n-1} > 0$. Daraus ergibt sich wieder, daß $\varphi(x)$ keine positive Nullstelle hat. Dann besitzt $\varphi(x)$ nur reelle negative Nullstellen, welche auf diejenigen von $\psi(x)$ folgen, weil $b_2 = a_2 a_1 - a_0 a_3$, $\frac{a_2}{a_0} > \frac{a_3}{a_1}$ ergibt.

Aus dem Gesagten schließen wir, daß $x\,\psi(x)$ und $\varphi(x)$ nur reelle nichtpositive, gegenseitig sich trennende Nullstellen haben und weiter, daß die Nullstellen von $f(x) = \varphi(x^2) + x\,\psi(x^2)$ nur auf einer Seite der imaginären Achse gelegen sind; wegen $a_0 a_1 > 0$ liegen dieselben links von dieser Achse.

Der Hurwitzsche Satz folgt nun leicht aus den oben ausgeführten auf induktivem Wege. Nämlich seien $\Delta_\lambda^{(n-1)}$ die Hurwitzschen Determinanten für $f_1(x)$. Wir schreiben sie in folgender Form

$$\Delta_\lambda^{(n-1)} = \frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 a_1 - a_0 a_3 & a_1 & \dots \\ a_5 & a_4 a_1 - a_0 a_5 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

Wir multiplizieren die erste Spalte mit a_0 und addieren dieselbe zur zweiten, die dritte Spalte mit a_0 und addieren dieselbe zur vierten usw. So ergibt sich

$$\Delta_\lambda^{(n-1)} = a_1^p \Delta_\lambda^{(n)}, \quad p = \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] - 1.$$

Die Bedingungen $\Delta_\lambda^{(n-1)} > 0$, $\lambda = 1, 2, 3, \dots, n-1$, $a_1 > 0$, sind also äquivalent mit $\Delta_\lambda^{(n)} > 0$, $\lambda = 1, 2, \dots, n$.

(Eingegangen am 12. Juli 1939.)

Über einige Sätze aus der Reihenlehre.

Von

Werner Meyer-König in Stuttgart.

I.

Von A. Ostrowski [1]) stammt der folgende Satz:

Die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit positiven, monoton gegen* 0 *abnehmenden Gliedern* a_n *und den Teilsummen* $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ *konvergiert dann und nur dann zur Summe* s, *wenn* $s_n - n a_n \to s$ *strebt.*

Die eine Hälfte der Behauptung, daß nämlich für eine konvergente Reihe der betrachteten Art $n a_n \to 0$ strebt, bildet den Inhalt des alten Satzes von Olivier. Nun sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit beliebigen Gliedern. Dann braucht bekanntlich nicht mehr $n a_n = o(1)$ zu sein; jedoch streben in diesem Falle die arithmetischen Mittel der Folge $n a_n$ gegen 0, d. h. es strebt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \nu a_\nu \to 0. \tag{1}$$

Es gilt nun aber nicht in Analogie zum Ostrowskischen Satz, daß für die Konvergenz einer Reihe mit beliebigen Gliedern zum Werte s die Bedingung

$$s_n - \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \nu a_\nu \to s \tag{2}$$

notwendig und hinreichend ist. Vielmehr ist (2) identisch mit

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \to s$$

und also eine notwendige und hinreichende Bedingung für die C_1-Summierbarkeit von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Erst bei Hinzufügung einer Konstanten in (2) erhält man eine Aussage in der gewünschten Richtung. Es gilt nämlich:

[1]) A. Ostrowski, Mathematische Miszellen III, Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung **34** (1926), S. 161—171. Wegen eines anderen, sehr kurzen Beweises s. K. Knopp, Bemerkung zu einigen Sätzen über unendliche Reihen, ebenda **37** (1928), S. 325—327.

Ist $c < 1$ eine Konstante, so ist

$$(3) \qquad s_n - \frac{c}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \nu a_\nu \to s$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit beliebigen Gliedern zur Summe s konvergiert.

Zum Beweis braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die Bedingung hinreichend ist. Der in (3) links stehende Ausdruck ist gleich

$$(1-c)\, s_n + c\left(s_n - \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \nu a_\nu\right) = (1-c)\, s_n + c\, \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}.$$

Nach einem bekannten Satz von Mercer folgt aber bei positivem α aus

$$\alpha\, t_n + (1-\alpha)\, \frac{t_1 + \ldots + t_n}{n} \to s,$$

daß $t_n \to s$ strebt. Setzt man $t_n = s_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so ergibt sich die Behauptung [2]).

II.

Diejenige Hälfte des Ostrowskischen Satzes, die aus $s_n - n a_n \to s$ auf $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ schließt, ist auch noch bei geringeren Voraussetzungen über die a_n richtig. *Es genügt z. B., von der Folge a_n nur zu fordern, daß V-$\lim a_n = 0$ ist, wobei V ein der Permanenzbedingung genügendes Limitierungsverfahren bedeutet.* Offenbar genügt es, den Beweis für den Fall $s = 0$ zu führen. Er ergibt sich dann aus dem folgenden Hilfssatz, bei dem keinerlei Voraussetzungen über die a_n gemacht werden:

Aus

$$(4) \qquad s_n - n a_n \to 0$$

folgt

$$s_n = An + o(1),$$

wobei A eine Konstante ist.

---

[2]) Der Mercersche Satz hat zahlreiche Verallgemeinerungen erfahren, insbesondere durch Ersetzung der arithmetischen Mittel $\frac{1}{n}(t_1 + \ldots + t_n)$ durch gewichtete Mittel $\frac{p_1 t_1 + \ldots + p_n t_n}{p_1 + \ldots + p_n}$ $(0 < p_n, p_1 + \ldots + p_n \to \infty)$ und der Konstanten α durch eine komplexe Zahlenfolge α_n, die gewissen Bedingungen genügen muß. Für Näheres und Literaturangaben s. z. B. J. Karamata, Sur quelques inversions d'une proposition de Cauchy et leurs généralisations, Tôhoku Math. Journ. **36** (1932), S. 22—28. Diesen Erweiterungen entsprechen Verallgemeinerungen der Bedingung (3).

Sehe ich dies als bewiesen an, so ergibt sich daraus $a_n \to A$. Wegen $V\text{-}\lim a_n = 0$ muß also $A = 0$ und damit $s_n = o(1)$ sein.

Zum Beweis des Hilfssatzes mache ich den Ansatz [3])

$$s_n = n\sigma_n.$$

Aus (4) ergibt sich

$$(n^2 - n)(\sigma_n - \sigma_{n-1}) \to 0$$

Also ist

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{\varepsilon_n}{n^2},$$

wobei $\varepsilon_n \to 0$ strebt. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$, den ich mit A bezeichne, und man hat

$$n(A - \sigma_n) = n \sum_{\nu=n}^{\infty} (\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu) = n \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{(\nu+1)^2} \to 0.$$

Der letzte Schritt ergibt sich dabei aus einem bekannten Satz über die lineare Transformation einer Nullfolge, wenn man beachtet, daß $n \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^2}$ beschränkt ist. Also ist

$$\sigma_n = A + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$s_n = An + o(1).$$

III.

Die de la Vallée-Poussinsche Verallgemeinerung des Olivierschen Satzes hat Ostrowski folgendermaßen erweitert:

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit positiven Gliedern,* μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge positiver Zahlen und es strebe* a_n/μ_n *monoton gegen* 0. *Unter diesen Voraussetzungen ist dann und nur dann* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, *wenn*

$$s_n - \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{\mu_n} a_n \to s$$

strebt.

Darin ist für $\mu_n = 1$ der in I zu Beginn genannte Satz enthalten. Diejenige Hälfte, die nicht den de la Vallée-Poussinschen Satz ausmacht, läßt sich bei gewissen Folgen μ_n wieder allgemeiner fassen:

[3]) Dieser Kunstgriff ist analog dem, den G. H. Hardy [Generalisations of a Limit Theorem of Mr. Mercer, The quarterly Journal of Math. 43 (1912), S. 143–150] beim Beweis des Mercerschen Satzes benutzt. Es handelt sich um eine „Variation der Konstanten", denn durch $s_n = Cn$ (C konst.) wird die Beziehung $s_n - na_n = 0$ erfüllt.

Es sei μ_n eine Folge positiver Zahlen und

$$\mathsf{M}_n = \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu$$

gesetzt. Weiter sei

(5) $$\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{\mu_\nu}{\mathsf{M}_\nu}\right)^2 \quad \textit{konvergent.}$$

Ist c eine komplexe Zahl mit positivem Realteil und $\Re\left(\frac{1}{c}\right) = \beta > 0$ gesetzt, so folgt aus

(6) $$s_n - c\,\frac{\mathsf{M}_n}{\mu_n}\,a_n \to s$$

und

(7) $$\frac{a_n}{\mu_n} = o\left(\mathsf{M}_n^{\beta-1}\right),$$

daß

$$s_n \to s$$

strebt.

Es genügt zum Beweis, den Fall $s = 0$ zu betrachten. Wegen (5) strebt $\frac{\mu_n}{\mathsf{M}_n}$ gegen 0 und ist $\mathsf{M}_{n-1} \cong \mathsf{M}_n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich daher annehmen, daß stets

$$\frac{\mu_n}{|c|\,\mathsf{M}_n} < 1 \quad \text{für} \quad n \geqq 2$$

ist. Ich setze [4])

$$\varphi_n(c) = \prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - \frac{\mu_\nu}{c\,\mathsf{M}_\nu}\right)^{-1},$$

$$\varphi_n(1) = \frac{\mathsf{M}_n}{\mathsf{M}_1}.$$

Wegen (5) ist die Folge

$$\sum_{\nu=2}^{n} \left(\log\left(1 - \frac{\mu_\nu}{c\,\mathsf{M}_\nu}\right)^{-1} - \frac{1}{c}\log\left(1 - \frac{\mu_\nu}{\mathsf{M}_\nu}\right)^{-1}\right)$$

konvergent. Dasselbe gilt daher von der Folge $\varphi_n(c)\,\varphi_n(1)^{-\frac{1}{c}}$. Also ist

$$|\varphi_n(c)| \sim \mathsf{M}_n^{\beta}.$$

Ich mache nun den Ansatz

$$s_n = \sigma_n\,\varphi_n(c)$$

und erhalte damit aus (6)

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = o\left(\frac{\mu_n}{\mathsf{M}_n\,|\varphi_{n-1}(c)|}\right)$$

---

[4]) Vgl. Hardy, a. a. O., Beweis von Theorem 8.

oder

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{\varepsilon_n \mu_n}{\mathsf{M}_n^{1+\beta}},$$

wobei ε_n gegen 0 strebt. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\mathsf{M}_n^{1+\beta}}$ konvergent ist, ist es auch die Folge σ_n. Ist A ihr Grenzwert, so ist

$$\mathsf{M}_n^{\beta}(A - \sigma_n) = \mathsf{M}_n^{\beta} \sum_{\nu=n}^{\infty} (\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu) = \mathsf{M}_n^{\beta} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\nu+1}\, \mu_{\nu+1}}{\mathsf{M}_{\nu+1}^{1+\beta}} = o(1).$$

Der letzte Schritt ergibt sich dabei, wenn man beachtet, daß $\mathsf{M}_n^{\beta} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\mu_{\nu+1}}{\mathsf{M}_{\nu+1}^{1+\beta}}$ beschränkt ist. Wegen

$$\sigma_n = A + o(\mathsf{M}_n^{-\beta})$$

ist nun

$$s_n = A\, \varphi_n(c) + o(1).$$

Daraus und aus

$$s_n = c\, \frac{\mathsf{M}_n}{\mu_n}\, a_n + o(1)$$

ergibt sich

$$A = \frac{c}{\varphi_n(c)} \frac{\mathsf{M}_n}{\mu_n} a_n + \frac{o(1)}{\varphi_n(c)}.$$

Wegen (7) muß daher $A = 0$ sein, womit der Beweis geführt ist.

Natürlich ließen sich statt (7) noch andere Bedingungen angeben, die $A = 0$ zur Folge hätten. Z. B. könnte man im Falle $\mu_n = 1$ (7) ersetzen durch die Forderung, daß $a_n\, n^{1-\frac{1}{c}}$ entweder divergiert oder gegen 0 konvergiert.

Zum Schluß sei noch auf einen verwandten Satz von S. Izumi [5]) hingewiesen, der jedoch die hier behandelten Fälle nicht einschließt. Derselbe kann in unseren Bezeichnungen folgendermaßen formuliert werden:

Es sei γ_n eine Folge positiver Zahlen und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ divergent. Dann folgt aus $s_n + \gamma_n a_n \to s$, daß $s_n \to s$ strebt.

Danach folgt z. B. aus $s_n + n a_n \to s$, daß $s_n \to s$ strebt, ohne daß weitere Voraussetzungen über die a_n gemacht werden.

---

[5]) S. Izumi, A Theorem on Limits and its Applications, Tôhoku Math. Journal 33 (1931), S. 181—186.

(Eingegangen am 14. Juli 1939.)

Beweis eines Fundamentalsatzes der Kurven 3. Ordnung.

Von

Karl Kommerell in Tübingen.

Im Band 45 dieser Zeitschrift, S. 312ff., beweist Herr Kapferer einen Satz für Kurven 3. Ordnung, in der Annahme, daß für diesen Satz in der Literatur kein einwandfreier Beweis existiere. Nun hat aber, wie mir Herr Bieberbach brieflich mitgeteilt hat, H. S. White in seinem 1925 erschienenen Buche „Plane curves of the third order", S. 18, den in Frage stehenden Satz richtig formuliert und bewiesen.

Ich habe davon H. Kapferer benachrichtigt und ihm bei dieser Gelegenheit mitgeteilt, daß ich mehrere Jahre vor dem Erscheinen des Buches von White in meiner Vorlesung über algebraische Kurven den Satz richtig formuliert und bewiesen habe. Da dieser Beweis elementarer als der des H. Kapferer ist und mir für Vorlesungen geeignet scheint, so möge er jetzt veröffentlicht werden.

Satz. *Liegen von acht Punkten keine sieben auf einem Kegelschnitt, und keine vier in einer Geraden, so ist dadurch ein Büschel von Kurven 3. Ordnung definiert, und alle Kurven des Büschels haben noch einen einzigen neunten Punkt gemein.*

Beweis. Daß die Voraussetzungen, die in dem Satz ausgesprochen sind, notwendig sind, liegt auf der Hand: denn liegen sieben der Punkte auf einem Kegelschnitt, so enthält jede Kurve 3. Ordnung durch die acht Punkte alle Punkte des Kegelschnitts, da eine nicht zerfallende Kurve 3. Ordnung mit einem Kegelschnitt nur sechs Punkte gemein haben kann. Ebenso enthält eine Kurve 3. Ordnung, welche durch vier in gerader Linie liegende Punkte geht, alle Punkte der Geraden.

Jene acht Punkte, von denen wir also voraussetzen, daß sie *nicht* jene besondere Lage haben, würden nur dann nicht ein Büschel, sondern eine höhere Mannigfaltigkeit von Kurven 3. Ordnung definieren, wenn die entsprechenden acht Gleichungen zwischen den Koeffizienten der allgemeinen Kurvengleichung nicht unabhängig sind, sondern wenn mindestens eine Gleichung eine Folge der übrigen wäre, d. h., wenn alle Kurven 3. Ordnung, welche durch sieben der Punkte gehen — etwa die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 —, von selbst den achten Punkt (8) enthalten würden. Durch je fünf der Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 kann man eine Kurve 2. Ordnung und durch die zwei übrigen eine Gerade legen: beide zusammen bilden eine Kurve 3. Ordnung, und der Punkt 8

müßte auf dem Kegelschnitt oder auf der Geraden liegen, wenn, *wie wir jetzt voraussetzen wollen, alle Kurven* 3. *Ordnung durch* 1, 2, 3, 4. 5, 6, 7 *von selbst durch* 8 *hindurchgingen.* Wir betrachten zwei Fälle:

1. Fall. *Punkt* 8 *liegt mit fünf der Punkte* 1, 2 . . ., 7, *sagen wir mit* 1, 2, 3, 4, 5, *auf einem Kegelschnitt* K_1, dann liegen nach der Voraussetzung des Satzes die Punkte 6 und 7 nicht auf K_1. Jetzt betrachten wir den Kegelschnitt K_2 durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 6; er geht nicht durch 8, sonst wäre er mit K_1 identisch, und auch 5 läge auf K_2, also im ganzen die sieben Punkte 1, 2, 3, 4, 6, 8, 5 — gegen die Voraussetzung des Satzes. 8 liegt also nicht auf K_2. Der Punkt 7 liegt auch nicht auf K_2; denn sonst würde K_2, der 1, 2, 3, 4, 6, 7 enthält, zusammen mit einer beliebigen Geraden durch 5 eine Kurve 3. Ordnung bilden: diese müßte durch 8 gehen, und da 8 nicht auf K_2 liegt, so müßte 8 auf der beliebigen Geraden durch 5 liegen, was nicht sein kann. Darum liegen also 5, 7, 8 nicht auf K_2. K_2 und die Gerade 5, 7 bilden zusammen eine Kurve 3. Ordnung, welche durch 8 geht: *darum liegen die Punkte* 5, 7, 8 *auf einer Geraden.* Ebenso betrachten wir den Kegelschnitt K_3 durch die Punkte 1, 2, 3, 5, 6; durch dieselben Schlüsse findet man, daß die Punkte 4, 7, 8 nicht auf K_3 liegen, sondern auf einer Geraden — man braucht ja nur in dem vorhergehenden Raisonnement 4 mit 5 zu vertauschen. Das Ergebnis ist also, *daß die Punkte* 5, 7, 8 *und die Punkte* 4, 7, 8 *je auf einer Geraden liegen*, d. h. 4, 5, 7, 8 liegen auf einer Geraden, was aber der Voraussetzung des Satzes widerspricht. Der erste Fall kann also nie eintreten.

2. Fall. *Der Punkt* 8 *liegt nie mit irgend fünf der Punkte* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *auf einem Kegelschnitt.*

Nun betrachten wir den Kegelschnitt K_4 durch die fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5; von den Punkten 6 und 7 kann höchstens einer auf K_4 liegen, wegen der Voraussetzung des Satzes. Liegt etwa 6 auf ihm, so würde K_4 zusammen mit einer beliebigen Geraden durch 7 eine Kurve 3. Ordnung durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bilden, auf der 8 liegen müßte; da nun 8 nicht auf K_4 liegt, so würde 8 auf der beliebigen Geraden durch 7 liegen, was nicht sein kann. Der Punkt 6 liegt also nicht auf K_4 und ebensowenig der Punkt 7. K_4 zusammen mit 6, 7 bilden wieder eine Kurve 3. Ordnung durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, auf der auch 8 liegen müßte. *Also* 6, 7, 8 *bilden eine Gerade.* Endlich betrachten wir den Kegelschnitt K_5 durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 6, dann findet man, wenn in dem Vorhergehenden überall 5 durch 6 ersetzt wird, *daß auch die Punkte* 5, 7, 8 *eine Gerade bilden.* Es würden also die vier Punkte 5, 6, 7, 8 gegen die Voraussetzung des Satzes auf einer Geraden liegen.

Somit tritt weder der erste noch der zweite Fall ein: Es ist darum unmöglich, daß alle Kurven 3. Ordnung durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 von selbst durch 8 hindurchgehen, wie wir oben vorausgesetzt haben. Jene acht Gleichungen zwischen den Koeffizienten sind also unabhängig, und von den neun Koeffi-

zienten der allgemeinen Gleichung für eine Kurve 3. Ordnung *bleibt einer, aber auch nur einer willkürlich*; d. h. *durch jene acht Punkte ist ein Büschel, und keine höhere Mannigfaltigkeit von Kurven 3. Ordnung bestimmt.*

Jetzt zeigen wir noch, daß alle Kurven des Büschels einen *einzigen* weiteren neunten Punkt außer den acht Basispunkten gemeinsam haben. Das Kurvenbüschel wird durch eine Gleichung von der Form

$$\varkappa f + \lambda \varphi = 0 \tag{1}$$

definiert sein, wo f und φ homogene Polynome 3. Grades in den homogenen Koordinaten x, y, t und $\varkappa, \lambda$ Parameter sind. Die Koeffizienten der Glieder in f und φ sind Konstanten. Die Polynome f und φ haben weder einen linearen noch einen quadratischen Faktor in x, y, t, gemein. Denn im ersten Falle hätte man statt (1)

$$L(\varkappa K_1 + \lambda K_2) = 0, \tag{2}$$

wobei L linear, K_1 und K_2 quadratisch in x, y, t sind, und wo K_1 und K_2 keinen Linearfaktor gemein haben. Nun haben $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$, die zwei voneinander verschiedene Kurven 2. Ordnung darstellen, nur vier Punkte gemein, und darum müßten die übrigen vier der acht Basispunkte auf der Geraden $L = 0$ liegen, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist. Ebensowenig haben f und φ einen quadratischen Faktor K gemein; denn man hätte dann statt (1)

$$K(\varkappa L_1 + \lambda L_2) = 0. \tag{3}$$

Die Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, die voneinander verschieden sind, haben nur einen Punkt gemein: die sieben anderen der acht Basispunkte müßten darum auf dem Kegelschnitt $K = 0$ liegen, was der Voraussetzung des Satzes widerspricht. Die Fälle (2) und (3), wo alle Kurven des Büschels unendlich viele gemeinsame Punkte haben, sind so ausgeschlossen. Nach (1) haben jetzt $f = 0$ und $\varphi = 0$ neun und nur neun Punkte gemein, und alle Kurven des Büschels haben einen einzigen neunten Punkt außer den acht Basispunkten gemein: der Satz ist also bewiesen.

(Eingegangen am 18. Juli 1939.)

Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. I.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Im folgenden wird die Eigenwertaufgabe

$$L(y) = \lambda g(x)\, y; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ behandelt. Dabei ist $L(y)$ der selbstadjungierte Differentialausdruck

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} [f_\nu(x)\, y^{(\nu)}]^{(\nu)},$$

$n = 2m$, $f_m \not\equiv 0$ und jedes f_ν ν-mal stetig differenzierbar; $g(x)$ stetig, $\not\equiv 0$ und darf sein Vorzeichen wechseln, d. h. es darf der sogenannte polare Fall vorliegen;

$$U_\mu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} [\alpha_\mu^{(\varkappa)}\, y^{(\varkappa)}(a) + \beta_\mu^{(\varkappa)}\, y^{(\varkappa)}(b)],$$

$\alpha_\mu^{(\varkappa)}, \beta_\mu^{(\varkappa)}$ sind gegebene reelle Zahlen, und die Matrix der $\alpha_\mu^{(\varkappa)}, \beta_\mu^{(\varkappa)}$ hat den Rang n. Die Eigenwertaufgabe soll selbstadjungiert und definit sein, d. h. es soll [1])

$$\int y\, L(y)\, dx \geqq 0 \tag{2}$$

gelten für jede n-mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$, welche die Randbedingungen von (1) erfüllt [2]); ferner soll $\lambda = 0$ kein Eigenwert sein [3]). Diese Voraussetzungen sollen im folgenden stets erfüllt sein.

Unter diesen Voraussetzungen sind bekanntlich alle Eigenwerte reell [4]); ferner gibt es höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte, sie können also numeriert werden, und die Eigenwerte haben keinen im Endlichen ge-

---

[1]) Alle in dieser Arbeit vorkommenden Integrale sind zwischen den Grenzen a und b zu bilden, d. h. es ist stets $\int = \int_a^b$.

[2]) Für gewisse Klassen von Eigenwertaufgaben kann man leicht feststellen, daß diese Bedingung erfüllt ist; vgl. dazu die Anmerkung am Ende von § 2.

[3]) Diese Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn statt (2) sogar $\int y\, L(y)\, dx > 0$ für $y(x) \not\equiv 0$ gilt. Denn ist $\psi_0(x)$ eine zu dem Eigenwert λ_0 gehörige Eigenfunktion, so ist dann $0 < \int \psi_0\, L(\psi_0)\, dx = \lambda_0 \int g\, \psi_0^2\, dx$, also $\lambda_0 \neq 0$.

[4]) Für den Beweis spaltet man die Eigenwerte und Eigenfunktionen in Real- und Imaginärteile auf und wendet auf diese die Greensche Formel an.

legenen Häufungspunkt[5]). Diese leicht beweisbaren Tatsachen werden hier als bekannt vorausgesetzt.

Weiter gilt folgendes: Wenn es für die Eigenwertaufgabe (1) überhaupt Eigenfunktionen gibt, gilt für jede Eigenfunktion $\psi(x)$

$$\int g\,\psi^2\,dx \neq 0, \tag{3}$$

und es gibt ein vollständiges Repräsentantensystem von Eigenfunktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ mit der Eigenschaft, daß die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int g\,\psi_p\,\psi_q\,dx = 0 \text{ für } p \neq q$$

besteht und jede zu einem Eigenwert λ_0 gehörige Eigenfunktion als lineare Komposition der endlich vielen ψ_p des obigen Systems darstellbar ist, die zu demselben Eigenwert λ_0 gehören. Gehört zu ψ_p der Eigenwert λ_p, so folgt aus (1)

$$0 \leqq \int \psi_p\,L(\psi)\,dx = \lambda_p \int g\,\psi_p^2\,dx.$$

Da alle Eigenwerte von Null verschieden sind und (3) besteht, können die Eigenfunktionen daher so normiert werden, daß

$$\int g\,\psi^2\,dx = \varepsilon_p \text{ mit } \varepsilon_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} = \pm 1$$

ist. Man hat dann ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen. Diese Tatsachen sind ebenfalls ohne Schwierigkeiten zu beweisen. Sie werden im folgenden jedoch nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern nebenbei mitbewiesen werden.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist der Beweis für die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und für einen Entwicklungssatz.

Für den Fall, daß $g \neq 0$ ist, besteht die bekannteste Beweismethode darin, daß die Eigenwertaufgabe, die in diesem Falle nicht definit zu sein braucht, auf eine orthogonale Integralgleichung zurückgeführt wird. Für „reguläre" Eigenwertaufgaben, die weder definit noch selbstadjungiert zu sein brauchen, hat G. D. Birkhoff[6]) eine auf funktionentheoretischer Grundlage beruhende Methode entwickelt. Weiter hat G. A. Bliss[7]) für selbstadjungierte Eigenwertaufgaben bei Systemen von Differentialgleichungen

[5]) Die Eigenwerte sind nämlich die Nullstellen der charakteristischen Determinante, und diese ist eine ganze Funktion von λ.

[6]) Transactions of the american mathematical society **9** (1908), S. 373—395; Rendiconti del circolo matematico di Palermo **36** (1913), S. 115—126. Für Einwände und Ergänzungen s. auch J. Tamarkine, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **34** (1912), S. 345—382; O. Perron, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Klasse, Abt. A, Jahrg. 1919, 6. Abhandl., S. 25f. Die Untersuchungen von Birkhoff sind weitergeführt durch M. H. Stone, Transactions of the american mathematical society **28** (1926), S. 695—761.

[7]) Transactions of the american mathematical society **28** (1926), S. 561—584.

eine Methode auseinandergesetzt, die von den genannten Methoden verschieden ist, bei der aber nicht unmittelbar ersichtlich ist, welche Resultate sie bei der hier zu behandelnden Eigenwertaufgabe bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung liefert. Dasselbe gilt für die auf den Prinzipien der Variationsrechnung beruhende Methode von W. T. Reid [8]), die von diesem ebenfalls für Systeme von Differentialgleichungen auseinandergesetzt ist.

Für den Fall, daß $g(x)$ sein Vorzeichen wechseln darf, scheint bisher nur die Methode bekannt zu sein, die in der Zurückführung der Eigenwertaufgabe auf eine polare Integralgleichung besteht [9]).

Hier sollen beide Fälle — g hat ein festes Vorzeichen, und g wechselt sein Vorzeichen — gemeinsam durch Verwendung des für die numerische Berechnung von Eigenwerten viel benutzten Variationsprinzips behandelt werden. Das bedeutet gegenüber der Reduktion auf Integralgleichungen eine wesentliche Verkürzung und Vereinfachung des Beweises. Für Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung ist diese Methode bereits mehrfach zu Existenzbeweisen verwendet worden [10]). Dagegen scheint der allgemeine Fall mit ihr bisher noch nicht behandelt zu sein, auch nicht für Funktionen $g(x)$, die ein festes Vorzeichen haben.

§ 1 enthält Hilfssätze; § 2 den Beweis für die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und eines vollständigen normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen; § 3 den Entwicklungssatz und weitere Sätze über Reihen, die nach Eigenfunktionen fortschreiten; in § 4 werden die Eigenwerte nach Courant durch ein Maximum-Minimum-Prinzip festgelegt, und es wird der Einfluß untersucht, den eine Vergrößerung von $g(x)$ auf die Eigenwerte hat; in § 5 wird das Verfahren von Ritz-Galerkin für die genäherte Berechnung der Eigenwerte dargestellt, und es werden damit Abschätzungen der Eigenwerte nach oben bewiesen.

---

[8]) W. T. Reid, American journal of mathematics **54** (1932) 769—790; Transactions of the american mathematical society **44** (1938) 508—521.

[9]) D. Hilbert, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-naturw. Klasse, Jahrg. 1906, S. 473; E. Kamke, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 706—718. S. jedoch auch Fußnote [10]).

[10]) E. Holmgren, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **1** (1903), S. 401—417; Holmgren bemerkt S. 403, Fußnote [3]), daß hierbei $g \neq 0$ nicht wesentlich sei; er behandelt jedoch nur die Differentialgleichung $y'' = \lambda g(x) y$ mit Sturmschen Randbedingungen und mit den Randbedingungen der Periodizität. Ch. M. Mason, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Diss. Göttingen 1903; Transactions of the american mathematical society **7** (1906), S. 337—360; **8** (1907), S. 427—432. R. G. D. Richardson, Math. Annalen **68** (1910), S. 279—304; die Lösbarkeit der Variationsaufgabe wird jedoch aus der Theorie der Integralgleichungen entnommen. Für partielle Differentialgleichungen s. D. Hilbert, ebenda **59** (1904), S. 161—186; R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, Berlin 1937, Kapitel 7.

§ 1.

Bezeichnungen und Hilfssätze.

Im folgenden bedeuten durchweg $u(x)$ und $v(x)$ Funktionen, die für $a \leqq x \leqq b$ n-mal stetig differenzierbar sind und die Randbedingungen von (1) erfüllen [11]). Wird von einer *beliebigen* Funktion $u(x)$ oder $v(x)$ gesprochen, so ist stets eine beliebige Funktion dieser Art gemeint. Nach der Greenschen Formel ist für diese Funktionen

I. $$\int u\,L(v)\,dx = \int v\,L(u)\,dx.$$

II. Da $\lambda = 0$ kein Eigenwert von (1) ist, gibt es zu (1) eine Greensche Funktion $G(x, \xi) = G(\xi\ x)$. Wird

$$L(u) = w(x)$$

gesetzt, so ist daher u eine Lösung der Randwertaufgabe

$$L(y) = w(x); \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

und

$$u(x) = \int G(x, \xi)\, w(\xi)\, d\xi.$$

Schließlich sei an die Cauchy-Schwarzschen Ungleichungen erinnert:

III. $$(\Sigma \sigma_\nu \tau_\nu)^2 \leqq \Sigma \sigma_\nu \cdot \Sigma \tau_\nu, \quad \left(\int \sigma(x)\,\tau(x)\,dx\right)^2 \leqq \int \sigma^2\,dx \cdot \int \tau^2\,dx.$$

Diese Dinge werden im folgenden wiederholt benutzt, ohne daß jedes Mal ausdrücklich hierauf hingewiesen wird.

Zur Abkürzung wird weiter gesetzt:

$$(4) \qquad \begin{cases} J(u) = \int u\,L(u)\,dx, & J(u,v) = \int u\,L(v)\,dx = J(v,u), \\ K(u) = \int g\,u^2\,dx, & K(u,v) = \int g\,u\,v\,dx = K(v,u). \end{cases}$$

IV. $$\int u^2\,dx \leqq \frac{1}{\varkappa} \int u\,L(u)\,dx,$$

wo $\varkappa$ der kleinste Eigenwert der Eigenwertaufgabe

$$(5) \qquad L(y) = \lambda y; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

ist [12]).

---

[11]) Funktionen dieser Art sollen auch kurz als *zugelassene Funktionen* bezeichnet werden.

[12]) Da für jede Eigenfunktion y_0 von (5) mit dem Eigenwert λ_0

$$0 \leqq \int y_0\,L(y_0)\,dx = \lambda_0 \int y_0^2\,dx$$

ist, ist $\lambda_0 > 0$, also ist, da die Zahl 0 nicht Eigenwert von (1) und somit auch nicht von (5) ist, jeder Eigenwert von (5), insbesondere also auch $\varkappa > 0$.

Beweis[13]). Für den Beweis kann $u \not\equiv 0$ angenommen werden. Es wird

$$\varrho = \frac{\int u L(u)\, dx}{\int u^2\, dx}$$

gesetzt. Ist ϱ ein Eigenwert, so ist sicher $\varrho \geqq \varkappa$. Es sei also ϱ kein Eigenwert von (5). Dann ist zu beweisen, daß zwischen 0 und ϱ ein Eigenwert von (5) liegt. Es ist

$$\eta(x) = L(u) - \varrho u \not\equiv 0,$$

und die Randwertaufgabe

$$L(v) - \lambda v = \eta(x); \quad U_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

hat für jedes λ, das kein Eigenwert ist, genau eine Lösung $v = v(x, \lambda)$, und diese hängt für alle derartigen λ stetig von λ ab; ferner ist $v(x, \varrho) = u(x)$. Wird für diese λ

$$h(\lambda) = \int [v L(v) - \lambda v^2]\, dx = \int v \eta\, dx \tag{7}$$

gesetzt, so ist für je zwei derartige λ_1, λ_2

$$h(\lambda_2) - h(\lambda_1) = \int (v_2 - v_1)\, \eta\, dx \text{ mit } v_\nu = v(x, \lambda_\nu).$$

Aus (6) folgt mit I

$$\int (v_2 - v_1)\, \eta\, dx = (\lambda_2 - \lambda_1) \int v_1 v_2\, dx,$$

also

$$h(\lambda_2) - h(\lambda_1) = (\lambda_2 - \lambda_1) \int v_1 v_2\, dx$$

und daher

$$h'(\lambda) = \int v^2\, dx > 0$$

für jedes λ, das kein Eigenwert ist. Wäre nun die Behauptung falsch, d. h. wäre keine der Zahlen $0 \leqq \lambda \leqq \varrho$ ein Eigenwert, so wäre

$$h'(\lambda) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \lambda \leqq \varrho.$$

Nach dem ersten Teil von (7) ist aber

$$h(0) = \int v L(v)\, dx \geqq 0 \text{ und } h(\varrho) = \int [u L(u) - \varrho u^2]\, dx = 0,$$

womit der gewünschte Widerspruch erreicht ist.

V. $$|K(u)| \leqq \int |g|\, u^2\, dx \leqq A J(u),$$

wo A eine von u nicht abhängende Zahl ist.

Denn nach IV ist

$$\int |g|\, u^2\, dx \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} |g(x)| \int u^2\, dx \leqq A J(u)$$

[13]) Diesen Beweis entnehme ich der Arbeit von L. Collatz, Zeitschr. f. angew. Mathematik und Mechanik **19** (1939), S. 227 f.

mit

$$A = \frac{1}{\varkappa} \operatorname{Max} |g(x)|.$$

VI. $$|J(u,v)| \leqq \sqrt{J(u)\,J(v)}.$$

Denn für beliebige Zahlen α, β ist nach (2)

$$0 \leqq \int (\alpha u + \beta v) L(\alpha u + \beta v)\, dx$$
$$= \alpha^2 J(u) + 2\alpha\beta J(u,v) + \beta^2 J(v),$$

d. h. die quadratische Form in α, β ist positiv semi-definit, also die Diskriminante $\geqq 0$, und das ist gerade die Behauptung.

VII. $$|K(u,v)| \leqq A \sqrt{J(u)\,J(v)},$$

wo A dieselbe Bedeutung wie in VI hat.

Denn, wird $V(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ gesetzt, so ist nach III und V

$$K^2(u,v) = \left(\int V(x) \sqrt{|g(x)|}\, u(x) \cdot \sqrt{|g(x)|}\, v(x)\, dx\right)^2$$
$$\leqq \int |g|\, u^2\, dx \cdot \int |g|\, v^2\, dx \leqq A\, J(u) \cdot A\, J(v).$$

VIII. Aus $J(u) = 0$ folgt $L(u) = 0$.

Denn mit VI folgt aus der Voraussetzung, daß

$$J(u,v) = \int v\, L(u)\, dx = 0$$

ist für beliebiges $v(x)$, und daraus ergibt sich die Behauptung.

Hiermit kann nun die in der Einleitung vorweggenommene Ungleichung (3) bewiesen werden:

IX. Für jede Eigenfunktion $\psi(x)$ von (1) ist

$$\int g\, \psi^2\, dx \neq 0.$$

Denn gehört ψ zum Eigenwert λ^*, so folgt aus der Differentialgleichung von (1)

$$\int \psi\, L(\psi)\, dx = \lambda^* \int g\, \psi^2\, dx.$$

Wäre die Behauptung für dieses ψ falsch, also die rechte Seite der Gleichung Null, so wäre nach VIII $L(\psi) = 0$, also nach (1) und weil die Eigenwerte nicht Null sind, $g\,\psi \equiv 0$. Da $g \not\equiv 0$ ist, wäre $\psi \equiv 0$ in einem Teilintervall von $\langle a, b\rangle$, also, da ψ Lösung einer Differentialgleichung ist, sogar $\psi \equiv 0$ im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$. Dann wäre aber ψ keine Eigenfunktion.

X. Es seien $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ n-mal stetig differenzierbare Funktionen, welche die Randbedingungen von (1) erfüllen und für die

(8) $$K(\psi_p, \psi_q) = 0 \quad \text{für} \quad p \neq q, \quad \text{aber} \quad K(\psi_p) \neq 0 \quad (p, q = 1, \ldots, k)$$

ist. Dann gibt es Funktionen $u(x)$, so daß

(9) $$J(u) = 1,\ K(u) \neq 0 \quad \text{und} \quad K(u, \psi_p) = 0 \quad (p = 1, \ldots, k)$$

ist. Ändert $g(x)$ in $\langle a, b\rangle$ sein Vorzeichen, so kann u außerdem noch so gewählt werden, daß $K(u)$ ein vorgeschriebenes Vorzeichen hat. Sind keine ψ_p gegeben, so gilt der Satz ebenfalls, und zwar in dem Sinne, daß dann nur alle Aussagen fortzulassen sind, die sich auf die ψ_p beziehen.

Beweis. Wechselt g in $\langle a, b\rangle$ sein Vorzeichen, so gibt es im Innern von $\langle a, b\rangle$ ein Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$, in dem je nach Verlangen $g > 0$ oder $g < 0$ ist; das Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ kann überdies so klein gewählt werden, daß

$$\sum_{p=1}^{k} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g|\, \psi_p^2\, dx \Big/ \left| \int_{a}^{b} g\, \psi_p^2\, dx \right| \right) < 1 \tag{10}$$

ist. Ändert g sein Vorzeichen nicht, so soll $\langle \alpha, \beta\rangle$ irgendein Intervall sein, für das (10) gilt und das im Innern von $\langle a, b\rangle$ liegt. Es sei weiter $u_0(x)$ irgendeine n-mal stetig differenzierbare Funktion, die > 0 für $\alpha < x < \beta$ und sonst $= 0$ ist. Diese Funktion erfüllt dann die Randbedingungen von (1), aber nicht die Differentialgleichung, da u_0 in einem Teilintervall von $\langle a, b\rangle$ identisch Null ist, also als Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung $\equiv 0$ im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ sein müßte. Wird

$$u = u_0 + \sum_{p=1}^{k} \varrho_p\, \psi_p$$

gesetzt, so ist nach (8)

$$\begin{aligned} K(u, \psi_p) &= \int g\, u_0\, \psi_p\, dx + \sum_q \varrho_q \int g\, \psi_p\, \psi_q\, dx \\ &= \int g\, u_0\, \psi_p\, dx + \varrho_p \int g\, \psi_p^2\, dx. \end{aligned}$$

Da nach dem zweiten Teil von (8) das letzte Integral $\neq 0$ ist, gibt es für jedes p genau eine Zahl ϱ_p, so daß

$$\int g\, u_0\, \psi_p\, dx + \varrho_p \int g\, \psi_p^2\, dx = 0, \quad \text{d. h.} \quad K(u, \psi_p) = 0 \tag{11}$$

ist.

Weiter ist

$$\begin{aligned} K(u) &= \int g \cdot (u_0 + \sum_p \varrho_p\, \psi_p)^2\, dx \\ &= \int g\, u_0^2\, dx + 2 \sum_p \varrho_p \int g\, u_0\, \psi_p\, dx + \sum_{p,q} \varrho_p\, \varrho_q \int g\, \psi_p\, \psi_q\, dx, \end{aligned}$$

also wegen (8) und (11)

$$K(u) = \int g\, u_0^2\, dx - \sum_p \frac{\left(\int g\, u_0\, \psi_p\, dx\right)^2}{\int g\, \psi_p^2\, dx}.$$

Da $u_0 = 0$ außerhalb (α, β) ist, ist dieses

$$K(u) = \int_{\alpha}^{\beta} g\, u_0^2\, dx - \sum_p \frac{\left(\int_{\alpha}^{\beta} g\, u_0\, \psi_p\, dx\right)^2}{\int_{a}^{b} g\, \psi_p^2\, dx}.$$

Da g in (α, β) ein festes Vorzeichen hat, ist nach III

$$\left(\int_\alpha^\beta g\, u_0\, \psi_p\, dx\right)^2 = \left(\int_\alpha^\beta \sqrt{|g|}\, u_0 \cdot \sqrt{|g|}\, \psi_p\, dx\right)^2$$

$$\leqq \int_\alpha^\beta |g|\, u_0^2\, dx \int_\alpha^\beta |g|\, \psi_p^2\, dx,$$

also bei Berücksichtigung von (10)

$$|K(u) - \int_\alpha^\beta g\, u_0^2\, dx| \leqq \int_\alpha^\beta |g|\, u_0^2\, dx \sum_p \frac{\int_\alpha^\beta |g|\, \psi_p^2\, dx}{\left|\int_a^b g\, \psi_p^3\, dx\right|}$$

$$< \int_\alpha^\beta |g|\, u_0^2\, dx.$$

Daher ist $K(u) \neq 0$ und hat dasselbe Vorzeichen wie g in (α, β).

Schließlich ist $J(u) > 0$, da sonst nach V auch $K(u) = 0$ sein müßte, während soeben $K(u) \neq 0$ festgestellt worden ist. Damit sind alle Behauptungen bis auf $J(u) = 1$ bewiesen. Durch Multiplikation von u mit einer geeigneten positiven Konstanten kann aber ohne Störung der übrigen Beziehungen erreicht werden, daß auch noch diese Gleichung erfüllt ist.

XI. Gibt es eine Zahl m, so daß für beliebiges $u(x)$

$$K(u) - m\, J(u) \geqq 0$$

(oder stets $\leqq 0$) ist, so ist für beliebige $u(x)$, $v(x)$

$$(12)\quad |J(u)K(u,v) - K(u)J(u,v)| \leqq J(u) \sqrt{J(v)} \sqrt{|K(u) - m\, J(u)|}\, \sqrt{|m| + 4A},$$

wo A die in V eingeführte Konstante ist.

Beweis. Für beliebige Zahlen α, β wird

$$U(x) = \alpha\, J(u)\, u + \beta\, [J(u)\, v - J(u, v)\, u]$$

gesetzt. Dann ist

$$J(U) = \int \{\alpha\, J(u)\, u + \beta [J(u)\, v - J(u, v)\, u]\}\, L\, \{\alpha\, J(u)\, u + \beta [J(u)\, v - J(u, v)\, u]\}\, dx.$$

Der Koeffizient von $\alpha\beta$ ist

$$2\, [J^2(u)\, J(u, v) - J^2(u)\, J(u, v)] = 0.$$

Daher ist $J(U)$ von der Gestalt

$$(13)\qquad J(U) = \alpha^2 J^3(u) + \beta^2 P;$$

dabei ist

$$\begin{aligned} P &= \int [J(u)\, v - J(u, v)\, u]\, L\, [J(u)\, v - J(u, v)\, u]\, dx \\ &= J^2(u)\, J(v) - 2\, J(u)\, J^2(u, v) + J(u)\, J^2(u, v) \\ &= J^2(u)\, J(v) - J(u)\, J^2(u, v). \end{aligned}$$

Die erste dieser Zeilen ergibt auf Grund von (2) die Abschätzung $P \geqq 0$, insgesamt hat man daher

$$0 \leqq P \leqq J^2(u)\, J(v).$$

Weiter ist

$$K(U) = \int \{\alpha J(u)\, u + \beta [J(u)\, v - J(u, v)\, u]\}^2 g\, dx \tag{14}$$
$$= \alpha^2 J^2(u)\, K(u) + 2\alpha\beta Q + \beta^2 R.$$

Dabei ist

$$Q = \int J(u)\, u\, [J(u)\, v - J(u, v)\, u]\, g\, dx$$
$$= J^2(u)\, K(u, v) - J(u)\, K(u)\, J(u, v).$$

$$R = \int [J(u)\, v - J(u, v)\, u]^2 g\, dx$$
$$= J^2(u)\, K(v) - 2 J(u)\, J(u, v)\, K(u, v) + J^2(u, v)\, K(u),$$

also nach V bis VII

$$|R| \leqq 4 A J^2(u)\, J(v).$$

Aus (13) und (14) ergibt sich

$$K(U) - m J(U) = \alpha^2 J^2(u)\, [K(u) - m J(u)] + 2\alpha\beta Q + \beta^2 (R - mP).$$

Da diese quadratische Form in α, β nach der Voraussetzung semidefinit ist, ist

$$Q^2 \leqq J^2(u)\, |K(u) - m J(u)|\, |R - mP|,$$

also

$$J^2(u)\, [J(u)\, K(u, v) - K(u)\, J(u, v)]^2 \leqq J^4(u)\, J(v)\, |K(u) - m J(u)|\, (|m| + 4A).$$

Ist $J(u) \neq 0$, so folgt hieraus unmittelbar die behauptete Ungleichung. Ist $J(u) = 0$, so ist nach V auch $K(u) = 0$, also die Behauptung ebenfalls richtig.

XII. Für alle $u(x)$, die der Ungleichung

$$J(u) \leqq B \tag{15}$$

genügen, sind die Funktionen

$$\bar{u}(x) = \int G(x, \xi)\, g(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \tag{16}$$

d. h. die Lösungen der Randwertaufgabe

$$L(y) = g(x)\, u(x), \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Zu jeder Folge von Funktionen

$$u_1(x), \; u_2(x), \ldots,$$

welche die Ungleichung (15) erfüllen, gibt es daher eine Teilfolge

$$u_{k_1}(x), \; u_{k_2}(x), \ldots,$$

so daß die zugehörige Folge

$$\bar{u}_{k_1}(x), \quad \bar{u}_{k_2}(x), \ldots$$

gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\bar{u}(x)$ konvergiert.

Beweis. Wird $V(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ gesetzt, so ergibt III

$$\bar{u}^2(x) = \left(\int G(x,\xi)\, V(\xi) \sqrt{|g(\xi)|} \cdot \sqrt{|g(\xi)|}\, u(\xi)\, d\xi\right)^2$$
$$\leqq \int G^2(x,\xi)\, |g(\xi)|\, d\xi \cdot \int |g(\xi)|\, u^2(\xi)\, d\xi.$$

Nach V und (15) ist das zweite Integral $\leqq A\, J(u) \leqq AB$. Da auch das erste Integral unter einer von u unabhängigen Schranke liegt, sind die $\bar{u}$ gleichmäßig beschränkt. Weiter ergibt sich entsprechend

$$[\bar{u}(x_2) - \bar{u}(x_1)]^2 \leqq \int [G(x_2,\xi) - G(x_1,\xi)]^2\, |g(\xi)|\, d\xi \cdot AB.$$

Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von u nicht abhängendes $\delta > 0$, so daß

$$|\bar{u}(x_2) - \bar{u}(x_1)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x_2 - x_1| < \delta$$

ist, d. h. die $\bar{u}$ sind gleichgradig stetig. Der Rest des Satzes folgt nun aus dem schon bewiesenen Teil nach einem Satze von Arzelà [14]).

§ 2.

Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und eines vollständigen normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen.

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen von* S. 759 *gibt es unendlich viele Eigenwerte.*

(a) *Ist* $g \geqq 0$, *so sind alle Eigenwerte positiv* [15]).

(b) *Wechselt* $g(x)$ *in* $\langle a, b\rangle$ *sein Vorzeichen, so gibt es sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Eigenwerte.*

Die Eigenwerte können also, wenn jeder Eigenwert in seiner Vielfachheit aufgeführt wird, als eine Folge

$$\ldots \leqq \lambda_{-2} \leqq \lambda_{-1} < (0) < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \tag{18}$$

geschrieben werden [16]), *die im Falle* (a) *nur die Glieder mit positivem Index enthält.*

Zu diesen Eigenwerten gibt es ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen [17])

$$\ldots, \psi_{-2}(x), \psi_{-1}(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \tag{19}$$

---

[14]) Vgl. z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 60f.

[15]) Der Fall $g \leqq 0$ läßt sich auf den obigen zurückführen, indem man λ durch $-\lambda$ ersetzt, und wird daher nicht besonders behandelt.

[16]) Die Zahl 0 ist nach Voraussetzung kein Eigenwert und daher eingeklammert.

[17]) Vgl. hierzu die Einleitung.

für das

$$\int_a^b g(x)\,\psi_p(x)\,\psi_q(x)\,dx = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\,e_{pq} \tag{20}$$

($e_{pq} = 1$ *für* $p = q$ *und* 0 *für* $p \neq q$) *gilt.*

Beweis. Nach X gibt es zugelassene Funktionen $u(x)$, für die $J(u) = 1$ ist. Nach V ist $K(u)$ für alle derartigen u beschränkt. Es sei m_1 die untere, M_1 die obere Grenze dieser Integrale. Nach X gibt es, falls $g \geqq 0$ ist, zugelassene Funktionen u, für die $K(u) > 0$ ist; ferner ist in diesem Falle offenbar stets $K(u) \geqq 0$. Es gilt also

(a) $$0 \leqq m_1 \leqq M_1 \quad \text{und} \quad M_1 > 0, \quad \text{falls} \quad g \geqq 0 \text{ ist.}$$

Wechselt g sein Vorzeichen, so gibt es nach X zugelassene Funktionen, für die $K(u)$ positiv ist, und auch zugelassene Funktionen, für die $K(u)$ negativ ist. Daher ist

(b) $$m_1 < 0 < M_1, \text{ falls } g \text{ sein Vorzeichen wechselt.}$$

Im Falle (a) sei $m = M_1$ und im Falle (b) eine beliebige der Zahlen m_1, M_1. Zu m gibt es dann eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Funktionen $u(x)$ der obigen Art, so daß $K(u_\nu) \to m$ ist, und nach XII gibt es unter den u_ν eine Teilfolge u_{p_ν}, so daß die Folge der zugehörigen $\bar{u}_{p_\nu}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\psi(x)$ konvergiert. D. h. es gibt zu m eine Folge von zugelassenen Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ sowie eine stetige Funktion $\psi(x)$ derart, daß

$$J(u_\nu) = 1, \quad K(u_\nu) \to m \tag{21}$$

und gleichmäßig in $a \leqq x \leqq b$

$$\bar{u}_\nu(x) = \int G(x,\xi)\,g(\xi)\,u_\nu(\xi)\,d\xi \to \psi(x) \tag{22}$$

ist.

Nach der Definition von m hat $K(u_\nu) - m\,J(u_\nu) = K(u_\nu) - m$ ein festes Vorzeichen. Man kann daher XI anwenden auf $u = u_\nu$ und die Lösung $v = v(x,s)$ der Randwertaufgabe

$$L(v) = G(s,x)\,g(x), \quad U_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n), \tag{23}$$

wo $a \leqq s \leqq b$ als Parameter anzusehen ist. Diese Lösung ist

$$v(x,s) = \int G(x,\xi)\,G(s,\xi)\,g(\xi)\,d\xi, \tag{24}$$

also sicher beschränkt. Daher ist auch

$$J(v) = \int v\,L(v)\,dx = \int v(x,s)\,G(s,x)\,g(x)\,dx$$

beschränkt. Die rechte Seite von (12) in XI hat somit nach dem zweiten Teil von (21) den Limes 0. Auf der linken Seite von (12) ist nach (24) und (22)

$$\begin{aligned} K(u_\nu, v) &= \int g(x)\, u_\nu(x)\, v(x,s)\, dx \\ &= \iint g(x)\, u_\nu(x) G(x,\xi) G(s,\xi) g(\xi)\, dx\, d\xi \\ &= \int G(s,\xi) g(\xi) \bar{u}_\nu(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} J(u_\nu, v) &= \int u_\nu L(v)\, dx = \int G(s,x) g(x) u_\nu(x)\, dx \\ &= \bar{u}_\nu(s) \to \psi(s) \end{aligned}$$

Schließlich ist nach (21) $K(u_\nu) \to m$. Daher ergibt (12) für $\nu \to \infty$

$$\int G(s,\xi) g(\xi) \bar{u}_\nu(\xi)\, d\xi - m\, \psi(s) \to 0.$$

Da (22) gleichmäßig gilt, folgt hieraus, wenn wieder x statt s geschrieben wird,

$$\int G(x,\xi) g(\xi) \psi(\xi)\, d\xi = m\, \psi(x).$$

Wird

$$\lambda_{-1} = \frac{1}{m_1}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{M_1}$$

gesetzt und werden die zugehörigen Funktionen ψ mit ψ_{-1}, ψ_1 bezeichnet [18]), so folgt aus der obigen Gleichung, daß $\psi_{\pm 1}$ Lösungen der Randwertaufgabe

$$L(\psi_{\pm 1}) = \lambda_{\pm 1} g\, \psi_{\pm 1}, \quad U_\mu(\psi_{\pm 1}) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

sind. Um schließen zu können, daß man damit Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) erhalten hat, muß man noch nachweisen, daß $\psi_{\pm 1} \not\equiv 0$ ist.

Dieser Nachweis kann so geführt werden: Wird in XI $u = u_\nu$, $v = \bar{u}_\nu$ gesetzt, so sind die Voraussetzungen von XI erfüllt. Die rechte Seite von (12) strebt wieder gegen Null; denn nach (17), III und V ist

$$\begin{aligned} J(v) &= \int \bar{u}_\nu L(\bar{u}_\nu)\, dx = \int g\, \bar{u}_\nu u_\nu\, dx \\ &\leqq \int \sqrt{|g|}\, |\bar{u}_\nu| \cdot \sqrt{|g|}\, |u_\nu|\, dx \\ &\leqq \left(\int |g|\, \bar{u}_\nu^2\, dx \cdot \int |g|\, u_\nu^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq \sqrt{A}\left(\int |g|\, \bar{u}_\nu^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

und dieses ist beschränkt, da die $\bar{u}_\nu$ gleichmäßig konvergieren. Auf der linken Seite von (12) ist

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \int g\, u_\nu u_\nu\, dx, \\ J(u, v) &= \int u_\nu L(\bar{u}_\nu)\, dx = \int g\, u_\nu^2\, dx = K(u_\nu) \to m. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\int g\, u_\nu \bar{u}_\nu\, dx \to m^2. \tag{25}$$

[18]) Im Falle (a) fällt λ_{-1} sowie ψ_{-1} fort.

Wird weiter in XI $u = u_\nu$ und v gleich der Lösung der Randwertaufgabe

$$L(v) = \bar{u}_\nu(x)\, g(x), \quad U_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

d. h.

$$v = v_\nu(x) = \int G(x, \xi)\, \bar{u}_\nu(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

gesetzt, so strebt die rechte Seite von (12) wiederum gegen Null, da

$$J(v_\nu) = \int v_\nu L(v_\nu)\, dx = \int v_\nu \bar{u}_\nu g\, dx$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $\bar{u}_\nu$ beschränkt ist. Auf der linken Seite ist

$$\begin{aligned} K(u_\nu, v_\nu) &= \int g(x)\, u_\nu(x)\, v_\nu(x)\, dx \\ &= \iint g(x)\, u_\nu(x)\, G(x, \xi)\, \bar{u}_\nu(\xi)\, g(\xi)\, dx\, d\xi \\ &= \int g(\xi)\, \bar{u}_\nu^2(\xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

also nach (22)

$$K(u_\nu, v_\nu) \to \int g(x)\, \psi^2(x)\, dx.$$

Mit Berücksichtigung von (25) ergibt sich weiter

$$J(u_\nu, v_\nu) = \int u_\nu L(v_\nu)\, dx = \int g\, u_\nu \bar{u}_\nu\, dx \to m^2.$$

Daher folgt aus XI jetzt

$$\int g(x)\, \psi^2(x)\, dx = m^3 \neq 0.$$

Die Funktionen $\psi_{\pm 1}$ sind somit Eigenfunktionen der Aufgabe (1) und

$$\lambda_{-1} < 0 < \lambda_1$$

zugehörige Eigenwerte, und zwar ist[19]) λ_1 der kleinste positive, λ_{-1} der dem absoluten Betrage nach kleinste negative Eigenwert. Denn andernfalls gäbe es einen Eigenwert $\lambda_0 \neq 0$, für den $\lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1$ ist[20]). Ist ψ_0 eine zu λ_0 gehörige Eigenfunktion, so ist dann nach (1) und IX

$$J(\psi_0) = \lambda_0 K(\psi_0) \neq 0.$$

Die Eigenfunktion ψ_0 kann also so normiert werden, daß $J(\psi_0) = 1$ ist, und dann wäre

$$K(\psi_0) = \frac{1}{\lambda_0} \begin{cases} > \dfrac{1}{\lambda_1} = M_1 \text{ für } \lambda_0 > 0, \\ < \dfrac{1}{\lambda_{-1}} = m_1 \text{ für } \lambda_0 < 0. \end{cases}$$

Das widerspräche aber der Definition von M_1 und m_1.

Die Existenz eines positiven Eigenwertes ist damit gesichert, und im Falle (b) auch die Existenz eines negativen Eigenwertes. Es soll nun gezeigt

[19]) Dieses ist für die praktische Berechnung der Eigenwerte wichtig.

[20]) Im Falle (*a*) ist hierin λ_{-1} durch 0 zu ersetzen.

werden, daß es unendlich viele positive und im Falle (b) auch unendlich viele negative Eigenwerte gibt. Dafür werden solche zugelassenen Funktionen betrachtet, für die

$$J(u) = 1 \quad \text{und} \quad K(u, \psi_1) = 0 \tag{26}$$

ist. Nach X gibt es solche Funktionen u, und sogar solche Funktionen u, für die $K(u) > 0$ ist. Nach V ist $K(u)$ beschränkt. Es existiert daher

$$M_2 = \overline{\text{fin}}\, K(u)$$

und ist positiv. Da hier die zugelassenen Funktionen u durch die zweite Bedingung von (26) noch weiter eingeschränkt sind, gilt überdies

$$0 < M_2 \leqq M_1.$$

Entsprechend wie vorher gibt es jetzt eine Folge von zugelassenen Funktionen $u_1, u_2, \ldots$, die (26) erfüllen und für die

$$K(u_\nu) \to M_2 \text{ und } \bar{u}_\nu(x) = \int G(x, \xi)\, g(\xi)\, u_\nu(\xi)\, d\xi \to \psi_2(x) \tag{27}$$

ist; dabei ist $\psi_2(x)$ eine stetige Funktion, und die letzte Limesbeziehung gilt gleichmäßig in $a \leqq x \leqq b$. Hieraus folgt wie vorher

$$\int G(x, \xi)\, g(\xi)\, \psi_2(\xi)\, d\xi = M_2\, \psi_2(x),$$

$$\int g(x)\, \psi_2^2(x)\, dx = M_2^3 \neq 0.$$

Daher ist ψ_2 eine Eigenfunktion der Aufgabe (1) und

$$\lambda_2 = \frac{1}{M_2} \geqq \lambda_1$$

ein Eigenwert. Aus dem zweiten Teil von (26) und dem zweiten Teil von (27) folgt weiter

$$0 = K(u_\nu, \psi_1) = \int g\, u_\nu\, \psi_1\, dx = \int \psi_1\, L(\bar{u}_\nu)\, dx$$

$$= \int \bar{u}_\nu\, L(\psi_1)\, dx \to \int \psi_2\, L(\psi_1)\, dx = \lambda_1 \int g\, \psi_2\, \psi_1\, dx.$$

Es ist also

$$\int g\, \psi_1\, \psi_2\, dx = 0 \tag{28}$$

und somit ψ_2 zu ψ_1 orthogonal, also von ψ_1 linear unabhängig. Ist $\lambda_2 > \lambda_1$, so ergibt sich wiederum wie vorher, daß zwischen λ_1 und λ_2 kein Eigenwert liegt.

Beim nächsten Schritt werden solche zugelassenen Funktionen betrachtet, für die

$$J(u) = 1 \quad \text{und} \quad K(u, \psi_p) = 0 \qquad (p = 1,2) \tag{29}$$

gilt, und es wird

$$M_3 = \overline{\text{fin}}\, K(u)$$

gesetzt. Da jetzt die zugelassenen Funktionen gegenüber dem vorigen Schritt noch weiter eingeschränkt sind, ergibt sich mit X

$$0 < M_3 \leqq M_2, \quad \text{also} \quad \lambda_3 = \frac{1}{M_3} \geqq \lambda_2.$$

Wie vorher ergibt sich die Existenz einer Eigenfunktion ψ_3, die zu ψ_1 und ψ_2 orthogonal, also von diesen linear unabhängig ist, und weiter, daß zwischen λ_2 und λ_3 kein Eigenwert liegt.

In dieser Weise kann man fortfahren. Es ergibt sich so die Existenz von unendlich vielen positiven Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen, und zwar bilden die erhaltenen Eigenfunktionen ein Orthogonalsystem. Man erhält bei diesem Verfahren so lange Eigenfunktionen, die zu demselben Eigenwert λ_p gehören, als es noch weitere linear unabhängige Eigenfunktionen gibt, die zu λ_p gehören. Man bekommt also ein vollständiges Repräsentantensystem der zu positiven Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen.

Liegt der Fall (b) vor, so kann man das Verfahren weiter auf m_1 statt M_1 anwenden. Dabei ist jetzt stets

$$m_p = \underline{\text{fin}}\, K(u)$$

zu setzen. Man erhält dann nach und nach die sämtlichen negativen Eigenwerte und ein vollständiges Repräsentantensystem der zu diesen gehörigen Eigenfunktionen; die erhaltenen Eigenfunktionen sind dabei wieder zueinander und, da Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, von selbst immer zueinander orthogonal sind, auch zu den vorher erhaltenen Eigenfunktionen orthogonal. Man hat damit ein vollständiges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen. Diese können schließlich, wie schon in der Einleitung gezeigt wurde, noch so normiert werden, daß (20) auch für $p = q$ erfüllt ist.

Die in dem Beweis auftretende Normierung $J(u) = 1$ ist zwar für den Beweis angenehm, aber nicht wesentlich. Verzichtet man auf sie, so hat man

$$M_p = \overline{\text{fin}}\, \frac{K(u)}{J(u)}, \qquad m_p = \underline{\text{fin}}\, \frac{K(u)}{J(u)}$$

zu setzen. Da der Beweis lehrt, daß diese Grenzen wirklich angenommen werden, kann das Verfahren, das zu den Eigenwerten führt, auch folgendermaßen beschrieben werden:

Satz 2. *Wechselt $g(x)$ sein Vorzeichen oder ist $g(x) \geqq 0$, so erhält man die positiven Eigenwerte, indem man nur solche zugelassenen Funktionen*[11]) *$y(x)$ betrachtet, für die*

$$\int_a^b g\, y^2\, dx > 0 \tag{30}$$

ist. Dann ist

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{y} \frac{\int_a^b y\,L(y)\,dx}{\int_a^b g\,y^2\,dx}. \tag{31}$$

Wird das Minimum für $y = \psi_1(x)$ angenommen, so ist ψ_1 eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion. Kennt man bereits die ersten Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ und ein zu diesen gehöriges Orthogonalsystem von Eigenfunktionen $\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$, so ist

$$\lambda_p = \operatorname*{Min}_{y} \frac{\int_a^b y\,L(y)\,dx}{\int_a^b g\,y^2\,dx}, \tag{32}$$

wobei jetzt solche zugelassenen Funktionen $y(x)$ zu betrachten sind, für die neben (30) *noch*

$$\int g\,y\,\psi_\nu\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1) \tag{33}$$

gilt. Wird das Minimum für $y = \psi_p(x)$ angenommen, so ist ψ_p eine zu λ_p gehörige und zu $\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$ orthogonale Eigenfunktion.

Wechselt $g(x)$ sein Vorzeichen, so erhält man die negativen Eigenwerte, indem man bei dem eben geschilderten Verfahren (30) *durch*

$$\int_a^b g\,y^2\,dx < 0, \tag{30a}$$

Min *durch* Max *und* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots$ *durch* $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots, \psi_{-1}, \psi_{-2}, \ldots$ *ersetzt.*

Anmerkung. Durch partielle Integration erhält man für n-mal stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$

$$\int_a^b y\,L(y)\,dx = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu f_\nu(x)\,[y^{(\nu)}]^2\,dx + [R(y)]_a^b$$

mit

$$R(y) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{p+q=r} (-1)^p\,[f_{r+1}\,y^{(r+1)}]^{(q)}\,y^{(p)}.$$

Hiermit lassen sich die Zähler in (31) und (32) noch in eine andere Gestalt bringen; ferner läßt sich in vielen Fällen die Voraussetzung (2) bequem bestätigen.

§ 3.

Über Reihen, die nach Eigenfunktionen fortschreiten.

Im folgenden sollen die $\psi_p(x)$ stets die Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen der Aufgabe (1) und die λ_p die zugehörigen Eigenwerte sein.

Satz 3. *Sind*

$$c_p = \varepsilon_p \int_a^b F(x)\, g(x)\, \psi_p(x)\, dx \qquad \left(\varepsilon_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\right) \tag{34}$$

die Fourier-Koeffizienten (in bezug auf die Eigenwertaufgabe (1)*) einer Funktion $F(x)$, die n-mal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen von* (1) *erfüllt, so konvergiert die folgende Reihe und erfüllt die Ungleichung*[20a])

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\lambda_p|\, c_p^2 \leqq \int_a^b F\, L(F)\, dx; \tag{35}$$

ferner besteht die Parsevalsche Gleichung

$$\int_a^b g(x)\, F^2(x)\, dx = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_p\, c_p^2. \tag{36}$$

Sind die γ_p die Fourier-Koeffizienten einer Funktion $\Phi(x)$ die ebenfalls n-mal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen von (1) *erfüllt, so ist auch noch*

$$\int_a^b g(x)\, F(x)\, \Phi(x)\, dx = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_p\, c_p\, \gamma_p. \tag{37}$$

Beweis. Es seien $h \leqq k$ beliebige ganze Zahlen. Nach der Voraussetzung (2) und I ist dann

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \int \Big(F - \sum_{p=h}^{k} c_p\, \psi_p\Big)\, L\Big(F - \sum_{p=h}^{k} c_p\, \psi_p\Big)\, dx \\ &= \int F\, L(F)\, dx - 2 \sum_p c_p \int F\, L(\psi_p)\, dx + \sum_{p,q} c_p\, c_q \int \psi_q\, L(\psi_p)\, dx, \end{aligned}$$

also, da

$$L(\psi_p) = \lambda_p\, g\, \psi_p$$

ist,

$$\int F\, L(F)\, dx \geqq 2 \sum_p c_p\, \lambda_p \int F\, g\, \psi_p\, dx - \sum_{p,q} c_p\, c_q\, \lambda_p \int g\, \psi_q\, \psi_p\, dx,$$

also nach (34) und (20)

$$\int F\, L(F)\, dx \geqq 2 \sum_p |\lambda_p|\, c_p^2 - \sum_p |\lambda_p|\, c_p^2 = \sum_p |\lambda_p|\, c_p^2.$$

Damit ist (35) bewiesen.

Weiter seien h, k beliebige positive ganze Zahlen. Wird

$$H(x) = F(x) - \sum_{p=-h}^{k} c_p\, \psi_p(x)$$

20a) Bei den Summen ist $p = 0$ auszulassen; ist im ganzen Intervall $g \geqq 0$ oder $g \leqq 0$, so soll p nur die ganzen positiven bzw. die ganzen negativen Zahlen durchlaufen. Entsprechendes gilt für die im Beweis vorkommenden Teilsummen sowie die in den Sätzen 4 und 5 vorkommenden Summen.

gesetzt, so ist für $1 \leqq q \leqq k$ nach (34) und (20)

$$K(H, \psi_q) = \int g H \psi_q \, dx = \int F g \psi_q \, dx - \sum_p c_p \int g \psi_p \psi_q \, dx$$
$$= \varepsilon_q c_q - \varepsilon_q c_q = 0,$$

d. h. $H(x)$ ist orthogonal zu $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Ist $J(H) > 0$, so ist daher nach Satz 2, (31) und (32)

$$\frac{J(H)}{K(H)} \geqq \lambda_{k+1} \quad \text{für} \quad K(H) > 0.$$

Entsprechend ist

$$K(H, \psi_q) = 0 \quad \text{für} \quad -h \leqq q \leqq -1$$

und daher, falls $J(H) > 0$ ist,

$$\frac{J(H)}{K(H)} \leqq \lambda_{-h-1} \quad \text{für} \quad K(H) < 0,$$

also für beliebiges $K(H)$

$$\frac{J(H)}{\lambda_{-h-1}} \leqq K(H) \leqq \frac{J(H)}{\lambda_{k+1}}.$$

Ist $J(H) = 0$, so ist nach V auch $K(H) = 0$, also diese Ungleichung wiederum richtig. Aus dem ersten Teil des Beweises kann entnommen werden, daß

$$J(H) = \int H L(H) \, dx = \int F L(F) \, dx - \sum_{p=-h}^{k} |\lambda_p| c_p^2 \leqq \int F L(F) \, dx,$$

also beschränkt ist. Da (vgl. die Einleitung) $|\lambda_p| \to \infty$ für $|p| \to \infty$ ist, folgt somit aus der obigen Ungleichung

$$K(H) \to 0 \quad \text{für} \quad h, \; k \to \infty.$$

Es ist aber

$$K(H) = \int g H^2 \, dx = \int [F - \sum_{p=-h}^{k} c_p \psi_p]^2 g \, dx$$
$$= \int g F^2 \, dx - 2 \sum_p c_p \int g F \psi_p \, dx + \sum_{p,q} c_p c_q \int g \psi_p \psi_q \, dx$$
$$= \int g F^2 \, dx - 2 \sum_p \varepsilon_p c_p^2 + \sum_p \varepsilon_p c_p^2$$
$$= \int g F^2 \, dx - \sum_{p=-h}^{k} \varepsilon_p c_p^2.$$

Damit ist (36) bewiesen. Wird hierin F durch $F + \Phi$ ersetzt, so hat man

$$\int g (F + \Phi)^2 \, dx = \sum \varepsilon_p (c_p + \gamma_p)^2$$

oder

$$\int g F^2 \, dx + 2 \int g F \Phi \, dx + \int g \Phi^2 \, dx = \sum \varepsilon_p c_p^2 + 2 \sum \varepsilon_p c_p \gamma_p + \sum \varepsilon_p \gamma_p^2.$$

Die ersten Glieder rechts und links stimmen nach (36) überein, ebenso die letzten Glieder rechts und links. Daher folgt aus der obigen Gleichung die Gleichung (37).

Satz 4. $\sum \frac{\psi_p^2(x)}{|\lambda_p|}$ *konvergiert und ist* $\leqq G(x,x)$; $\sum \frac{1}{|\lambda_p|}$ *konvergiert und ist* $\leqq \int_a^b G(x,x)\,|g(x)|\,dx$.

Beweis. Es sei $u(x)$ eine beliebige zugelassene Funktion [11]) ferner $v(x)$ die Lösung der Randwertaufgabe

$$L(v) = u(x), \quad U_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{38}$$

d. h.

$$v(x) = \int G(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi. \tag{39}$$

Für die Fourier-Koeffizienten

$$c_p = \varepsilon_p \int v\,g\,\psi_p\,dx \tag{40}$$

von v gilt nach Satz 3, (35)

$$\int v\,L(v)\,dx \geqq \Sigma\,|\lambda_p|\,c_p^2.$$

Nach (38) und (39) ist

$$\int v\,L(v)\,dx = \iint G(x,\xi)\,u(x)\,u(\xi)\,dx\,d\xi$$

und nach (40)

$$\begin{aligned}\Sigma\,|\lambda_p|\,c_p^2 &= \Sigma\,|\lambda_p|\,(\int v\,g\,\psi_p\,dx)^2\\ &= \Sigma\,\frac{1}{|\lambda_p|}\,(\int v\,L(\psi_p)\,dx)^2\\ &= \Sigma\,\frac{1}{|\lambda_p|}\,(\int \psi_p\,L(v)\,dx)^2\\ &= \Sigma\,\frac{1}{|\lambda_p|}\,(\int u\,\psi_p\,dx)^2,\end{aligned}$$

also für beliebige $h \leqq k$

$$\iint \Big\{G(x,\xi) - \sum_{p=h}^{k} \frac{\psi_p(x)\,\psi_p(\xi)}{|\lambda_p|}\Big\}\,u(x)\,u(\xi)\,dx\,d\xi \geqq 0.$$

Da $u(x)$ eine beliebige zugelassene Funktion ist, folgt hieraus

$$G(x,x) \geqq \sum_{p=h}^{k} \frac{\psi_p^2(x)}{|\lambda_p|},$$

womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist. Der zweite Teil ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\sum_{p=h}^{k} \frac{1}{|\lambda_p|} = \sum \frac{|\int g\,\psi_p^2\,dx|}{|\lambda_p|} &\leqq \int |g| \sum \frac{\psi_p^2}{|\lambda_p|}\,dx\\ &\leqq \int |g(x)|\,G(x,x)\,dx.\end{aligned}$$

Satz 5. *Ist $F(x)$ eine Funktion, die n-mal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen von* (1) *erfüllt, so konvergiert ihre Fourier-Reihe*

$$\sum c_p \psi_p(x) \quad mit \quad c_p = \varepsilon_p \int_a^b F(x) g(x) \psi_p(x) dx$$

absolut und gleichmäßig [21]. *Ist $g(x)$ in keinem Teilintervall von $\langle a, b\rangle$ identisch Null, so ist*

$$F(x) = \sum c_p \psi_p(x).$$

Beweis. Mit III und Satz 4 ergibt sich

$$\sum_{p=h}^{k} |c_p \psi_p(x)| = \sum_{p=h}^{k} \sqrt{|\lambda_p|}\, |c_p| \cdot \frac{|\psi_p(x)|}{\sqrt{|\lambda_p|}}$$

$$\leqq \sum_{p=h}^{k} |\lambda_p| c_p^2 \cdot \sum_{p=h}^{k} \frac{\psi_p^2(x)}{|\lambda_p|} \leqq G(x,x) \sum_{p=h}^{k} |\lambda_p| c_p^2,$$

also konvergiert $\sum |c_p \psi_p|$ gleichmäßig. Nach (37) ist für beliebiges $\Phi(x)$, das n-mal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen erfüllt,

$$\int g F \Phi dx - \sum \varepsilon_p c_p \gamma_p = 0$$

oder, wenn man die Werte der Fourier-Koeffizienten γ_p einträgt,

$$\int g \Phi [F - \sum c_p \psi_p] dx = 0$$

also, da das für beliebiges $\Phi(x)$ gilt,

$$F(x) - \sum c_p \psi_p(x) = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 4.

Abschätzung der Eigenwerte nach Courant.

Die Festlegung des p-ten Eigenwertes nach dem Verfahren des Satzes 2 in § 2 setzt voraus, daß man die zu den vorangehenden Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen bereits kennt. Für den Fall $g(x) > 0$ hat R. Courant [22] den p-ten Eigenwert durch ein Maximum-Minimumprinzip in einer solchen Weise festgelegt, daß jene Kenntnis nicht erforderlich ist. Dieses Verfahren läßt sich fast wörtlich auf den allgemeineren Fall übertragen und führt zu dem

[21] Es konvergiert sogar die Reihe $\sum |c_p \psi_p(x)|$ gleichmäßig.

[22] R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 351ff.

Satz 6. *Es seien* $w_1(x), \ldots, w_{p-1}(x)$ *irgendwelche Funktionen, für die* gw_ν *integrierbar*[23]) *ist. Mit diesen wird*

$$m(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \underset{y}{\operatorname{fin}} \frac{\int_a^b y L(y)\, dx}{\int_a^b g y^2\, dx}, \tag{41}$$

$$M(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \overline{\underset{y}{\operatorname{fin}}} \frac{\int_a^b y L(y)\, dx}{\int_a^b g y^2\, dx} \tag{42}$$

gebildet, wobei die $y(x)$ *beliebige zugelassene Funktionen sein dürfen, für welche die in* (41) *auftretenden Nenner positiv und die in* (42) *auftretenden Nenner negativ sind und für die außerdem*

$$\int g w_\nu y\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1) \tag{43}$$

ist. Dann gilt, falls g *sein Vorzeichen wechselt,*

$$m \leqq \lambda_p, \quad M \geqq \lambda_{-p}; \tag{44}$$

ist $g \geqq 0$, *so fällt die zweite Ungleichung fort.*

Werden nun noch die Funktionen $w_1, \ldots, w_{p-1}$ *variiert, so ist*

$$\begin{cases} \lambda_p = \operatorname{Max}_w m(w_1, \ldots, w_{p-1}), \\ \lambda_p = \operatorname{Min}_w M(w_1, \ldots, w_{p-1}). \end{cases} \tag{45}$$

Beweis. Für den Beweis des ersten Teiles des Satzes genügt es, eine Funktion $y(x)$ anzugeben, welche die oben angegebenen Eigenschaften besitzt und für welche die auf der rechten Seite von (41) und (42) stehenden Brüche $\leqq \lambda_p$ bzw. $\geqq \lambda_{-p}$ sind. Um eine solche Funktion y zu erhalten, bildet man

$$y = \sum_{q=1}^{p} a_q \psi_q(x),$$

wobei die ψ_q die frühere Bedeutung (vgl. § 2, Satz 1) haben. Dann ist

$$\int g y^2\, dx = \sum_{q,r=1}^{p} a_q a_r \int g \psi_q \psi_r\, dx = \sum_{q=1}^{r} a_q^2 > 0, \tag{46}$$

falls nicht alle a_q Null sind. Die Gleichungen (43) sind erfüllt, wenn die a_q den Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{p} a_q \int g w_\nu \psi_q\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

[23]) Der Satz bleibt bestehen, wenn man das Wort „integrierbar" durch „stetig" oder „n-mal stetig differenzierbar" ersetzt.

genügen. Dieses sind $p-1$ Gleichungen für p Unbekannte. Daher haben die Gleichungen eine Lösung, die nicht aus lauter Nullen besteht. Für diese Lösung ist dann

$$(47)\quad \int y\,L(y)\,dx = \sum_{q,\,r=1}^{p} a_q a_r \int \psi_q L(\psi_r)\,dx = \sum_{q,\,r} a_q a_r \lambda_r \int g\,\psi_q\,\psi_r\,dx$$

$$= \sum_{q=1}^{p} \lambda_q a_q^2 \leqq \lambda_p \sum_q a_q^2 = \lambda_p \int g\,y^2\,dx,$$

also der auf der rechten Seite von (41) stehende Bruch in der Tat $\leqq \lambda_p$. Damit ist die erste der Ungleichungen (44) bewiesen.

Für den Beweis der zweiten Ungleichung (44) setzt man

$$y = \sum_{q=1}^{p} a_q \psi_{-q}(x).$$

Es bleibt dann alles ungeändert bis auf (46) und (47). Statt dieser Gleichungen erhält man

$$\int g\,y^2\,dx = \sum a_q a_r \int g\,\psi_{-q}\,\psi_{-r}\,dx = -\sum_q a_q^2,$$

$$\int y\,L(y)\,dx = \sum_{q,\,r} a_q a_r \lambda_{-r} \int g\,\psi_{-q}\,\psi_{-r}\,dx$$

$$= -\sum_q \lambda_{-q} a_q^2 \leqq -\lambda_{-p} \sum_q a_q^2,$$

und daher ist der auf der rechten Seite von (42) stehende Bruch $\geqq \lambda_{-p}$.

Mit Hilfe des Satzes 6 ergibt sich nun leicht der folgende Abschätzungssatz:

Satz 7. *Es sei*

$$g^*(x) \geqq g(x)$$

und auch g^* stetig und $\not\equiv 0$; ferner seien λ_p^* die Eigenwerte der Aufgabe (1) *mit g^* statt g. Dann ist*

$$(48)\qquad \lambda_p^* \leqq \lambda_p \qquad (p = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

soweit diese Eigenwerte existieren[24]).

Beweis. Zunächst sei nicht ständig $g \leqq 0$. Dann gibt es für beide Eigenwertaufgaben unendlich viele positive Eigenwerte. Werden mit $y(x)$, $y^*(x)$ zugelassene Funktionen bezeichnet, für die

$$\int g\,y^2\,dx > 0 \quad \text{bzw.} \quad \int g^*\,y^{*2}\,dx > 0$$

ist, so ist mit

$$\int g\,y^2\,dx > 0 \quad \text{auch} \quad \int g^*\,y^2\,dx > 0,$$

---

[24]) Ist z. B. $g^* > 0$, während g sein Vorzeichen wechselt, so gibt es nur Eigenwerte λ_p^* mit positivem Index; die Ungleichungen (48) haben dann nur für positive p einen Sinn. Ist $g^* > 0$ und $g < 0$, so gibt es nur Eigenwerte λ_p^* mit positivem und λ_p mit negativem Index; in diesem Falle sagt der Satz gar nichts aus. Für $g > 0$ ist der obige Satz gerade der Satz 7 von Courant-Hilbert, a. a. O., S. 357.

d. h. jedes y ist zugleich ein y^*, d. h. der Bereich der Funktionen y ist enger als der Bereich der Funktionen y^*. Nach Satz 2 ist daher

$$\lambda_1^* = \operatorname*{Min}_{y^*} \frac{\int y^* L(y^*)\,dx}{\int g^* y^{*2}\,dx} \leqq \operatorname*{Min}_{y} \frac{\int y L(y)\,dx}{\int g^* y^2\,dx},$$

$$\leqq \operatorname*{Min}_{y} \frac{\int y L(y)\,dx}{\int g y^2\,dx} = \lambda_1.$$

Für die höheren Eigenwerte ergibt sich die Behauptung mit Satz 6. Es seien $w_1^*(x), \ldots, w_{p-1}^*(x)$ irgendwelche Funktionen, für die $g^* w_\nu^*$ integrierbar ist. Es werden dann Funktionen $w_\nu(x)$ so definiert, daß

$$g w_\nu = g^* w_\nu^*$$

ist. Für beliebige integrierbare Funktionen $y(x)$ ist dann

$$\int g w_\nu y\,dx = \int g^* w_\nu^* y\,dx. \tag{49}$$

Werden jetzt mit $y(x)$, $y^*(x)$ zugelassene Funktionen bezeichnet, für die

$$\int g y^2\,dx > 0 \quad \text{und} \quad \int g w_\nu y\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

bzw.

$$\int g^* y^{*2}\,dx > 0 \quad \text{und} \quad \int g^* w_\nu^* y^*\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1)$$

ist, so ist wegen (49) und $g^* \geqq g$ wieder jedes y zugleich ein y^* und daher nach Satz 6

$$m^*(w_1^*, \ldots, w_{p-1}^*) = \operatorname*{\underline{fin}}_{y^*} \frac{\int y^* L(y^*)\,dx}{\int g^* y^{*2}\,dx},$$

$$\leqq \operatorname*{\underline{fin}}_{y} \frac{\int y L(y)\,dx}{\int g^* y^2\,dx},$$

$$\leqq \operatorname*{\underline{fin}} \frac{\int y L(y)\,dx}{\int g y^2\,dx},$$

$$= m(w_1, \ldots, w_{p-1}) \leqq \lambda_p.$$

Da dieses für beliebige w_ν^* gilt, ist nach (45) in der Tat $\lambda_p^* \leqq \lambda_p$.

Damit ist die Behauptung für alle Eigenwerte mit positivem Index bewiesen. Der noch übriggebliebene Fall läßt sich auf diesen zurückführen, indem man g, g^*, λ, λ^* durch $-g$, $-g^*$, $-\lambda$, $-\lambda^*$ ersetzt. Die positiven Eigenwerte dieser neuen Eigenwertaufgaben sind dann gerade die $-\lambda_{-p}$, $-\lambda_{-p}^*$ der früheren Aufgaben. Da jetzt $-g \geqq -g^*$ ist, ergibt der schon bewiesene Teil des Satzes

$$-\lambda_{-p} \leqq -\lambda_{-p}^*.$$

Das ist aber gerade der Teil des Satzes, der noch zu beweisen war.

Aus Satz 7 folgt nun

Satz 8. *Sind* $\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 \leqq \ldots$ *die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe, die aus* (1) *entsteht, wenn man* $g(x)$ *durch* $|g(x)|$ *ersetzt, so ist*

$$\lambda_{-p} \leqq -\varkappa_p < 0 < \varkappa_p \leqq \lambda_p \text{ [25]}.$$

Beweis. Da

$$-|g(x)| \leqq g(x) \leqq |g(x)|$$

ist, und die Eigenwerte der mit $-|g|$ statt g gebildeten Aufgabe (1) die Zahlen $-\varkappa_p$ sind, folgt die Behauptung unmittelbar aus (48).

§ 5.

Das Näherungsverfahren von Ritz-Galerkin. Abschätzung der Eigenwerte nach oben.

Die ersten Eigenwerte der Aufgabe (1) können im Falle $g(x) \geqq 0$ bekanntlich nach Ritz-Galerkin genähert so berechnet werden, daß man von irgendeinem System von linear unabhängigen zugelassenen Funktionen $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ ausgeht.

$$\bar{y}(x) = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_\nu(x)$$

ansetzt und die a_ν so bestimmt, daß

$$\lambda = \frac{\int \bar{y} L(\bar{y})\, dx}{\int g \bar{y}^2\, dx}$$

ein Minimum wird. Man gelangt dabei zu einer algebraischen Gleichung n-ten Grades für λ, die lauter reelle Lösungen hat. Die kleinste Lösung ist der gesuchte Minimalwert, der mit $\bar{\lambda}_1$ bezeichnet sei. Da bei dieser Aufgabe die Menge der zugelassenen Funktionen $y(x)$ im Vergleich zu der Minimumsaufgabe (31) von § 2 stärker eingeschränkt ist, gilt $\bar{\lambda}_1 \geqq \lambda_1$. Hat die erwähnte algebraische Gleichung die Lösungen $\bar{\lambda}_1 \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_k$, so hat man, wie E. Trefftz [26]) bemerkt hat, damit zugleich obere Schranken für die ersten k Eigenwerte von (1) bekommen, d. h. es ist

$$\bar{\lambda}_p \geqq \lambda_p \qquad (p = 1, \ldots, k)$$

---

[25]) E. Garbe, Math. Annalen **76** (1915), S. 529, 542ff. hat für die Eigenwerte der orthogonalen und polaren Integralgleichungen mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen einen Satz aufgestellt, der nach Übertragung auf die hier behandelten Eigenwertaufgaben $\sum \frac{1}{|\lambda_p|} \leqq \sum \frac{1}{\varkappa_p}$ ergeben würde.

[26]) Math. Annalen **108** (1933), S. 595f. L. Collatz, Zeitschr. f. angew. Mathematik u. Mechanik **19** (1939), S. 237 hat einen Beweis skizziert, der zwar sehr suggestiv

Das Verfahren von Ritz läßt sich auf den Fall übertragen, daß $g(x)$ sein Vorzeichen wechselt. Ebenso bleibt die Entdeckung von Trefftz bei geeigneter Formulierung auch hier bestehen, und zwar gilt der

Satz 9. *Es sei*

$$u_1(x), \ldots, u_k(x)$$

ein System von zugelassenen Funktionen, für das die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_a^b g\, u_p u_q\, dx = 0 \qquad (p \neq q) \tag{50}$$

und außerdem die Ungleichung

$$\int_a^b g\, u_p^2\, dx > 0 \tag{51}$$

bestehen. Dann sind die Nullstellen der Determinante

$$D(\lambda) = \text{Det.} \left| \int_a^b u_p [L(u_q) - \lambda\, e_{pq}\, g\, u_q]\, dx \right| \tag{52}$$

$$(p, q = 1, \ldots, k;\ e_{pq} = 1 \text{ für } p = q \text{ und } 0 \text{ für } p \neq q)$$

sämtlich reell. Sind sie der Größe nach geordnet

$$\bar{\lambda}_1 \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_k,$$

so gilt

$$\bar{\lambda}_p \geqq \lambda_p \qquad (p = 1, \ldots, k). \tag{53}$$

Erfüllen die u_p statt (51) *die Ungleichung*

$$\int g\, u_p^2\, dx < 0 \tag{51a}$$

und sind dann

$$\bar{\lambda}_{-k} \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_{-1}$$

die Nullstellen von (52), *so ist*

$$\bar{\lambda}_{-p} \leqq \lambda_{-p}. \tag{53a}$$

---

wirkt, aber wohl doch noch näherer Ausführung bedarf. Der Beweis zu dem obigen Satz 9 beruht auf einem anderen Prinzip.

Zusatz bei der Korrektur: Die Bemerkung, daß $\bar{\lambda}_p \geqq \lambda_p$ ist, hat für die Eigenwertaufgabe

$$y'' + \lambda g(x)\, y = 0, \qquad y(-1) = y(1) = 0 \qquad (g > 0) \tag{*}$$

bereits N. Kryloff gemacht; Bulletin de l'académie des sciences de l'URSS, Classe des sciences physico-mathématiques, Leningrad 1929, S. 464. Das Beweisprinzip ist dort ein anderes. Das Beweisprinzip des obigen Textes findet sich für die Aufgabe (*) auch schon bei N. Kryloff, Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique = Mémorial des sciences mathématiques 49, Paris 1931, S. 31.

Beweis. Zunächst wird gezeigt, daß das in Satz 2 geschilderte Verfahren gerade auf die Nullstellen $\bar{\lambda}_p$ der Determinante $D(\lambda)$ führt, wenn statt der Funktionen $y(x)$ die Funktionen

$$\bar{y} = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_\nu(x) \qquad (\Sigma |a_\nu| > 0) \tag{54}$$

betrachtet werden[27]). Für diese Funktionen ist

$$\int \bar{y} L(\bar{y}) dx = \sum_{p,q} a_p a_q \int u_p L(u_q) dx \tag{55}$$

und wegen (50) und (51)

$$\int g \bar{y}^2 dx = \sum_{p,q} a_p a_q \int g u_p u_q dx = \sum_p a_p^2 \int g u_p^2 dx > 0. \tag{56}$$

Die a_p sollen nun so bestimmt werden, daß

$$\int \bar{y} L(\bar{y}) dx = \text{Min.} \tag{57}$$

wird, wobei die Nebenbedingung

$$\int g \bar{y}^2 dx = 1 \tag{58}$$

erfüllt sein soll. Wegen (2) ist diese Aufgabe lösbar. Die Regeln der Differentialrechnung ergeben die Gleichungen

$$\sum_q a_q \int u_p L(u_q) dx = \lambda a_p \int g u_p^2 dx \qquad (p = 1, \ldots, k) \tag{59}$$

Hieraus und aus (58) sind die a_p und λ zu bestimmen. Die linearen homogenen Gleichungen (59) für die a_p sind genau dann lösbar, wenn die Determinante der Koeffizienten Null ist, d. h. wenn λ eine Nullstelle von $D(\lambda)$ ist. Mit I ergibt sich, daß die Determinante symmetrisch ist, also nur reelle Nullstellen hat. Für jede solche Nullstelle ist das Gleichungssystem (59) dann lösbar und die Lösungen a_p können so normiert werden, daß für sie (58) erfüllt ist. Multipliziert man (59) mit a_p und addiert man dann die Gleichungen, so bekommt man nach (55), (56) und (58)

$$\int \bar{y} L(\bar{y}) dx = \lambda \int g \bar{y}^2 dx = \lambda,$$

und daraus ersieht man, daß alle Nullstellen von $D(\lambda)$ positiv sind und die kleinste Nullstelle $\bar{\lambda}_1$ der gesuchte Minimalwert ist. Aus der einleitenden Bemerkung dieses Paragraphen ergibt sich ferner, daß $\bar{\lambda}_1 \geqq \lambda_1$ ist.

Das eben durchgeführte Verfahren wird nun wiederholt, indem immer weitere Nebenbedingungen hinzugefügt werden. Ist

$$\bar{y}_1 = \sum_{p=1}^{k} a_p^{(1)} u_p$$

---

[27]) Dieser Teil des Beweises läuft auf eine wohlbekannte Transformation einer definiten quadratischen Form auf ihre Normalform hinaus.

eine Lösung der Aufgabe (57), so wird bei dem zweiten Schritt zu (58) noch die Nebenbedingung

$$\int g\,\bar{y}_1\,\bar{y}\,dx = 0$$

hinzugenommen.

Allgemein sei schon für ein $r < k$ folgendes bewiesen:

(A) Es gibt Zahlensysteme

$$a_1^{(\varrho)}, \ldots, a_k^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r),$$

so daß

$$\bar{y}_\varrho = \sum_{p=1}^{k} a_p^{(\varrho)} u_p$$

eine Lösung der Aufgabe (57) mit den Nebenbedingungen

$$\int g\,\bar{y}^2\,dx = 1; \quad \int g\,\bar{y}_\nu\,\bar{y}\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, \varrho - 1) \tag{60}$$

ist; ist

$$\bar{\lambda}_\varrho = \int \bar{y}_\varrho\,L(\bar{y}_\varrho)\,dx, \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

so ist

$$\bar{\lambda}_1 \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_r,$$

und diese Zahlen sind die r kleinsten Nullstellen von $D(\lambda)$; die $a_p^{(\varrho)}$ genügen den Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{k} a_q^{(\varrho)} \int u_p\,L(u_q)\,dx = \bar{\lambda}_\varrho\,a_p^{(\varrho)} \int g\,u_p^2\,dx \qquad (p = 1, \ldots, k). \tag{61}$$

Dann wird für die Funktionen (54) die Aufgabe (57) mit den Nebenbedingungen

$$\int g\,\bar{y}^2\,dx = 1; \quad \int g\,\bar{y}_\nu\,\bar{y}\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{62}$$

gebildet. Die Differentialrechnung liefert die Gleichungen

$$2\sum_{q=1}^{k} a_q \int u_p\,L(u_q)\,dx - 2\lambda\,a_p \int g\,u_p^2\,dx - \sum_{\nu=1}^{r} \tau_\nu \int g\,\bar{y}_\nu\,u_p\,dx = 0 \tag{63}$$

($p = 1, \ldots, k$). Hieraus und aus (62) sind die a_p, λ, τ_ν zu bestimmen. Multipliziert man (63) mit $a_p^{(\varrho)}$ für $p = 1, \ldots, k$ und $\varrho \leqq r$, und summiert man die entstehenden Gleichungen bei festem ϱ, so erhält man

$$2\sum_{p,\,q=1}^{k} a_p^{(\varrho)} a_q \int u_p\,L(u_q)\,dx - 2\lambda \sum_{p=1}^{k} a_p^{(\varrho)} a_p \int g\,u_p^2\,dx - \sum_{\nu=1}^{r} \tau_\nu \int g\,\bar{y}_\nu\,\bar{y}_\varrho\,dx = 0. \tag{64}$$

Die erste Summe ist nach I, (61), (50) und (62)

$$\begin{aligned}\sum_{p,\,q} a_p^{(\varrho)} a_q \int u_q\,L(u_p)\,dx &= \bar{\lambda}_\varrho \sum_q a_q^{(\varrho)} a_q \int g\,u_q^2\,dx \\ &= \bar{\lambda}_\varrho \sum_{p,\,q} a_p\,a_q^{(\varrho)} \int g\,u_p\,u_q\,dx \\ &= \bar{\lambda}_\varrho \int g\,\bar{y}_\varrho\,\bar{y}\,dx = 0.\end{aligned}$$

Die zweite Summe ist

$$\sum_{p,q} a_p^{(\varrho)} a_q \int g\, u_p u_q\, dx = \int g\, \bar{y}_\varrho\, \bar{y}\, dx = 0.$$

Die dritte Summe ist wegen (60) gleich τ_ϱ. Daher folgt aus (64), daß jedes $\tau_\varrho = 0$ ist. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen (63) zu

$$\sum_{q=1}^{k} a_q \int u_p L(u_q)\, dx = \lambda a_p \int g\, u_p^2\, dx, \tag{65}$$

d. h. man hat wieder die Gleichungen (59), und diese sind genau dann lösbar, wenn $\lambda = \bar{\lambda}_{r+1}$ Nullstelle von $D(\lambda)$ ist. Für eine solche Nullstelle hat das obige Gleichungssystem eine Lösung

$$a_1^{(r+1)}, \ldots, a_k^{(r+1)}, \tag{66}$$

die noch so normiert werden kann, daß

$$\bar{y}_{r+1} = \sum_p a_p^{(r+1)} u_p$$

die erste der Gleichungen (62) erfüllt. Da $\bar{y} = \bar{y}_{r+1}$ auch noch die Orthogonalitätsbedingungen von (62) erfüllen soll, muß $\bar{\lambda}_{r+1} \geqq \bar{\lambda}_r$ sein. Für das Lösungssystem (66) folgt aus (65) weiter wie früher

$$\int \bar{y}_{r+1} L(\bar{y}_{r+1})\, dx = \bar{\lambda}_{r+1} \int g\, \bar{y}_{r+1}^2\, dx = \bar{\lambda}_{r+1},$$

und hieraus ergibt sich, daß $\bar{\lambda}_{r+1}$ die kleinste Nullstelle $\geqq \bar{\lambda}_r$ sein muß.

Damit ist der Induktionsbeweis beendet und gezeigt, daß die Aussagen (A) für alle $\varrho = 1, \ldots, k$ gelten und insbesondere also das Verfahren von Satz 2, angewendet auf $\bar{y}$ statt y, auf die Nullstellen $\bar{\lambda}_1 \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_k$ von $D(\lambda)$ führt.

Für den Beweis von (53) wird ein Teil des Satzes 6 für $\bar{y}$ statt y bewiesen: Sind $w_1(x), \ldots, w_{p-1}(x)$ $(p \leqq k)$ beliebige stetige Funktionen und ist

$$m(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \underline{\text{fin}}\, \bar{y} L(\bar{y})\, dx$$

unter den Nebenbedingungen

$$\int g\, \bar{y}^2\, dx = 1; \quad \int g\, w_\nu\, \bar{y}\, dx = 0, \qquad (\nu \leqq p-1), \tag{67}$$

so ist $\bar{m} \leqq \bar{\lambda}_p$. Man bemerkt zunächst wieder, daß es genügt, ein $\bar{y}$ anzugeben, für das die Nebenbedingungen gelten und

$$\int \bar{y} L(\bar{y})\, dx \leqq \lambda_p$$

ist. Um ein solches $\bar{y}$ zu erhalten, macht man den Ansatz

$$\bar{y} = \sum_{q=1}^{p} c_q \bar{y}_q,$$

wo die $\bar{y}_q$ dieselbe Bedeutung wie in dem vorangehenden Teile des Beweises haben. Dann ist

$$\int g\, w_\nu\, \bar{y}\, dx = \sum_{q=1}^{p} c_q \int g\, w_\nu\, \bar{y}_q.$$

Die letzten Gleichungen von (67) gehen also in $p-1$ Gleichungen für die p Unbekannten c_q über. Die Lösung $c_1, \ldots, c_p$ dieser Gleichungen kann noch so normiert werden, daß

$$\int g\,\bar{y}^2\,dx = \sum_{q,r} c_q c_r \int g\,\bar{y}_q\,\bar{y}_r\,dx = \sum_q c_q^2 \int g\,\bar{y}_q^2\,dx = 1, \tag{68}$$

d. h. auch die erste der Gleichungen (67) erfüllt ist. Für dieses $\bar{y}$ ist dann nach (61)

$$\begin{aligned}
\int \bar{y}\,L(\bar{y})\,dx &= \sum_{\varrho,\sigma=1}^{p} c_\varrho c_\sigma \int \bar{y}_\varrho L(\bar{y}_\sigma)\,dx \\
&= \sum_{\varrho,\sigma=1}^{p} c_\varrho c_\sigma \sum_{q,r=1}^{k} a_q^{(\varrho)} a_r^{(\sigma)} \int u_q\,L(u_r)\,dx \\
&= \sum_{\varrho,\sigma} c_\varrho c_\sigma \sum_q \bar{\lambda}_\sigma a_q^{(\varrho)} a_q^{(\sigma)} \int g\,u_q^2\,dx \\
&= \sum_{\varrho,\sigma} \bar{\lambda}_\sigma c_\varrho c_\sigma \int g\,\bar{y}_\varrho\,\bar{y}_\sigma\,dx \\
&= \sum_{\varrho=1}^{p} \bar{\lambda}_\varrho c_\varrho^2 \int g\,\bar{y}_\varrho^2\,dx \leqq \bar{\lambda}_p \sum_{\varrho=1}^{p} c_\varrho^2 \int g\,\bar{y}_\varrho^2\,dx = \bar{\lambda}_p,
\end{aligned}$$

letzteres nach (68). Also ist in der Tat $\bar{m} \leqq \bar{\lambda}_p$.

Läßt man nun beliebige y zu, so ist sicher $m \leqq \bar{m}$. Daher ergibt sich mit Satz 6

$$\lambda_p = \operatorname{Max} m \leqq \operatorname{Max} \bar{m} \leqq \bar{\lambda}_p.$$

und damit ist der Satz für die positiven Eigenwerte bewiesen. Für die negativen ergibt er sich aus dem schon bewiesenen Teil, indem man g, λ durch $-g$, $-\lambda$ ersetzt.

(Eingegangen am 20. Juli 1939.)

Weinsteins Einschließungssatz.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Der von Weinstein[1]) entdeckte Einschließungssatz lautet:
Es sei die selbstadjungierte definite Eigenwertaufgabe[2])

$$L(y) = \lambda g(x) y; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

mit stetigem $g(x) > 0$ *gegeben; ferner sei* $u(x)$ *eine beliebige Funktion, die in* $a \leqq x \leqq b$ *nicht identisch Null, n-mal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen von* (1) *erfüllt; schließlich wird*

$$\alpha = \frac{\int_a^b u\, L(u)\, dx}{\int_a^b g\, u^2\, dx}, \qquad \beta^2 = \frac{\int_a^b \frac{1}{g} [L(u)]^2\, dx}{\int_a^b g\, u^2\, dx}$$

gesetzt. Dann ist $\beta^2 \geqq \alpha^2$, *und zwischen*

$$\alpha - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \quad \text{und} \quad \alpha + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

liegt mindestens ein Eigenwert von (1).

Die bisherigen Beweise[3]) dieses Satzes sind insofern unbefriedigend, als sie seine Richtigkeit nur unter zusätzlichen Voraussetzungen erkennen lassen. Aus den obigen Voraussetzungen ergibt sich nämlich zwar, daß $u(x)$ sich in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$u(x) = \sum c_\nu \psi_\nu(x)$$

nach einem vollständigen normierten Orthogonalsystem von Eigenfunktionen $\psi_\nu(x)$ der Aufgabe (1) entwickeln läßt, aber es ergibt sich nicht, daß diese

[1]) Proceedings of the national academy of sciences of the USA. **20** (1934), S. 529—532. Zusatz bei der Korrektur: Der Satz findet sich bereits bei N. Kryloff—N. Bogoliubov, Bulletin de l'académie des sciences de l'URSS, Classe des sciences physico-mathématiques, Leningrad 1929, S. 471 ff. Dort wird (bei einer spezielleren Eigenwertaufgabe) gezeigt, daß für beliebiges k zwischen $k - \sqrt{\beta^2 + k^2 - 2\alpha k}$ und $k + \sqrt{\beta^2 + k^2 - 2\alpha k}$ mindestens ein Eigenwert liegt. Man sieht leicht, daß die Schranken am engsten ausfallen, wenn $k = \alpha$ ist; dann hat man die von Weinstein angegebenen Schranken.

[2]) Die Bezeichnungen und Voraussetzungen sind dieselben wie bei E. Kamke, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 759—787.

[3]) Weinstein, a. a. O.; A. Erdélyi, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **18** (1938), S. 178; L. Collatz, ebenda **19** (1939), S. 241 f.

Reihe auch noch nach n-maliger gliedweiser Differentiation absolut und gleichmäßig konvergiert. Das wird aber bei den bisherigen Beweisanordnungen benutzt [4]). Tatsächlich gilt jedoch der Satz mit dem obigen Wortlaut ohne jede zusätzliche Voraussetzung. Man erkennt das, wenn man zu dem bisherigen Beweisgang noch die Besselsche Ungleichung hinzunimmt.

Mit der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\left(\int_a^b u\,L(u)\,dx\right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{g}\,u\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}L(u)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b g\,u^2\,dx\int_a^b \frac{1}{g}\,[L(u)]^2\,dx,$$

also $\alpha^2 \leqq \beta^2$. Weiter ist einerseits

$$\int_a^b \frac{1}{g}\,[\alpha\,g\,u - L(u)]^2\,dx = \alpha^2\int_a^b g\,u^2\,dx - 2\,\alpha\int_a^b u\,L(u)\,dx + \int_a^b \frac{1}{g}\,[L(u)]^2\,dx,$$

also

$$\frac{\int_a^b \frac{1}{g}\,[\alpha\,g\,u - L(u)]^2\,dx}{\int_a^b g\,u^2\,dx} = \alpha^2 - 2\,\alpha^2 + \beta^2 = \beta^2 - \alpha^2. \tag{2}$$

Andererseits ist, wenn

$$c_p = \int_a^b \left(\alpha\,u - \frac{L(u)}{g}\right) g\,\psi_p\,dx \tag{3}$$

die Fourier-Koeffizienten der Funktion $\alpha u - \frac{L(u)}{g}$ sind, nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum c_p^2 \leqq \int_a^b g\cdot\left(\alpha\,u - \frac{L(u)}{g}\right)^2 dx = \int_a^b \frac{1}{g}\,[\alpha\,g\,u - L(u)]^2\,dx,$$

also nach (2)

$$\beta^2 - \alpha^2 \geqq \frac{\sum c_p^2}{\int_a^b g\,u^2\,dx}. \tag{4}$$

Nach den Voraussetzungen über u hat $u(x)$ eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourier-Entwicklung nach den ψ_p:

$$u(x) = \sum a_p\,\psi_p(x) \quad \text{mit} \quad a_p = \int_a^b u\,g\,\psi_p\,dx.$$

---

[4]) Bei Weinstein und Erdélyi stillschweigend, während Collatz das ausdrücklich in die Voraussetzungen aufnimmt.

Aus (3) folgt daher mit Benutzung der Greenschen Formel, wenn λ_p der zu ψ_p gehörige Eigenwert ist,

$$c_p = \alpha \int_a^b g\, u\, \psi_p\, dx - \int_a^b L(u)\, \psi_p\, dx = \alpha a_p - \int_a^b u L(\psi_p)\, dx$$

$$= \alpha a_p - \sum_q a_q \int_a^b \psi_q L(\psi_p)\, dx$$

$$= \alpha a_p - \sum_q a_q \lambda_p \int_a^b g\, \psi_q \psi_p\, dx$$

$$= a_p(\alpha - \lambda_p).$$

Da

$$\int_a^b g\, u^2\, dx = \sum a_p^2$$

ist, folgt somit aus (4)

$$\beta^2 - \alpha^2 \geqq \frac{\sum a_p^2 (\alpha - \lambda_p)^2}{\sum a_p^2}.$$

Ist λ_τ der am nächsten an α gelegene Eigenwert, so ist

$$(\alpha - \lambda_p)^2 \geqq (\alpha - \lambda_\tau)^2,$$

also

$$\beta^2 - \alpha^2 \geqq (\alpha - \lambda_\tau)^2$$

und somit λ_τ zwischen den in dem Satz angegebenen Zahlen gelegen.

(Eingegangen am 1. August 1939.)